

# Eine Einführung zum numerischen Programmieren mit Excel

Bastian Gross

Universität Trier

30. April 2012

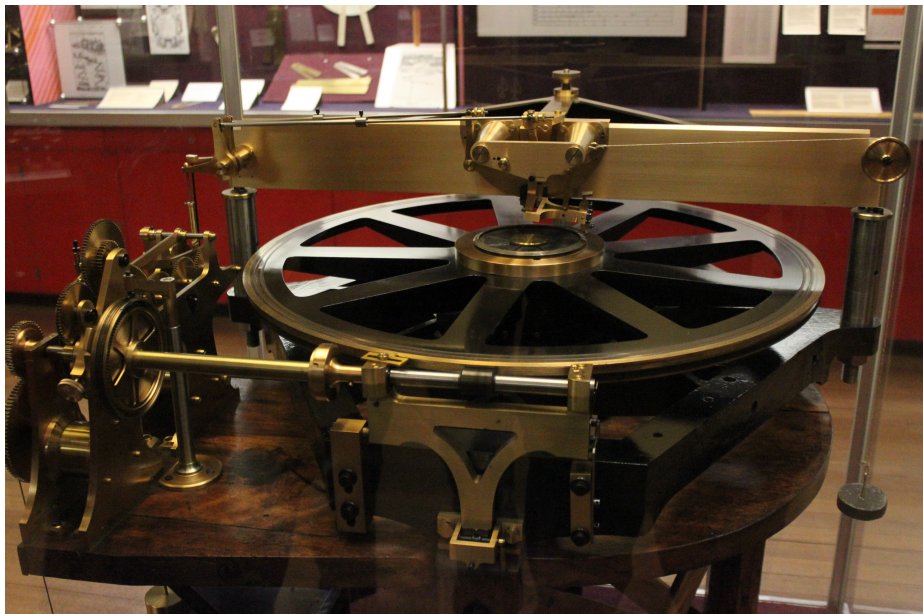


**Universität Trier**

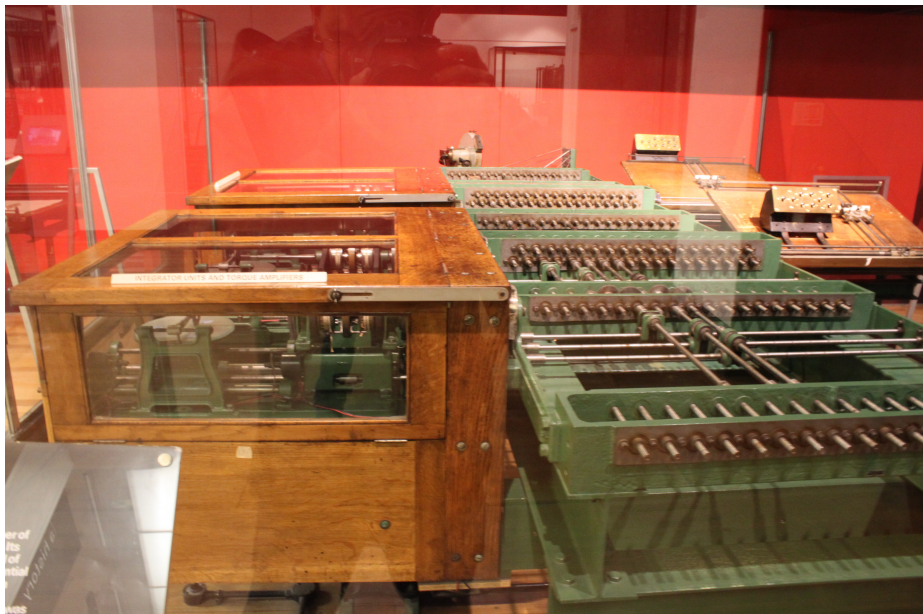
- 1 „Antike“ Numerik
- 2 Einführung
- 3 Berechnung von  $\pi$ 
  - Leibniz Reihe
  - Wallis Produkt
  - Übungen
- 4 Numerische Berechnung von Grenzwerten
  - Geometrische Reihe
  - Fibonacci Zahlen und Goldener Schnitt
- 5 Newton Verfahren
  - Babylonisches Wurzelziehen
- 6 Integralapproximation
  - Mittelwertregel
  - Trapezregel
  - Simpsonsregel
  - Übungen

Die Beispielprogramme sind hier zu finden:  
[www.mathematik.uni-trier.de/~gross](http://www.mathematik.uni-trier.de/~gross)

## Berechnung in alten Zeiten: Divison



## Berechnung in alten Zeiten: Differenzieren und Integrieren



## Berechnung in alten Zeiten: Grundrechenarten



Die Rechenmaschine von Gottfried Wilhelm Leibniz aus dem Science Museum (London UK).


