Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 6 — Abgabe: Mo, 2. Juni 2014, bis 14^{00} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Hausaufgabe 13: (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Die Vektoren $x_{i+1} = x_i + \alpha_i v_i$, g_i und v_i und der Skalar α_i seien durch das konjugierte Gradientenverfahren aus der Vorlesung erzeugt. Zeigen Sie, dass dann gilt: Ist der Startvektor $x_0 = 0$ und die Gradientenrichtungen $g_i \neq 0$ für alle $0 \leq j < J$, so folgt

$$||x_{i+1}||_2 > ||x_i||_2 \quad \forall\ 0 \leq j < J.$$

Erläutern Sie, warum die Vorrausetzung $g_i \neq 0$ sinnvoll ist.
Hinweis: Mittels der vollständigen Induktion lässt sich Folgendes zeigen:

$$v_j^\top v_i = \frac{||g_j||_2^2}{||g_i||_2^2}||v_i||_2^2 \quad \forall\ 0 \leq i < j < J.$$

Hausaufgabe 14: (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Die Vektoren g_i und v_i seien durch das konjugierte Gradientenverfahren erzeugt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\operatorname{span}(v_0, ..., v_i) = \operatorname{span}(g_0, ..., g_i) = \operatorname{span}(g_0, Ag_0, ..., A^i g_0) = \mathcal{K}_{i+1}(A, g_0),$$

wobei $\operatorname{span}(x_1, ..., x_n)$ die lineare Hülle der Vektoren $x_1, ..., x_n$ bezeichnet und $\mathcal{K}$ den Krylovraum

$$\mathcal{K}_{i+1}(A, x) := \operatorname{span}(x, Ax, A^2x, ..., A^i x).$$

Hausaufgabe 15: (4 Punkte)

Sei $A \in K^{n\times n}$ und $x \in K^n$. Zeigen Sie, dass Krylovräume invariant gegenüber Translationsabbildungen sind. Das heißt es gilt mit der Einheitsmatrix I und $\alpha \in K$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{K}_k(A, x) = \mathcal{K}_k(A - \alpha I, x).$$

Hinweis: Die Binomische Formel gilt auch für Matrizen, bei denen die Kommutativität gilt. Seien dazu $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$

$$\Rightarrow \quad (A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Programmieraufgabe 4: (10 Punkte)

Programmieren Sie das präkonditionierte konjungierte Gradientenverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b = \frac{10}{n^2}\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)^\top .$$

Verwenden Sie WW^T als Präkonditionierungsmatrix, wobei

$$W = \frac{1}{2}\left(D + \mu L\right), \quad \mu \geq 0$$

und D, L von der Zerlegung von $A = D + L + L^\top$ in Diagonal-,untere und obere Dreiecksmatrix stammen.

Starten Sie mit $x_0 = (0, 0, ..., 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ und brechen Sie das Verfahren ab, wenn $||g_i||_2 < 10^{-12}$ gilt. Speichern Sie die Koeffizientenmatrix A und die (spezielle) Präkonditionierungsmatrix W **nicht** explizit ab. Programmieren Sie stattdessen geeignete Matlab-Funktionen zur Auswertung von A angewandt auf einen Vektor und zur Lösung des linearen Gleichungssystems der Form $WW^\top z = g$. Beachten Sie, dass z auf Grund der speziellen Struktur von WW^T in zwei Schritten durch die explizite Lösung der sehr einfachen Gleichungssysteme $Ws = g$ und $W^\top z = s$ berechnet werden kann.

Lassen Sie das Matlab-Programm für $n = 10, 100, 1000, 2000$ und jeweils $\mu = 0, 1, 2$ laufen. Als Ausgabe erzeugen Sie eine Tabelle mit den folgenden zusammenfassenden Angaben des Iterationsverlaufs: n, μ, i_{ges} (Gesamtanzahl der benötigten CG Iterationen), $||Ax_{i_{ges}} - b||_2$ sowie der Rechenzeit zur Lösung des jeweiligen Gleichungssystems.

Berechnen Sie mittels Matlab für für $n = 10, 100, 1000$ die Eigenwerte der Matrix A und der präkonditionierten Matrix $W^{-1}AW^{-\top}$ und plotten Sie diese geeignet.

Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse und Beobachtungen ausführlich und geben Sie diese zusammen mit Ihren Ausgabedateien ausgedruckt ab.

Hilfreiche Matlabbefehle: `diag`, `spdiags`, `tril`

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnamenMatrikelnummernAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Namen, Matrikelnummern, Studienfächer

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.