Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 7 — Abgabe: Mo, 23. Juni 2014, bis 14^{00} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Hausaufgabe 16: (5 Punkte)

Ermitteln Sie approximativ die Minimalstelle der Funktion $f(x) = e^{x+1} - 4x$, indem Sie die Nullstelle der Ableitung f' mittels des Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

suchen. Wählen Sie dazu als Startwert $x_0 = 1$ und berechnen Sie die Iterierten x_1, x_2 und x_3 per Hand (Taschenrechner). Beachten Sie dabei, dass Sie die Nullstelle von f' suchen.

Hausaufgabe 17: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{a}, (a > 0)$ als Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ äquivalent ist zum babylonischen Wurzelziehen (Heron Verfahren)

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}.$$

Hausaufgabe 18: (5 Punkte)

Gegeben sei eine reellwertige Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie: Falls $(x_k)_k$ in einer gegebenen Norm $\|\cdot\|$ q-superlinear gegen x_* konvergiert, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x_*\|} = 1.$$

Wie interpretieren Sie diese Aussage?

Hausaufgabe 19: (2+2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die q-Konvergenzraten aus der Vorlesung der Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

i) $x_{2k} = \beta_1^k \beta_2^k$ und $x_{2k+1} = \beta_1^k \beta_2^{k+1}$, wobei $\beta_1 > \beta_2$ und $\beta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$

ii) $x_k = \gamma\beta^{k+1/k}$, wobei $\gamma > 0$ und $\beta \in (0,1)$

iii) $x_k = \gamma\beta^k$, wobei $\gamma > 0$ und $\beta \in (0,1)$

iv) $x_k = 1 + \frac{1}{k!}$

Übungsaufgabe 6:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $u, v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel:

$$A + uv^\top \text{ regulär} \Longleftrightarrow 1 + v^\top A^{-1} u =: \sigma \neq 0$$

Darüber hinaus gilt im Falle der Regularität:

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} uv^\top A^{-1}.$$

Übungsaufgabe 7:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelwertige zweimal stetig differenzierbare Funktion mit zweifacher Nullstelle x_*, d.h. $f(x_*) = f'(x_*) = 0$ und $f''(x_*) \neq 0$.

Zeigen Sie, dass dann das Newton-Verfahren lokal q-linear gegen x_* konvergiert und es gilt

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|} = \frac{1}{2}.$$

(*Tipp: Taylorreihenentwicklung*)