 Beispiel\_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Da



Arial 10 F K U

 E23   =

	A	B	C
1			
2			
3	Einfaches Beispiel: $f(x)=3x^2$		2
4			
5	x=	f(x)=	
6	1	=3*A6^\$C\$3	
7	=A6+1	=3*A7^\$C\$3	
8	=A7+1	=3*A8^\$C\$3	
9	=A8+1	=3*A9^\$C\$3	
10	=A9+1	=3*A10^\$C\$3	
11	=A10+1	=3*A11^\$C\$3	
12	=A11+1	=3*A12^\$C\$3	
13			

Die einzelnen Zellen und damit ihr Inhalt werden mittel der Zeilenzahl und des Spaltenbuchstabes aufgerufen (z.B. D4).

Falls man eine Zeile oder Spalte konstant halten will geschieht dies mit dem Dollarzeichen, \$ (z.B.  $\$D\$4$  oder jeweils  $\$D4$  bzw.  $D\$4$ ).

Formeln in einer Zelle müssen mit eine Gleichheitszeichen, =, beginnen!



## Beispiel\_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Data



	A	B	C
1	<b>Wichtig bei Formeln ist das Gleichheitszeichen</b>		
2			
3	Einfaches Beispiel: $f(x)=3x^2$		2
4			
5	x=	f(x)=	
6	1	=3*A6^\$C\$3	
7	=A6+1	=3*A7^\$C\$3	
8	=A7+1	=3*A8^\$C\$3	
9	=A8+1	=3*A9^\$C\$3	
10	=A9+1	=3*A10^\$C\$3	
11	=A10+1	=3*A11^\$C\$3	
12	=A11+1	=3*A12^\$C\$3	

Funktionen die in den einzelnen Zellen aufgerufen werden können, findet man hier!  
Um sich Zeit beim Eintippen zu sparen kann man mit Hilfe der Maus Zellen „ziehen“.


 Beispiel\_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Da



Arial 10 F K U

E23   =

	A	B	C
1			
2			
3	Einfaches Beispiel: $f(x)=3x^2$		2
4			
5	x=	f(x)=	
6	1	=3*A6^\$C\$3	
7	=A6+1	=3*A7^\$C\$3	
8	=A7+1	=3*A8^\$C\$3	
9	=A8+1	=3*A9^\$C\$3	
10	=A9+1	=3*A10^\$C\$3	
11	=A10+1	=3*A11^\$C\$3	
12	=A11+1	=3*A12^\$C\$3	
13			

## Funktionen


 Beispiel.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras D.



Arial 10 F K U

 C18   =

	A	B	C
1			
2			
3	Einfaches Beispiel: $f(x)=3x^2$		2
4			
5	x=	f(x)=	
6	1	3	
7	2	12	
8	3	27	
9	4	48	
10	5	75	
11	6	108	
12	7	147	
13			

Wenn man die Ausgabe in einer oder mehrerer Zellen formatieren möchte, also zum Beispiel die Anzahl der Nachkommastellen vergrößern will, muss man mit einem Rechtsklick der Maus, nach dem alle gewünschten Zellen markiert sind, auf „Zellen formatieren“ klicken und dann in diesem neuen Fenster das gewünschte einstellen.

## Beispiel.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster



Arial 10 F K U

B6  $=3*A6^{\$}C\$3$ 

	A	B	C	D
1				
2				
3	Einfaches Beispiel: $f(x)=3x^2$		2	
4				
5	x=	f(x)=		
6	1	3		
7	2	12		
8	3	27		
9	4	48		
10	5	75		
11	6	108		
12	7	147		
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				

Standardformatierung

Zellen formatieren...

