

Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 3
Groß/Sachs

Abgabe: Mo, 12. Mai 2014, bis 14⁰⁰ Uhr, *Kasten E6*
im Foyer des E-Gebäudes

Hausaufgaben und Programmieraufgaben können in Zweiergruppen abgegeben werden.

Hausaufgabe 6:

(10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $\text{rg}A = r \leq \min(m, n)$ und den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$ gegeben und sei $B(\lambda) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\lambda > 0$, definiert durch

$$B(\lambda) = (A^\top A + \lambda I)^{-1} A^\top.$$

Zeigen Sie:

$$\|B(\lambda) - A^+\|_2 = \frac{\lambda}{\sigma_r[\sigma_r^2 + \lambda]}.$$

Bemerkung: Diese Identität liefert einen weiteren Beweis für

$$A^+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (A^\top A + \lambda I)^{-1} A^\top, \quad \text{denn} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|B(\lambda) - A^+\|_2 = 0.$$

Hausaufgabe 7:

(10 Punkte)

Seien wie in Hausaufgabe 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie davon die Pseudoinverse wie in Satz 1.3.4 mittels

$$A^+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (A^\top A + \lambda I)^{-1} A^\top.$$

Berechnen Sie dann die Ausgleichslösung minimaler Länge

$$\bar{x} = A^+ b.$$

Programmieraufgabe 1:

(2+4+2+2 Punkte)

Betrachten Sie folgende lineare Gleichungssysteme

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 63 & 94 \\ 2 & 43 & 84 \\ 2 & 21 & 10 \\ 0 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

mit den rechten Seiten b gegeben durch die Einheitsvektoren, das heißt

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie in MatLab ein Programm zum Lösen der Ausgleichsprobleme $A\hat{x} = b_e$, $e = 1, \dots, 4$ wie folgt

- i) Bestimmen Sie die Ausgleichslösungen $\bar{x} = A^+b_e$, $e = 1, \dots, 4$ zunächst mittels der MatLab Pseudoinversen *pinv*.
- ii) Schreiben Sie eine Matlab-*function*, die mittels der Singulärwertzerlegung ($[U, S, V]=svd(A)$) die Ausgleichslösung als

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sigma_i} u_i^\top b_e v_i \quad e = 1, \dots, 4$$

berechnet.

- iii) Vergleichen Sie beide Methoden unter Berücksichtigung des Zeitbedarfs. Die Zeit läßt sich mit dem Befehl *tic...toc* messen. Verfassen Sie eine Datei mit den Ergebnissen:

Methode: e | \bar{x}_1 | \bar{x}_2 | \bar{x}_3 | $\|\bar{x}\|$ | Zeit

- iv) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse. Gibt es einen Zusammenhang zwischen der rechten Seite und der Ausgleichslösung? Gehen Sie dabei auch auf die Größe Singulärwerte ein.

Laden Sie den Quellcode (als **m-file** abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

NachnamenMatrikelnummernAufgabenummer.m

In der den ersten Zeilen des **m-file** stehen mit **%** auskommentiert:

– Namen, Matrikelnummern, Studienfächer

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.