Eine Einführung zum numerischen Programmieren mit Excel

Bastian Groß
Nina Weiand

Universität Trier

23. Juni 2014

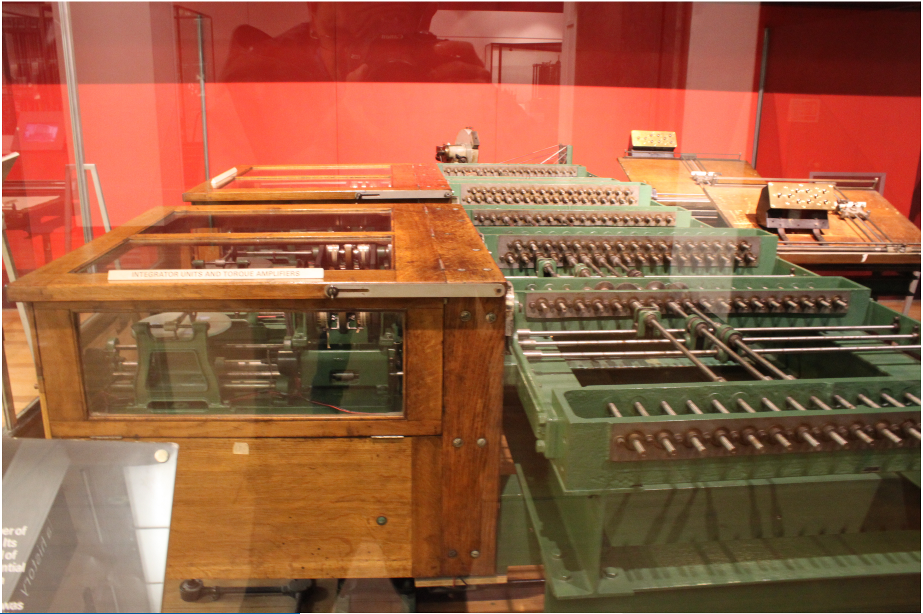
Inhaltsverzeichnis

Beispielprogramme

Die Beispielprogramme sind hier zu finden:
www.mathematik.uni-trier.de/˜gross

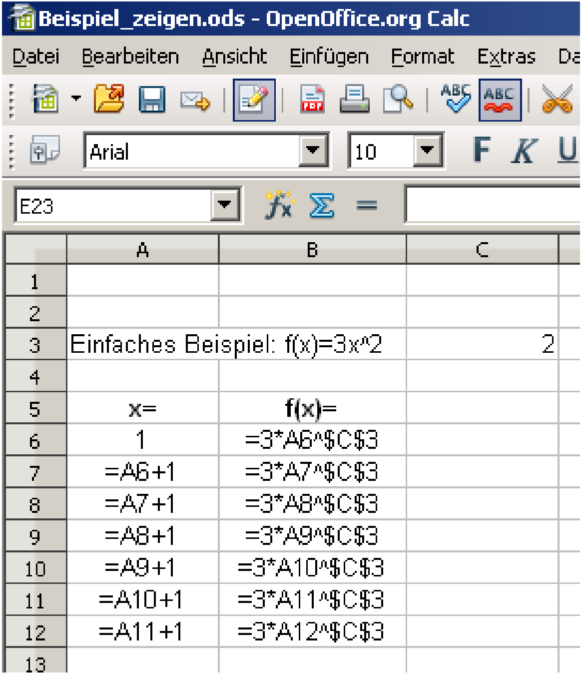
Berechnung in alten Zeiten: Divison

Berechnung in alten Zeiten: Differenzieren und Integrieren



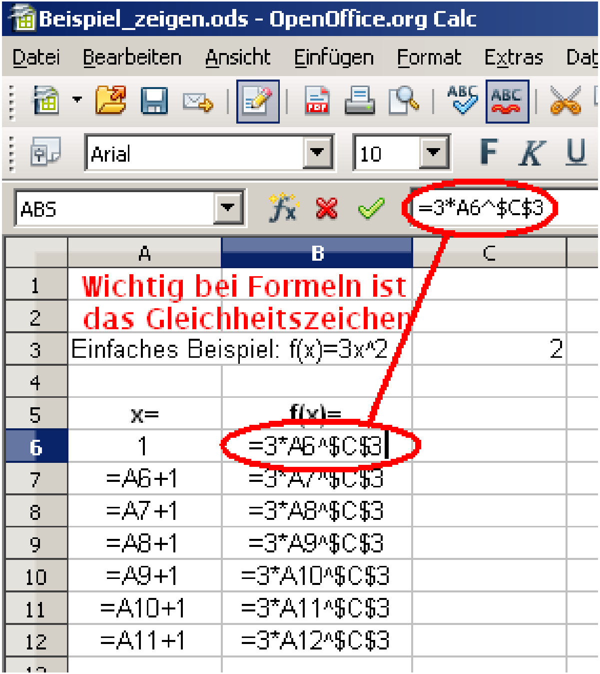
Berechnung in alten Zeiten: Grundrechenarten

Die Rechenmaschine von Gottfried Wilhelm Leibniz aus dem Science Museum (London UK).

