Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 8 — Abgabe: Mo, 30. Juni 2014, bis 14^{00} Uhr, *Kasten E6* im Foyer des E-Gebäudes

Groß/Sachs

Hausaufgabe 20: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{3!}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$f(x) = \mathcal{O}(x^5), \quad x \to 0$$

Benutzen Sie die Eigenschaften aus Übungsaufgabe 8 und die Taylorentwicklung.

Hausaufgabe 21: (5 Punkte)

Bestimmen Sie (von Hand!) mit der Lagrange-Interpolationsformel ein Interpolationspolynom durch die Punkte:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	-1

Hausaufgabe 22: (5 Punkte)

Bestimmen Sie mittels des Aitken-Neville-Algorithmus für die Daten

x_i	0	1	3	4
$f(x_i) = f_i$	1	2	4	3

den Wert $f(2)$ $(x = 2)$ als

i) $P_{23}(2)$

ii) $P_{123}(2)$

iii) $P_{1234}(2)$

Übungsaufgabe 8:

Seien $\epsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $M_\epsilon, h_\epsilon \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, dann gilt

$$\epsilon(h) = \mathcal{O}(h^k) :\Leftrightarrow |\epsilon(h)| \leq M_\epsilon h^k \quad \forall h \in (0, h_\epsilon]$$

Zeigen Sie nun, dass folgende *Rechenregeln* gelten:
Seien dazu $a, b, c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant gegeben. Außerdem gelte

$$a = \mathcal{O}(h), \quad b = \mathcal{O}(h^2), \quad c = \mathcal{O}(\frac{h^2}{2})$$

1. $\alpha a = \mathcal{O}(h)$
2. $a + b = \mathcal{O}(h)$
3. $b + c = \mathcal{O}(h^2)$
4. $ab = \mathcal{O}(h^3)$

Übungsaufgabe 9:

Zeigen Sie, dass die Nullstellenbestimmung von

$$ax^2 + bx + c = 0$$

schlecht konditioniert ist, falls $(b^2 - 4ac) \geq 0$ klein ist.

Programmieraufgabe 5: (10+4* Punkte)

i) Programmieren Sie mit Matlab oder Excel das eindimensionale Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 1 \\ f_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 2x + 1 \\ f_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{x-1} - 1 \end{aligned}$$

Verwenden Sie als Startwerte

$$a)\ x_0 = 2, \quad b)\ x_0 = -4$$

und als Abbruchkriterium $|f(x_k)|_2 \leq 10^{-10}$. Erstellen Sie für jeden Startwert und jede Funktion eine Tabelle (bei Matlab in einer Textdatei) mit den Ergebnissen und **kommentieren diese ausführlich** und geben Sie dabei die Konvergenzordnungen an

$$k \;\Big|\; x_k \;\Big|\; f(x_k) \;\Big|\; |x_k - x_*| \;\Big|\; |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*| \;\Big|\; |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*|^2$$

mit $x_* = 1$. Plotten Sie die Funktionen f_1, f_2, f_3 auf dem Intervall $[-2, 2]$. Was fällt Ihnen dabei auf?

ii) Programmieren Sie für $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$ das folgende modifizierte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

mit denselben Werten wie im Aufgabenteil i). Erstellen Sie wiederum eine Tabelle in einer Textdatei mit den Ergebnissen und **kommentieren diese ausführlich**.

$$k \;\Big|\; x_k \;\Big|\; f(x_k) \;\Big|\; |x_k - x_*| \;\Big|\; |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*| \;\Big|\; |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*|^2$$

Was fällt Ihnen auf? Wie lässt sich dies erklären, gehen Sie dabei auf die Übungsaufgabe 7 ein.

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` oder Excel-File abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnamenMatrikelnummernAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Namen, Matrikelnummern, Studienfächer

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.