Zellen einfügen...

Zellen löschen...

Inhalte löschen...

Notiz einfügen

Ausschneiden

Kopieren

Einfügen

Inhalte einfügen...

Auswahlliste...

Beispiel.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

Arial 10 F K U

B6 =3\*A6^\$C\$3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	Einfaches Beispiel: $f(x)=3x^2$		2					
4								
5	x=	f(x)=						
6	1	3						
7	2	12						
8	3	27						
9	4	48						
10	5	75						
11	6	108						
12	7	147						
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								

### Zellen formatieren

**Zahlen** | Schrift | Schrifteffekt | Ausrichtung | Umrandung | Hintergrund | Zellschutz

Kategorie: Zahl | Format: Standard | Sprache: Standard

Optionen: Nachkommastellen: 0 | Führende Nullen: 1 | Negativ in Rot:  | Tausenderpunkt:

Format-Code: Standard

OK | Abbrechen | Hilfe | Zurück

# Madhava-Leibniz-Formel

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$



Leibniz Reihe zur Berechnung von  $\pi$ 

Berechnung von PI\_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

Arial 10 F K U

E2 = "=PI()"

	A	B	C	D	E
1	<u>Madhave-Leibniz – Formel zur Berechnung von Pi</u>				
2			$\Pi = 3,14159$		=PI()
3					
4	<b>k</b>	<b>Folglied</b>	<b>Summe</b>	<b>Fehler</b>	
5	0	$=4*((-1)^{A5})/(2*A5+1)$	=B5	=ABS(\$D\$2-C5)	
6	1	$=4*((-1)^{A6})/(2*A6+1)$	=C5+B6	=ABS(\$D\$2-C6)	
7	2	$=4*((-1)^{A7})/(2*A7+1)$	=C6+B7	=ABS(\$D\$2-C7)	
8	3	$=4*((-1)^{A8})/(2*A8+1)$	=C7+B8	=ABS(\$D\$2-C8)	
9					
10					

# Wallis Produkt

$$\pi = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - 1}$$

Wallis Produkt zur Berechnung von  $\pi$ 

Berechnung von PI\_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

Arial 10 F K U

D2  $\sum$  = =PI()

	A	B	C	D
1	<u>Wallis-Produkt zur Berechnung von Pi</u>			
2				$\Pi = 3,14159$
3				
4	<b>k</b>	<b>Folglied</b>	<b>Produkt</b>	<b>Fehler</b>
5	1	$=((2*A5)^2)/((2*A5)^2-1)$	$=2*B5$	$=ABS($D$2-C5)$
6	2	$=((2*A6)^2)/((2*A6)^2-1)$	$=C5*B6$	$=ABS($D$2-C6)$
7	3	$=((2*A7)^2)/((2*A7)^2-1)$	$=C6*B7$	$=ABS($D$2-C7)$
8	4	$=((2*A8)^2)/((2*A8)^2-1)$	$=C7*B8$	$=ABS($D$2-C8)$
9	5	$=((2*A9)^2)/((2*A9)^2-1)$	$=C8*B9$	$=ABS($D$2-C9)$
10				

## Übung: Riemansche $\zeta$ -Funktion

Schreiben Sie ein Excel Program, das  $\pi$  mittels der Riemanschen  $\zeta$ -Funktion für  $s = 2$  approximiert:

$$\pi^2 = 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

## Übung: Bailey-Borwein-Plouffe-Reihe

Schreiben Sie ein Excel Program, das  $\pi$  mittels folgender Bailey-Borwein-Plouffe-Reihe (BBP-Reihe) approximiert:

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left( \frac{8}{8k+2} + \frac{4}{8k+3} + \frac{4}{8k+4} - \frac{1}{8k+7} \right)$$

# Geometrische Reihe

Für die endliche geometrische Reihe gilt folgende Formel

$$\sum_{k=0}^n \alpha_0 q^k = \alpha_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

Für die (unendliche) geometrische Reihe gilt dann für  $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0 q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_0 q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{\alpha_0}{1 - q}$$

Die geometrische Reihe findet zum Beispiel in der Finanzmathematik bei der Rentenberechnung (Barwertberechnung) a

# Fibonacci Reihe

## Leonardo von Pisa (Fibonacci) ca. 1200

Vermehrung eines Kaninchenpaares :

”Ein Paar wirft vom 3. Lebensmonat an in jedem weiteren Lebensmonat ein weiteres Kaninchenpaar, ebenso wie alle seine Nachkommen.”