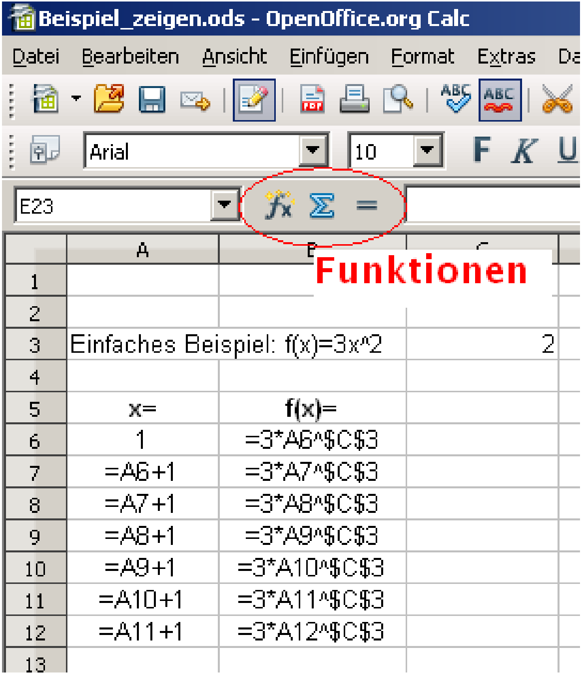


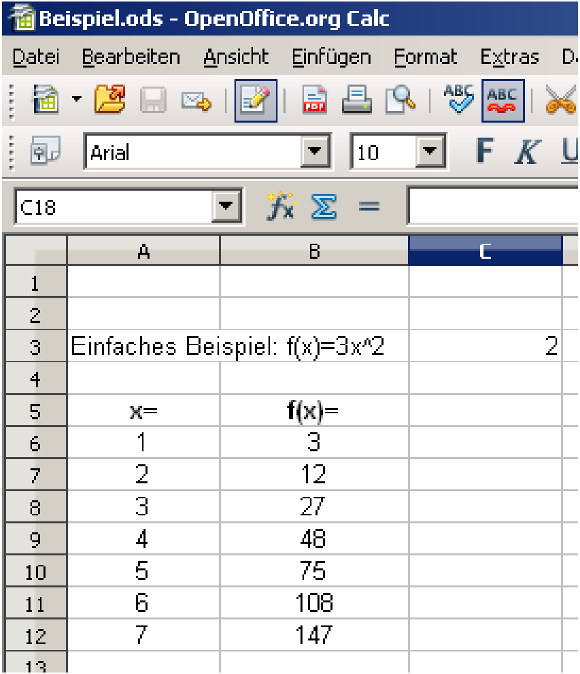
	A	B	C
1			
2			
3	Einfaches Beispiel: f(x)=3x^2		2
4			
5	x=	f(x)=	
6	1	=3*A6^$C$3	
7	=A6+1	=3*A7^$C$3	
8	=A7+1	=3*A8^$C$3	
9	=A8+1	=3*A9^$C$3	
10	=A9+1	=3*A10^$C$3	
11	=A10+1	=3*A11^$C$3	
12	=A11+1	=3*A12^$C$3	
13			

Die einzelnen Zellen und damit ihr Inhalt werden mittel der Zeilenzahl und des Spaltenbuchstabes aufgerufen (z.B. D4).
Falls man eine Zeile oder Spalte konstant halten will geschieht dies mit dem Dollarzeichen, $ (z.B. $D$4 oder jeweils $D4 bzw. D$4).
Formeln in einer Zelle <u>müssen</u> mit eine Gleichheitszeichen, =, beginnen!

