

Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 4

Abgabe: Mo, 19. Mai 2014, bis 14⁰⁰ Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs

im Foyer des E-Gebäudes

Hausaufgaben und Programmieraufgaben können in Zweiergruppen abgegeben werden.

Übungsaufgaben werden nicht bewertet und dienen nur zur Vertiefung der Übung.

Hausaufgabe 8:

(5 Punkte)

Bestimmen Sie zur Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des \mathbb{R}^3 mit $u_1^T = (2, 1, 0)$, $u_2^T = (1, 3, 0)$ und $u_3^T = (3, -1, 1)$ ausgehend von u_1 eine Orthonormalbasis zur euklidischen Norm rekursiv mit dem Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt

$$w_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \tilde{w}_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{\nu=1}^k u_{k+1}^\top w_\nu w_\nu \quad w_{k+1} := \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\|\tilde{w}_{k+1}\|}.$$

Hausaufgabe 9:

(5 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Rang-1-Matrix, d.h. $\text{rg}(A) = 1$. Zeigen Sie dann

- i) existieren Spaltenvektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u, v \neq 0$, so dass $A = uv^\top$.
- ii) A hat den Eigenwert $v^\top u$ zu dem Eigenvektor u .

Übungsaufgabe 4:

Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ und bestimmen Sie zu dessen Basis bestehend aus den Monomen $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ die ersten vier Orthonormalpolynome zum Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

mit dem Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt.

Programmieraufgabe 2:

(6 Punkte)

Nutzen Sie die Matlab-Routinen $[L, R] = lu(A)$ sowie $[Q, R] = qr(A)$, um die LR- und QR-Zerlegung der zufällig erzeugten Matrizen $A = rand(n_i, n_i)$, $n_i = 2^i$, $i = 1, \dots, i_{max}$ zu berechnen, wobei i_{max} das größte i bezeichnet, so dass der von Ihnen eingesetzte Rechner noch die Zerlegungen berechnen kann (z.B. $i = 12$ oder $i = 13$).

Geben Sie für jedes i die benötigte Zeit t_i^{lr} zur Berechnung der LR- sowie t_i^{qr} zur Berechnung der QR-Zerlegung aus (Ermittlung der Rechenzeit über die Befehle *tic*, *toc*). Ermitteln Sie ferner für $i = 2, \dots, i_{max}$ die Quotienten

$$q_i^{lr} = \log(t_i^{lr}/t_{i-1}^{lr})/\log(n_i/n_{i-1}), \quad q_i^{qr} = \log(t_i^{qr}/t_{i-1}^{qr})/\log(n_i/n_{i-1}), \quad f_i = (t_i^{qr}/t_i^{lr})$$

Was können Sie beobachten? Kommentieren und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse ausführlich. Leiten Sie ferner die Quotienten q_i^{lr} und q_i^{qr} aus geeigneten Gleichungen her.

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnamenMatrikelnummernAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Namen, Matrikelnummern, Studienfächer

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.