Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 5 Abgabe: Mo, 26. Mai 2014, bis 14^{00} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs im Foyer des E-Gebäudes

Hausaufgabe 10: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ folgende Äquivalenzen der Matrixnormen gelten

i) $\frac{1}{\sqrt{d}}|||A|||_\infty \le |||A|||_2 \le \sqrt{m}|||A|||_\infty$,

ii) $\frac{1}{\sqrt{m}}|||A|||_1 \le |||A|||_2 \le \sqrt{d}|||A|||_1$.

Hinweis:
Nutzen Sie dazu Ergebnisse aus der Aufgabe 7.2 ii) der Übung zur Einführung in die Mathematik (WS 11/12 - Frerick, Kalmes): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{d}||x||_\infty,$$
$$||x||_2 \le ||x||_1 \le \sqrt{d}||x||_2.$$

Hausaufgabe 11: (3 Punkte)

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass der Spektralradius $\rho(A)$ keine Matrixnorm ist.

Hausaufgabe 12: (6 Punkte)

Betrachten Sie zur Lösung eines linearen Gleichungssystems das Iterationsverfahren

$$x_{i+1} = Mx_i + c, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

mit einer geeigneten Iterationsmatrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\rho(M) < 1$, sowie $c \in \mathbb{R}^n$. Ferner seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$, $\rho(M) = |\lambda_1| > |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|$, die Eigenwerte und $v_1, ..., v_n$ eine als existent vorausgesetzte zugehörige Orthonormalbasis der Eigenvektoren von M.
Weiterhin bezeichne x_* den eindeutigen Grenzwert der Fixpunktiteration (1) und $e_i = x_i - x_* \neq 0$ den Fehler im i-ten Iterationsschritt. Zeigen Sie:

Falls $e_0 = \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k$ mit $\gamma_1 \neq 0$, so folgt

$$\frac{\|e_{i+1}\|_2}{\|e_i\|_2} \to \rho(M)\,, \quad i \to \infty$$

Wie interpretieren Sie diese Aussage?

Übungsaufgabe 5:

Beweisen Sie das Korollar 1.6.2 zum Banach Lemma aus der Vorlesung.
Seien dazu $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|||A^{-1}B||| < 1$, $|||\cdot|||$ eine konsistente Matrixnorm. Dann gilt

i) $(A+B)^{-1}$ existiert,

ii) $|||(A+B)^{-1}||| \leq \frac{|||A^{-1}|||}{1-|||A^{-1}B|||}$

ii) $|||(A+B)^{-1} - A^{-1}||| \leq \frac{|||A^{-1}B||| |||A^{-1}|||}{1-|||A^{-1}B|||}$

Programmieraufgabe 3: (10 Punkte)

Programmieren Sie zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & -3 & 1 & -\pi & 4 \\ 1 & -1 & -7 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -\pi^2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 12 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

das Jacobi- sowie das Gauss-Seidel-Verfahren in Matlab. Wählen Sie als Startvektor jeweils $x_0 = (0,0,0,0,0,0)^\top$.
Geben Sie bei beiden Verfahren in jeder Iteration die Iterationszahl i, den Fehler $\|Ax_i - b\|_2$,die Iterierte x_i sowie den Ausdruck $(\|x_i - x_*\|_2 / \|x_0 - x_*\|_2)^{1/i}$ tabellarisch formatiert aus und brechen Sie die Verfahren ab, sobald $\|Ax_i - b\|_2 \leq 10^{-6}$ gilt.
Die Lösung x^* können Sie hierbei mittels Matlab berechnen.

Wieviele Iterationen benötigen die beiden Verfahren? Berechnen Sie ferner in Matlab den Spektralradius ρ der Iterationsmatrix des Jacobi- sowie des Gauss-Seidel-Verfahrens und kommentieren Sie Ihre Ergebnisse ausführlich und gehen Sie dabei auf die Hausaufgabe 12 ein.

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnamenMatrikelnummernAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Namen, Matrikelnummern, Studienfächer

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.