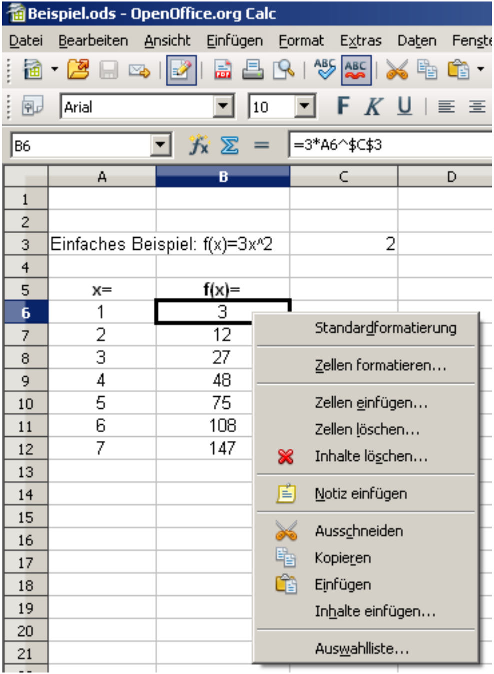

Beispiel_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras
Arial
10
ABS
=3*A6^$C$3
Wichtig bei Formeln ist
das Gleichheitszeichen
Einfaches Beispiel: f(x)=3x^2
2
x=
f(x)=
1
=3*A6^$C$3
=A6+1
=3*A7^$C$3
=A7+1
=3*A8^$C$3
=A8+1
=3*A9^$C$3
=A9+1
=3*A10^$C$3
=A10+1
=3*A11^$C$3
=A11+1
=3*A12^$C$3

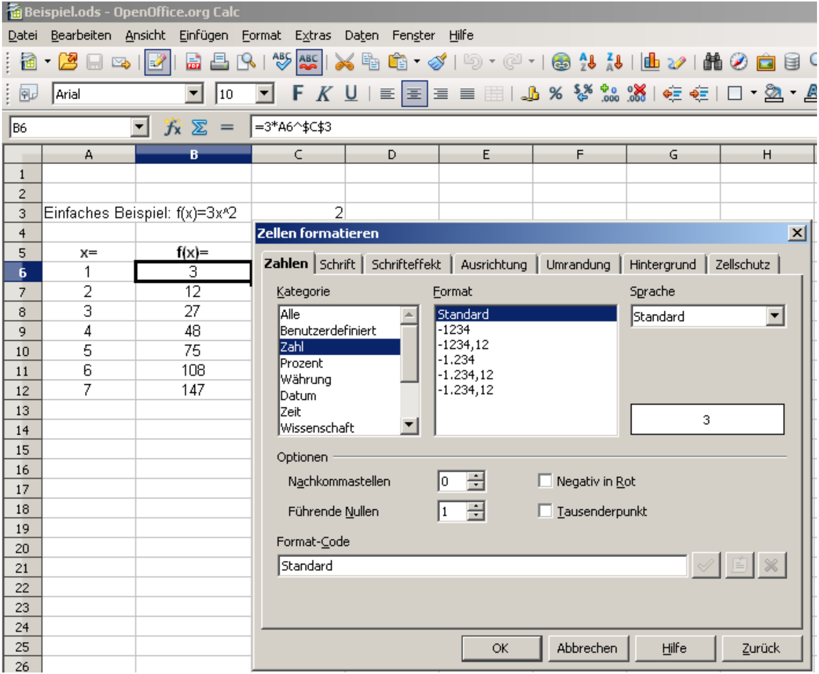
Funktionen die in den einzelnen Zellen aufgerufen werden können, findet man hier!
Um sich Zeit beim Eintippen zu sparen kann man mit Hilfe der Maus Zellen „ziehen“.


Beispiel_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc
Datei
Bearbeiten
Ansicht
Einfügen
Format
Extras
Arial
10
E23
Funktionen
Einfaches Beispiel: f(x)=3x^2
2
x=
f(x)=
1
=3*A6^$C$3
=A6+1
=3*A7^$C$3
=A7+1
=3*A8^$C$3
=A8+1
=3*A9^$C$3
=A9+1
=3*A10^$C$3
=A10+1
=3*A11^$C$3
=A11+1
=3*A12^$C$3


Beispiel.ods - OpenOffice.org Calc
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras
Arial
10
F K U
C18
A B C
1
2
3 Einfaches Beispiel: f(x)=3x^2 2
4
5 x= f(x)=
6 1 3
7 2 12
8 3 27
9 4 48
10 5 75
11 6 108
12 7 147

Wenn man die Ausgabe in einer oder mehrerer Zellen formatieren möchte, also zum Beispiel die Anzahl der Nachkommastellen vergrößern will, muss man mit einem Rechtsklick der Maus, nach dem alle gewünschten Zellen markiert sind, auf „Zellen formatieren“ klicken und dann in diesem neuen Fenster das gewünschte einstellen.

