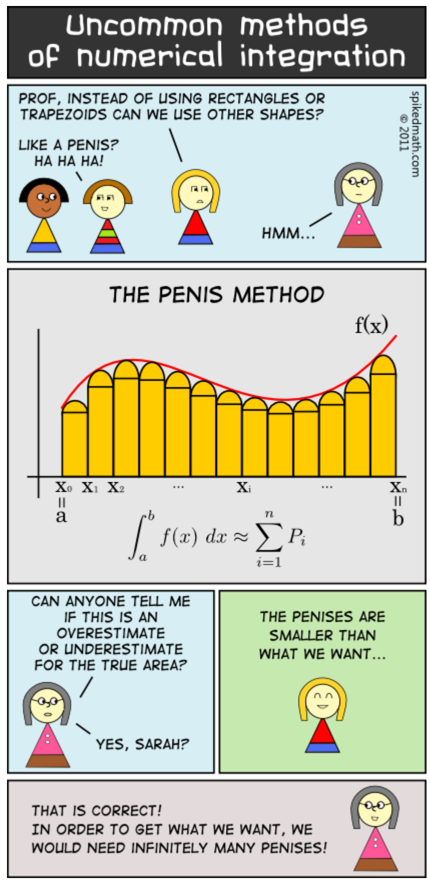
Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 11 — Abgabe: Mo, 21. Juli 2014, bis 14^{00} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Alle Punkte auf diesem Übungsblatt sind Zusatzpunkte.

Hausaufgabe 29: (8 Punkte)



Erläutern Sie die numerische Integration, die in dem nebenstehenden Spiked Math Comic dargestellt wird.
Können Sie die Formel der numerischen Integration angeben und deren Fehler beschreiben?

Programmieraufgabe 8: (12+8 Punkte)

„Eine Call-Option ist das Recht (aber nicht die Pflicht), eine Aktie S in einem zukünftigen Zeitpunkt T zu einem vertraglich festgelegten Kurs K (Strike) kaufen zu dürfen.“
So oder so ähnlich steht es in einem sogenannten Finanzkontrakt, einer -in diesem Fall- europäischen Kaufoption.

Es stellt sich die Frage, wieviel eine solche Option im heutigen Zeitpunkt $t = 0$ wert ist. Im Black-Scholes-Modell, das den zukünftigen stochastischen Verlauf eines Aktienkurses simuliert, ergibt sich nach einigen Transformationen der folgende Preis C_0 für eine Call-Option (Kaufoption):

$$C_0 = S_0 \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Hierbei bezeichnet $S_0 > 0$ den Aktienkurs im Zeitpunkt $t = 0$, $\sigma > 0$ die Volatilität (sowas wie die Varianz) der Aktie und r den Zinssatz einer risikolosen Anlage.

i) Für $S_0 = 9780$ Euro, $\sigma = 0.2$, $r = 0.15\% = 0.0015$, $K = 10000$ Euro und $T = 1$ Jahr ergibt sich ein über die obige Formel berechneter Preis von $C_0 = 688.9088917734$ Euro (berechnet mit `blsprice`). Schreiben Sie in Matlab ein Programm, das diesen Preis durch numerische Integration berechnet. Implementieren Sie dazu die folgenden beiden Verfahren:

   a) Summierte Trapezregel

   $$T(h) = h\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right),$$

   wobei $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N$ und $h = \frac{b-a}{N}$.

   b) Summierte Simpsonregel

   $$S(h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1}(f(x_{2i}) + 2f(x_{2i+1}))\right),$$

   wobei $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, 2N$ und $h = \frac{b-a}{2N}$.

