Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 1 — Abgabe: Mo, 28. April 2014, bis 14^{00} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Hausaufgaben sind abzugeben.
Übungsaufgaben werden nicht bewertet und dienen nur zur Vertiefung der Übung.

Hausaufgabe 1: (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte der potenzierten Matrix A^5.

Hausaufgabe 2: (2+2+3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.

ii) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, bestimmen Sie $S^{-1}AS$, wobei $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die aus den Eigenvektoren von A generierte Matrix ist.

iii) Berechnen Sie *geschickt* die Matrix A^{50}. Verifizieren Sie ihr Ergebnis mit Hilfe von Matlab.

Hausaufgabe 3: (2+2+1 Punkte)

Benutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton um die Inversen der Matrizen

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

als Polynom in A bzw. B auszudrücken. Verifizieren Sie ihre Ergebnisse mit Matlab.

Übungsaufgabe 1:

Sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix B.

ii) Ist B diagonalisierbar? Wenn ja, bestimmen Sie $S^{-1}BS$.

iii) Berechnen Sie *geschickt* die Matrix B^{42}. Verifizieren Sie ihr Ergebnis mit Hilfe von Matlab.

iv) Bestimmen Sie das Minimalpolynom für die Matrix B.

Übungsaufgabe 2:

Definition:
Eine Matrix $N \in K^{n\times n}$ heißt nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $N^k = 0$ gilt. Die kleinste Zahl k mit $N^k = 0$ heißt der Nilpotenzindex von N.

Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) Ist $N \in K^{n\times n}$ nilpotent, so hat N nur den Eigenwert 0. Das heißt es gilt für das charakteristische Polynome $\chi_N(\lambda) = (-\lambda)^n$.

ii) $N \in K^{n\times n}$ ist nilpotent und diagonalisierbar genau dann, wenn N die Nullmatrix ist, also $N = 0$.