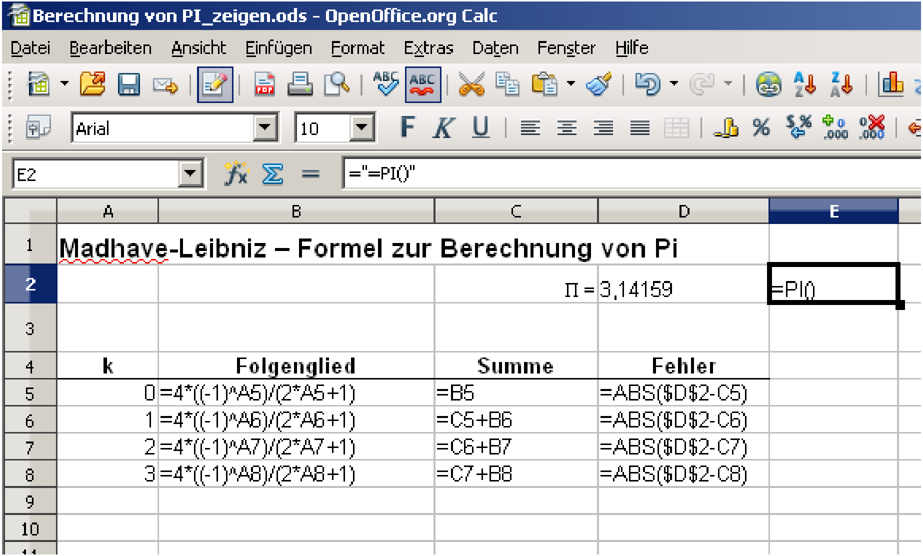

Beispiel.ods - OpenOffice.org Calc
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenste
Arial
10
F K U
B6
=3*A6^$C$3
A B C D
Einfaches Beispiel: f(x)=3x^2
2
x=
f(x)=
1 3
2 12
3 27
4 48
5 75
6 108
7 147
Standardformatierung
Zellen formatieren...
Zellen einfügen...
Zellen löschen...
Inhalte löschen...
Notiz einfügen
Ausschneiden
Kopieren
Einfügen
Inhalte einfügen...
Auswahlliste...


Beispiel.ods - OpenOffice.org Calc
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe
Arial
10
B6
=3*A6^$C$3
A B C D E F G H
Einfaches Beispiel: f(x)=3x^2
2
x=
f(x)=
1 3
2 12
3 27
4 48
5 75
6 108
7 147
Zellen formatieren
Zahlen Schrift Schrifteffekt Ausrichtung Umrandung Hintergrund Zellschutz
Kategorie
Alle
Benutzerdefiniert
Zahl
Prozent
Währung
Datum
Zeit
Wissenschaft
Format
Standard
-1234
-1234,12
-1.234
-1.234,12
-1.234,12
Sprache
Standard
3
Optionen
Nachkommastellen 0
Führende Nullen 1
Negativ in Rot
Tausenderpunkt
Format-Code
Standard
OK
Abbrechen
Hilfe
Zurück