Wählen Sie als Integrationsintervall $[a, b] = [-8, d_1]$ bzw. $[-8, d_2]$ und berechnen Sie für $N = 10, 100, 1000, 10000$ den approximativen Preis der Call-Option $C_0^T(N)$ bzw. $C_0^S(N)$ mit Hilfe der Verfahren a) bzw. b). Geben Sie für jedes N die Größen

$C_0^T(N)$, $|C_0^T(N) - C_0|$, $C_0^S(N)$, $|C_0^S(N) - C_0|$

tabellarisch aus.
Was können Sie beobachten?

ii) (Zusatzaufgabe*)

Bei festen Parametern S_0, r, K und T stellt die obige Call-Preisformel C_0 eine bijektive Abbildung zwischen der Volatilität σ sowie dem Call-Preis dar. Diese eindeutige Zuordnung von Call-Preisen zu Volatilitäten und umgekehrt wird von Händlern in der Praxis ausgenutzt, um aus am Markt beobachteten Call-Options-Preisen implizit Volatilitäten zu berechnen. Mathematisch ist dies äquivalent zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $f(\sigma) = C_0(\sigma) - C_{\text{Markt}} = 0$, wobei C_{Markt} ein am Markt beobachteter Preis einer Call-Option ist.

Programmieren Sie in Matlab zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems das Newton-Verfahren, um für $S_0 = 9780$, $r = 0.0015$, $K = 10000$, $T = 1$ und einen am Markt beobachteten Preis von $C_{\text{Markt}} = 553$ Euro die implizite Volatilität σ zu bestimmen. Verwenden Sie im Newton-Verfahren eine finite Differenzen-Approximation der Ableitung ($f'(\sigma) \approx \frac{f(\sigma+h)-f(\sigma)}{h}$, für $h = 10^{-6}$) und geben Sie für den Startwert $\sigma_0 = 0.05$ den Konvergenzverlauf aus. Wobei das Abbruchkriterium $|f(\sigma_k)| < 10^{-8}$ ist.
Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Programmieraufgabe 9: (12 Punkte)

Aus der Schulmathematik im Gebiet der Stochastik ist die Standardnormalverteilung

$$\Phi_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

bekannt. Da diese Funktion analytisch nicht exakt zu berechnen ist, wird diese mittels Integralapproximation berechnet und im Schulbuch als Tabelle angegeben (Vgl. hierzu zum Beispiel das „Das große Tafelwerk" im „Fokus Mathematik - Stochastik" vom Cornelsen Verlag). Leider sind in der unten angegeben Tabelle einige Werte verschwunden.

Schreiben Sie ein Excel-Programm, welches unter Verwendung der summierten Simpsonregel

$$S(h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \left(f(x_{2i}) + 2f(x_{2i+1})\right)\right),$$

$$\text{wobei } x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, 2N \text{ und } h = \frac{b-a}{2N}$$

die Fehlenden Werte berechnet. Wählen sie dazu $N = 50$ und berechnet Sie damit das Integral

$$\widehat{\Phi}_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-8}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Geben Sie zusätzlich zu den in der Tabelle fehlenden Werten folgende Werte aus:

$$\widehat{\Phi}_{0;1}(\pi/2), \quad \widehat{\Phi}_{0;1}(5), \quad \widehat{\Phi}_{0;1}(4.77) \quad \text{und} \quad \widehat{\Phi}_{0;1}(7)$$

Warum ist die Wahl von -8 statt $-\infty$ als untere Integralgrenze sinnvoll?

Tabelle 1: Tabelle der Standardnormalverteilung

Berechnung des Integrals $\Phi_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ Beispiel: $\Phi_{0;1}(1.65) = 0.95053$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.10	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.20	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.30	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	**0.?????**	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.40	0.65542	0.65910	**0.?????**	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.50	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.60	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.70	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.80	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.90	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	**0.?????**
1.00	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.10	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.20	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	**0.?????**
1.30	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.40	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.50	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.60	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.70	0.95543	0.95637	**0.?????**	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.80	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.90	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.00	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.10	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.20	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.30	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.40	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.50	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.60	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.70	**0.?????**	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.80	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.90	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	**0.?????**	0.99851	0.99856	0.99861
3.00	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900