Die rekursive Folge wird dann wie folgt beschrieben

$$f_0 = 1,$$

$$f_1 = 2,$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad n \geq 2.$$

Nun betrachten wir den Grenzwert des Quotientens

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi,$$

der gegen den Goldenen Schnitt  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  konvergiert.

## Fibonacci Reihe zur Berechnung des Goldenen Schnittes

D2				
fx Σ = =0,5*(1+WURZEL(5))				
	A	B	C	D
1				Goldener Schnitt
2				1,6180339887
3				
4	1	1		0,6180339887
5	1	2		0,3819660113
6	2	1,5		0,1180339887
7	3	1,67		0,0486326779
8	5	1,6		0,0180339887
9	8	1,63		0,0069660113
10	13	1,61538		0,0026493734
11	21	1,61905		0,0010136303
12	34	1,61765		0,0003869299
13	55	1,61818		0,0001478294
14	89	1,61798		0,0000564607
15	144	1,61806		0,0000215668
16	233	1,61803		0,0000082377
17	377	1,61804		0,0000031465
18	610	1,61803		0,0000012019
19	987	1,61803		0,0000004591
20	1597	1,61803381		0,0000001753
21	2584	1,61803406		0,0000000670
22	4181	1,61803396		0,0000000256
23	6765	1,61803400		0,0000000098
24	10946	1,61803399		0,0000000037
25	17711	1,61803399		0,0000000014
26	28657	1,61803399		0,0000000005
27	46368	1,61803399		0,0000000002
28	75025	1,61803399		0,0000000001
29	121393	1,61803399		0,0000000000
30	196418	1,61803399		0,0000000000



## Übung:

Schreiben Sie ein Excel Program, das folgende Grenzwerte approximiert:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad x \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n}{n}\right)^n$$

# Table of contents

- 1 „Antike“ Numerik
- 2 Einführung
- 3 Berechnung von  $\pi$ 
  - Leibniz Reihe
  - Wallis Produkt
  - Übungen
- 4 Numerische Berechnung von Grenzwerten
  - Geometrische Reihe
  - Fibonacci Zahlen und Goldener Schnitt
- 5 Newton Verfahren
  - Babylonisches Wurzelziehen
- 6 Integralapproximation
  - Mittelwertregel
  - Trapezregel
  - Simpsonsregel
  - Übungen

# Newton-Raphson Verfahren

Das Newton-Raphson Verfahren ist eine Nullstellensuche für eine Funktion  $f \in C^1[a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Solange  $f(x_k) \neq 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Mit dieser Vorschrift erhält man eine angenäherte Lösung  $x_*$  für das Problem  $f(x) = 0$ .

# Babylonisches Wurzelziehen oder Heron Verfahren

Um die Zahl  $x = \sqrt{a}$  für ein beliebiges  $a \geq 0$  zu berechnen, benützt man die Funktion

$$f(x) = x^2 - a$$

und verwendet das Newton Verfahren zur Nullstellenbestimmung dieser Funktion. Dann erhält man als Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{a}{x_k} \right).$$

## Babylonisches Wurzelziehen oder Heron Verfahren mit Excel

Heronverfahren\_Babylonisches\_Wurzelziehen\_zeigen.ods - OpenOffice.org Ca

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

Arial 10 F K U

F5

	A	B	C	D
1	<b>Heron Verfahren</b>			
2	<b>oder Babylonisches Wurzelziehen</b>			
3	Löst folgende Gleichung für ein $a > 0$ : $x = \text{Wurzel}(a)$			
4				
5	a=	5		exakte Lösung:
6	x=	=B20		=WURZEL(B5)
7				
8				
9	<b>k</b>	<b>x_k</b>	<b>Fehler</b>	
10	0	=B5	=ABS(B10-\$D\$6)	
11	1	=(B10+\$B\$5/B10)/2	=ABS(B11-\$D\$6)	
12	2	=(B11+\$B\$5/B11)/2	=ABS(B12-\$D\$6)	
13	3			
14	4			
15	5			
16	6			
17	7			
18	8			