Madhave-Leibniz-Formel

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

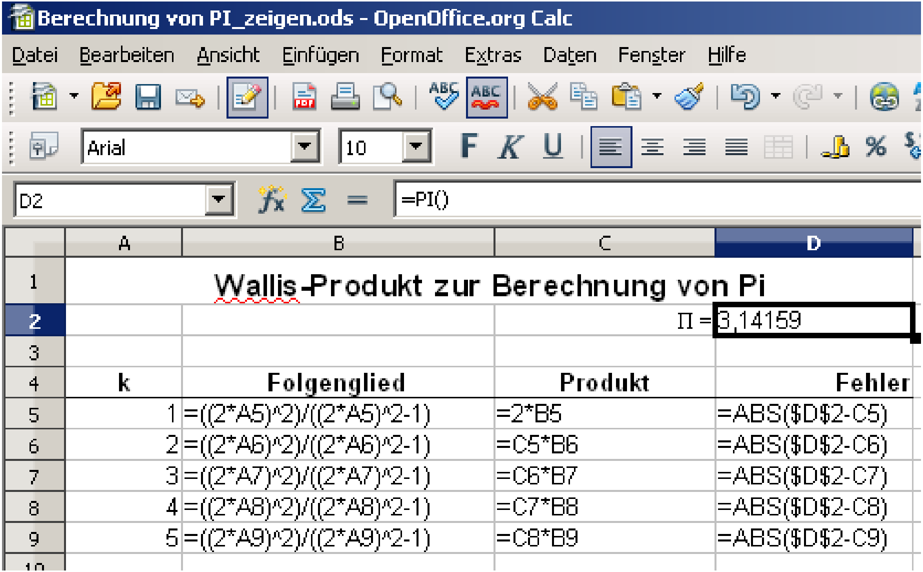
Leibniz Reihe zur Berechnung von π



Wallis Produkt

$$\pi = 2\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - 1}$$

Wallis Produkt zur Berechnung von π



	A	B	C	D
1	Wallis-Produkt zur Berechnung von Pi			
2			Π =	3,14159
3				
4	k	Folgenglied	Produkt	Fehler
5	1	=((2*A5)^2)/((2*A5)^2-1)	=2*B5	=ABS($D$2-C5)
6	2	=((2*A6)^2)/((2*A6)^2-1)	=C5*B6	=ABS($D$2-C6)
7	3	=((2*A7)^2)/((2*A7)^2-1)	=C6*B7	=ABS($D$2-C7)
8	4	=((2*A8)^2)/((2*A8)^2-1)	=C7*B8	=ABS($D$2-C8)
9	5	=((2*A9)^2)/((2*A9)^2-1)	=C8*B9	=ABS($D$2-C9)

Übung: Riemansche ζ-Funktion

Schreiben Sie ein Excel Program, das π mittels der Riemanschen ζ-Funktion für $s = 2$ approximiert:

$$\pi^2 = 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Übung: Bailey-Borwein-Plouffe-Reihe

Schreiben Sie ein Excel Program, das π mittels folgender Bailey-Borwein-Plouffe-Reihe (BBP-Reihe) approximiert:

$$\pi = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{8}{8k+2} + \frac{4}{8k+3} + \frac{4}{8k+4} - \frac{1}{8k+7}\right)$$

Geometrische Reihe

Für die endliche geometrische Reihe gilt folgende Formel

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_0 q^k = \alpha_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q \in \mathbb{R}\backslash\{1\},$$

Für die (unendliche) geometrische Reihe gilt dann für $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0 q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_0 q^k = \lim_{n\to\infty} \alpha_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{\alpha_0}{1-q}$$

Die geometrische Reihe findet zum Beispiel in der Finanzmathematik bei der Rentenberechnung (Barwertberechnung) a

Übung: Eulersche Summenformel

Schreiben Sie ein Excel Program, das die Eulersche Summenformel für $n = 10, 100$ und 200 berechnet:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Außerdem noch

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Fibonacci Reihe

Leonardo von Pisa (Fibonacci) ca. 1200

Vermehrung eines Kaninchenpaares :
"Ein Paar wirft vom 3. Lebensmonat an in jedem weiteren Lebensmonat ein weiteres Kaninchenpaar, ebenso wie alle seine Nachkommen."

Die rekursive Folge wird dann wie folgt beschrieben

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, \\ f_1 &= 2, \\ f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Grenzwert des Quotientens

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi,$$

der gegen den Goldenen Schnitt $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Fibonacci Reihe zur Berechnung des Goldenen Schnittes

D2 =0,5*(1+WURZEL(5))

	A	B	C	D
1				Goldener Schnitt
2				1,6180339887
3				
4	1	1		0,6180339887
5	1	2		0,3819660113
6	2	1,5		0,1180339887
7	3	1,67		0,0486326779
8	5	1,6		0,0180339887
9	8	1,63		0,0069660113
10	13	1,61538		0,0026493734
11	21	1,61905		0,0010136303
12	34	1,61765		0,0003869299
13	55	1,61818		0,0001478294
14	89	1,61798		0,0000564607
15	144	1,61806		0,0000215668
16	233	1,61803		0,0000082377
17	377	1,61804		0,0000031465
18	610	1,61803		0,0000012019
19	987	1,61803		0,0000004591
20	1597	1,61803381		0,0000001753
21	2584	1,61803406		0,0000000670
22	4181	1,61803396		0,0000000256
23	6765	1,61803400		0,0000000098
24	10946	1,61803399		0,0000000037
25	17711	1,61803399		0,0000000014
26	28657	1,61803399		0,0000000005
27	46368	1,61803399		0,0000000002
28	75025	1,61803399		0,0000000001
29	121393	1,61803399		0,0000000000
30	196418	1,61803399		0,0000000000

Übung:

Schreiben Sie ein Excel Program, das folgende Grenzwerte approximiert:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad x \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-n}{n}\right)^n$$

Table of contents

Newton-Raphson Verfahren

Das Newton-Raphson Verfahren ist eine Nullstellensuche für eine Funktion $f \in C^1[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Solange $f(x_k) \neq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Mit dieser Vorschrift erhält man eine angenäherte Lösung x_* für das Problem $f(x) = 0$.

