Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 10 — Abgabe: Mo, 14. Juli 2014, bis 14^{00} Uhr, *Kasten E6* im Foyer des E-Gebäudes

Groß/Sachs

Hausaufgabe 26: (5+3+3 Punkte)

Sei $(P_k : [-1,1] \to \mathbb{R})_{1 \leq k \leq n}$ $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Orthogonalpolynomen

i) Zeigen Sie, dass folgende Aussage stimmt:
Das Orthogonalpolynom P_n hat genau n einfache Nullstellen im Intervall $(-1,1)$.

ii) Berechnen und Plotten Sie auf dem Intervall $[-1,1]$ die ersten Legendre Orthogonalpolynome P_n bis zum Grad $n = 8$ und verifizieren Sie die obige Aussage aus i).
Benutzen Sie dazu diese vereinfachte Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1}\left((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right) \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

iii) Berechnen und Plotten Sie auf dem Intervall $[-1,1]$ die ersten Tschebyscheff Orthogonalpolynome T_n bis zum Grad $n = 8$ und verifizieren Sie ebenfalls die Aussage aus i).
Benutzen Sie dazu diese vereinfachte Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n - T_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 27: (4+3 Punkte)

i) Berechnen Sie für ein Integral der Form

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt$$

die Gaußpunkte t_1, t_2 sowie die zugehörigen Gewichte α_1, α_2 für eine Gaußquadratur mit diesen zwei Gaußpunkten als Stützstellen.
(*Tipp: Nullstellen des Legendre Orthogonalpolynoms*).

ii) Benutzen Sie die Gewichte und Stützstellen (Gaußpunkte) aus i), um folgende Integrale mittels Gaußscher Quadraturformel zu approximieren:

a)

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2} dx$$

Vergleichen Sie das Ergebnisse der Gaußquadratur mit jenem aus Hausaufgabe 24.

b)

$$\int_{-1}^{1} \cos(t) dt$$

Hausaufgabe 28: (6 + 4 Punkte)

a) Sei $f \in C^2[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeigen Sie, dass die zusammengesetzte Trapezregel (summierte Trapezregel) den Integrationsfehler

$$E(f) \leq (b-a)\frac{h^2}{12} \left\|f''\right\|_\infty$$

besitzt. Wobei $h = \frac{b-a}{n}$.

b) Wie viele Teilintervalle n in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ werden bei der zusammengesetzten Trapezregel benötigt, damit der Fehler bei der Approximation von

$$\int_0^1 e^{-kx}\, dx\,, \quad k = \text{const}$$

kleiner als 10^{-5} ist?
Das heißt, es ist nach der Größe des n aus dem Teil a) gefragt.

Programmieraufgabe 7: (8 Punkte)

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, welches die summierten (zusammengesetzte) Trapezsummen und summierte Simpsonregel für die folgenden Testbeispiele berechnet.

$$\text{sinus-Funktion: } \int_0^{\pi} \sin(t) dt$$

$$\text{Polynom 2. Grades: } \int_{-1}^{1} 1 + x^2 dx$$

$$\text{Treppenfunktion: } \int_3^4 f(y) dy \text{ mit } f(y) = \begin{cases} 0.5 & y \leq \pi \\ 1.0 & y > \pi \end{cases}$$

Verwenden Sie für die Anzahl der Stützstellen die Werte $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$. Erstellen Sie eine Textdatei mit der Tabelle m | $T(h)$ | Fehler: $\|T(h) - I\|$ | $S(h)$ | Fehler: $\|S(h) - I\|$

Plotten Sie Schrittweite und Fehler mit doppelt logarithmischer Skala (`loglog(h,Error)`). Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse. Wie kann man aus den Grafiken die Fehlerordnung ablesen? Was für ein Problem tritt bei der Treppenfunktion auf und wie kann man dieses beheben?

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` oder Excel-File abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnamenMatrikelnummernAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Namen, Matrikelnummern, Studienfächer

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.