# Babylonisches Wurzelziehen: Ergebnis

Heronverfahren\_Babylonisches\_Wurzelziehen.ods - OpenOffice.or

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster

Arial 10 F K U

F26

	A	B	C	D
1	<b>Heron Verfahren</b>			
2	<b>oder Babylonisches Wurzelziehen</b>			
3	Löst folgende Gleichung für ein $a > 0$ : $x = \text{Wurzel}(a)$			
4				
5	a=	5		exakte Lösung:
6	x=	2,236068		2,236068
7				
8				
9	<b>k</b>	<b>x_k</b>	<b>Fehler</b>	
10	0	5,000000	2,76393202	
11	1	3,000000	0,76393202	
12	2	2,333333	0,09726536	
13	3	2,238095	0,00202726	
14	4	2,236069	0,00000092	
15	5	2,236068	0,00000000	
16	6	2,236068	0,00000000	
17	7	2,236068	0,00000000	
18	8	2,236068	0,00000000	
19	9	2,236068	0,00000000	

# Table of contents

- 1 „Antike“ Numerik
- 2 Einführung
- 3 Berechnung von  $\pi$ 
  - Leibniz Reihe
  - Wallis Produkt
  - Übungen
- 4 Numerische Berechnung von Grenzwerten
  - Geometrische Reihe
  - Fibonacci Zahlen und Goldener Schnitt
- 5 Newton Verfahren
  - Babylonisches Wurzelziehen
- 6 Integralapproximation
  - Mittelwertregel
  - Trapezregel
  - Simpsonsregel
  - Übungen

Mittelwertregel von  $f(x) = \frac{1}{x}$ 

Interpolationen\_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

Arial 10 F K U

F18  $=F17+E18*\$C\$8$

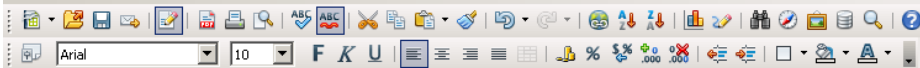
	A	B	C	D	E	F
1	<b>Mittelwertregel</b>					
2					exakte Lösung	$=-LN(C5)+LN(C6)$
3						
4		$f(x) = 1/x$				
5		$a = 0,1$				
6		$b = 5$				
7		$n = 5$				
8		$h = (C6-C5)/C7$				
9						
10						
11						
12	<b>n</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>i+1</sub></b>	<b>c<sub>i</sub></b>	<b>f(c<sub>i</sub>)</b>	<b>Summe</b>
13	0	$0,1$	$0,1$	$0,5 \cdot (B13+C13)$	$1/D13$	$=E13*\$C\$8$
14	1	$0,2$	$0,2$	$0,5 \cdot (B14+C14)$	$1/D14$	$=F13+E14*\$C\$8$
15	2	$0,3$	$0,3$	$0,5 \cdot (B15+C15)$	$1/D15$	$=F14+E15*\$C\$8$
16	3	$0,4$	$0,4$	$0,5 \cdot (B16+C16)$	$1/D16$	$=F15+E16*\$C\$8$
17	4	$0,5$	$0,5$	$0,5 \cdot (B17+C17)$	$1/D17$	$=F16+E16*\$C\$8$
18	5	$0,6$	$0,6$	$0,5 \cdot (B18+C18)$	$1/D18$	$=F17+E18*\$C\$8$
19						