Babylonisches Wurzelziehen oder Heron Verfahren

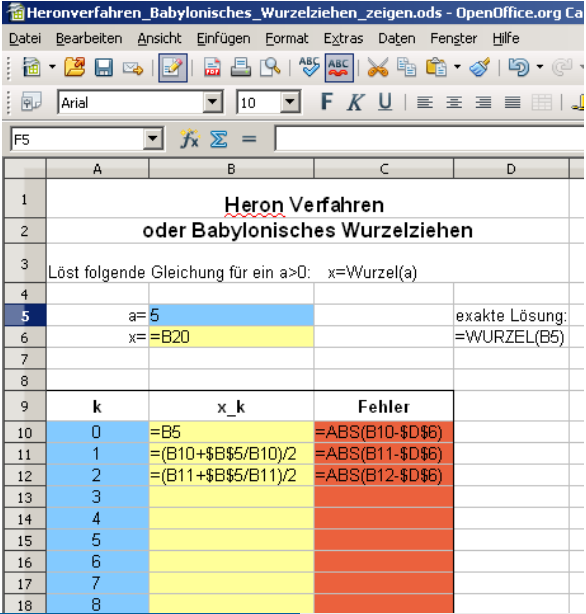
Um die Zahl $x = \sqrt{a}$ für ein beliebiges $a \geq 0$ zu berechnen, benützt man die Funktion

$$f(x) = x^2 - a$$

und verwendet das Newton Verfahren zur Nullstellenbestimmung dieser Funktion. Dann erhält man als Iterationsvorschrift

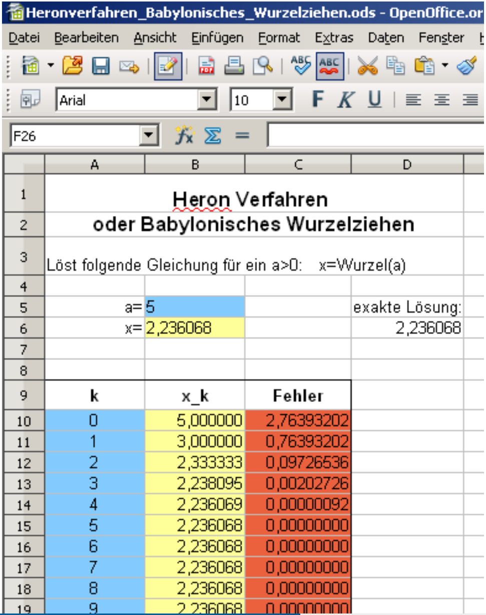
$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right).$$

Babylonisches Wurzelziehen oder Heron Verfahren mit Excel



	A	B	C	D
1	Heron Verfahren			
2	oder Babylonisches Wurzelziehen			
3	Löst folgende Gleichung für ein a>0: x=Wurzel(a)			
4				
5	a=	5		exakte Lösung:
6	x=	=B20		=WURZEL(B5)
7				
8				
9	k	x_k	Fehler	
10	0	=B5	=ABS(B10-$D$6)	
11	1	=(B10+$B$5/B10)/2	=ABS(B11-$D$6)	
12	2	=(B11+$B$5/B11)/2	=ABS(B12-$D$6)	
13	3			
14	4			
15	5			
16	6			
17	7			
18	8			

Babylonisches Wurzelziehen: Ergebnis



Heron Verfahren
oder Babylonisches Wurzelziehen

Löst folgende Gleichung für ein a>0: x=Wurzel(a)

a=	5		exakte Lösung:
x=	2,236068		2,236068

k	x_k	Fehler
0	5,000000	2,76393202
1	3,000000	0,76393202
2	2,333333	0,09726536
3	2,238095	0,00202726
4	2,236069	0,00000092
5	2,236068	0,00000000
6	2,236068	0,00000000
7	2,236068	0,00000000
8	2,236068	0,00000000
9	2,236068	0,00000000

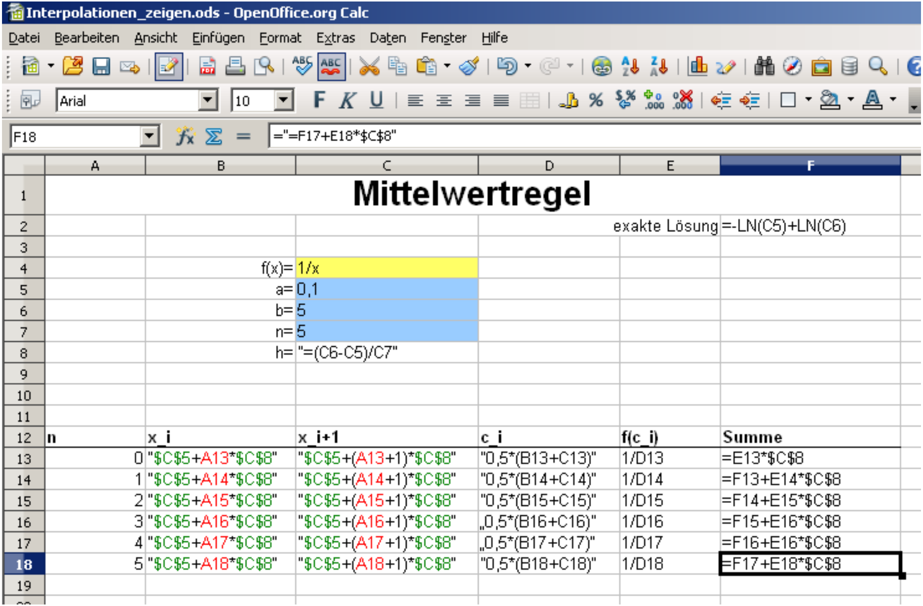
Übung:

Schreiben Sie ein Excel Program, das die Nullstellen folgender Funktionen mit dem Newton Verfahren approximiert:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - x - 2 \quad \text{mit } x_* = 2 \text{ und } x_0 = 1$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^x \text{mit } x_0 = 1$$

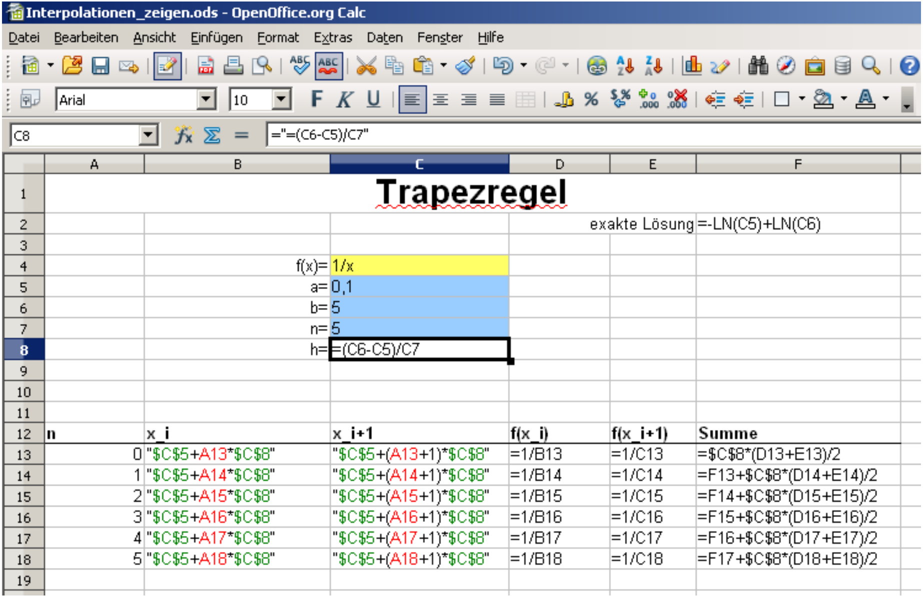
Table of contents

Mittelwertregel von $f(x) = \frac{1}{x}$



	A	B	C	D	E	F
1	Mittelwertregel					
2					exakte Lösung	=-LN(C5)+LN(C6)
3						
4		f(x)=	1/x			
5		a=	0,1			
6		b=	5			
7		n=	5			
8		h=	"=(C6-C5)/C7"			
9						
10						
11						
12	n	x_i	x_i+1	c_i	f(c_i)	Summe
13	0	"$C$5+A13*$C$8"	"$C$5+(A13+1)*$C$8"	"0,5*(B13+C13)"	1/D13	=E13*$C$8
14	1	"$C$5+A14*$C$8"	"$C$5+(A14+1)*$C$8"	"0,5*(B14+C14)"	1/D14	=F13+E14*$C$8
15	2	"$C$5+A15*$C$8"	"$C$5+(A15+1)*$C$8"	"0,5*(B15+C15)"	1/D15	=F14+E15*$C$8
16	3	"$C$5+A16*$C$8"	"$C$5+(A16+1)*$C$8"	„0,5*(B16+C16)"	1/D16	=F15+E16*$C$8
17	4	"$C$5+A17*$C$8"	"$C$5+(A17+1)*$C$8"	„0,5*(B17+C17)"	1/D17	=F16+E16*$C$8
18	5	"$C$5+A18*$C$8"	"$C$5+(A18+1)*$C$8"	"0,5*(B18+C18)"	1/D18	=F17+E18*$C$8
19						