Trapezregel von  $f(x) = \frac{1}{x}$ 

Interpolationen\_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

C8  $\sum$  =  $=(C6-C5)/C7$ 

	A	B	C	D	E	F
1	<u>Trapezregel</u>					
2					exakte Lösung	$=-LN(C5)+LN(C6)$
3						
4			$f(x) = 1/x$			
5			$a = 0,1$			
6			$b = 5$			
7			$n = 5$			
8			$h = (C6-C5)/C7$			
9						
10						
11						
12	<b>n</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>i+1</sub></b>	<b>f(x<sub>i</sub>)</b>	<b>f(x<sub>i+1</sub>)</b>	<b>Summe</b>
13	0	$=(A13+C5)*C8$	$=(A13+1)*C5$	$=1/B13$	$=1/C13$	$=C8*(D13+E13)/2$
14	1	$=(A14+C5)*C8$	$=(A14+1)*C5$	$=1/B14$	$=1/C14$	$=F13+C8*(D14+E14)/2$
15	2	$=(A15+C5)*C8$	$=(A15+1)*C5$	$=1/B15$	$=1/C15$	$=F14+C8*(D15+E15)/2$
16	3	$=(A16+C5)*C8$	$=(A16+1)*C5$	$=1/B16$	$=1/C16$	$=F15+C8*(D16+E16)/2$
17	4	$=(A17+C5)*C8$	$=(A17+1)*C5$	$=1/B17$	$=1/C17$	$=F16+C8*(D17+E17)/2$
18	5	$=(A18+C5)*C8$	$=(A18+1)*C5$	$=1/B18$	$=1/C18$	$=F17+C8*(D18+E18)/2$
19						

# Simpsonsregel von $f(x) = \frac{1}{x}$

Interpolationen\_zeigen.ods - OpenOffice.org Calc

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

Arial 10 F K U

G39

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>Simpsonsregel</b>									
2	exakte Lösung ==LN(C5)+LN(C6)									
3										
4		f(x)= 1/x								
5		a= 0,1								
6		b= 5								
7		n= 5								
8		h= 0,980								
9										
10										
11										
12	<b>n</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>i+1</sub></b>	<b>c<sub>i</sub></b>	<b>f(c<sub>i</sub>)</b>	<b>Summe Mittelwert</b>	<b>f(x<sub>i</sub>)</b>	<b>f(x<sub>i+1</sub>)</b>	<b>Summe Trapezregel</b>	<b>Simpsonsregel</b>
13	0	"=C5+A13*C\$8"	"=C5+(A13+1)*C\$8"	"0,5*(B13+C13)"	=1/D13	=E13*C\$8	=1/B13	=1/C13	=C\$8*(G13+H13)/2	=(2*F13+H13)/3
14	1	"=C5+A14*C\$8"	"=C5+(A14+1)*C\$8"	"0,5*(B14+C14)"	=1/D14	=F13+E14*C\$8	=1/B14	=1/C14	=I13+C\$8*(G14+H14)/2	=(2*F14+H14)/3
15	2	"=C5+A15*C\$8"	"=C5+(A15+1)*C\$8"	"0,5*(B15+C15)"	=1/D15	=F14+E15*C\$8	=1/B15	=1/C15	=I14+C\$8*(G15+H15)/2	=(2*F15+H15)/3
16	3	"=C5+A16*C\$8"	"=C5+(A16+1)*C\$8"	"0,5*(B16+C16)"	=1/D16	=F15+E16*C\$8	=1/B16	=1/C16	=I15+C\$8*(G16+H16)/2	=(2*F16+H16)/3
17	4	"=C5+A17*C\$8"	"=C5+(A17+1)*C\$8"	"0,5*(B17+C17)"	=1/D17	=F16+E17*C\$8	=1/B17	=1/C17	=I16+C\$8*(G17+H17)/2	=(2*F17+H17)/3
18	5	"=C5+A18*C\$8"	"=C5+(A18+1)*C\$8"	"0,5*(B18+C18)"	=1/D18	=F17+E18*C\$8	=1/B18	=1/C18	=I17+C\$8*(G18+H18)/2	=(2*F18+H18)/3
19										
20										

## Übung

Schreiben Sie ein Excel Program, das die Integrale folgender Funktionen auf dem Intervall  $[-2, 2]$  mit  $n = 10$  und  $n = 100$  numerisch berechnet:

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f_3(x) = \cos(x^2)$$

Die Exakte Lösung muss nicht ausgerechnet werden!

Informationen: [www.mathematik.uni-trier.de/~gross/grossb@uni-trier.de](http://www.mathematik.uni-trier.de/~gross/grossb@uni-trier.de)