Trapezregel von $f(x) = \frac{1}{x}$



	A	B	C	D	E	F
1			Trapezregel			
2					exakte Lösung	=-LN(C5)+LN(C6)
3						
4		f(x)=	1/x			
5		a=	0,1			
6		b=	5			
7		n=	5			
8		h=	=(C6-C5)/C7			
9						
10						
11						
12	**n**	**x_i**	**x_i+1**	**f(x_i)**	**f(x_i+1)**	**Summe**
13	0	"$C$5+A13*$C$8"	"$C$5+(A13+1)*$C$8"	=1/B13	=1/C13	=$C$8*(D13+E13)/2
14	1	"$C$5+A14*$C$8"	"$C$5+(A14+1)*$C$8"	=1/B14	=1/C14	=F13+$C$8*(D14+E14)/2
15	2	"$C$5+A15*$C$8"	"$C$5+(A15+1)*$C$8"	=1/B15	=1/C15	=F14+$C$8*(D15+E15)/2
16	3	"$C$5+A16*$C$8"	"$C$5+(A16+1)*$C$8"	=1/B16	=1/C16	=F15+$C$8*(D16+E16)/2
17	4	"$C$5+A17*$C$8"	"$C$5+(A17+1)*$C$8"	=1/B17	=1/C17	=F16+$C$8*(D17+E17)/2
18	5	"$C$5+A18*$C$8"	"$C$5+(A18+1)*$C$8"	=1/B18	=1/C18	=F17+$C$8*(D18+E18)/2
19						

Simpsonsregel von $f(x) = \frac{1}{x}$

Interpolationen_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

Arial 10

G39

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						**Simpsonsregel**				
2					exakte Lösung =	=-LN(C5)+LN(C6)				
3										
4		f(x)=	1/x							
5		a=	0,1							
6		b=	5							
7		n=	5							
8		h=	0,980							
9										
10										
11										
12	n	x_i	x_i+1	c_i	f(c_i)	Summe Mittelwert	f(x_i)	f(x_i+1)	Summe Trapezregel	Simpsonsregel
13	0	"$C$5+A13*$C$8"	"$C$5+(A13+1)*$C$8"	"0,5*(B13+C13)"	=1/D13	=E13*$C$8	=1/B13	=1/C13	=$C$8*(G13+H13)/2	=(2*F13+I13)/3
14	1	"$C$5+A14*$C$8"	"$C$5+(A14+1)*$C$8"	"0,5*(B14+C14)"	=1/D14	=F13+E14*$C$8	=1/B14	=1/C14	=I13+$C$8*(G14+H14)/2	=(2*F14+I14)/3
15	2	"$C$5+A15*$C$8"	"$C$5+(A15+1)*$C$8"	"0,5*(B15+C15)"	=1/D15	=F14+E15*$C$8	=1/B15	=1/C15	=I14+$C$8*(G15+H15)/2	=(2*F15+I15)/3
16	3	"$C$5+A16*$C$8"	"$C$5+(A16+1)*$C$8"	„0,5*(B16+C16)"	=1/D16	=F15+E16*$C$8	=1/B16	=1/C16	=I15+$C$8*(G16+H16)/2	=(2*F16+I16)/3
17	4	"$C$5+A17*$C$8"	"$C$5+(A17+1)*$C$8"	„0,5*(B17+C17)"	=1/D17	=F16+E16*$C$8	=1/B17	=1/C17	=I16+$C$8*(G17+H17)/2	=(2*F17+I17)/3
18	5	"$C$5+A18*$C$8"	"$C$5+(A18+1)*$C$8"	"0,5*(B18+C18)"	=1/D18	=F17+E18*$C$8	=1/B18	=1/C18	=I17+$C$8*(G18+H18)/2	=(2*F18+I18)/3
19										
20										

Übung

Schreiben Sie ein Excel Program, das die Integrale folgender Funktionen auf dem Intervall $[-2, 2]$ mit $n = 10$ und $n = 100$ numerisch berechnet:

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f_3(x) = \cos(x^2)$$

Die Exakte Lösung muss nicht ausgerechnet werden!

Informationen: www.mathematik.uni-trier.de/ gross/
grossb@uni-trier.de

Unterstützt auch von Nina Weiand, Ada-Lovelace Projekt