Numerik für Lehramt(SoSe 2012)

Übungsblatt 6 — Abgabe: Di, 5. Juni 2012, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E4*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 12: (8 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Die Vektoren g_i und v_i seien durch das konjugierte Gradientenverfahren erzeugt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathrm{span}(v_0, ..., v_i) = \mathrm{span}(g_0, ..., g_i) = \mathrm{span}(g_0, Ag_0, ..., A^i g_0) = \mathcal{K}_{i+1}(A, g_0),$$

wobei $\mathrm{span}(x_1, ..., x_n)$ die lineare Hülle der Vektoren $x_1, ..., x_n$ bezeichnet und $\mathcal{K}$ den Krylovraum

$$\mathcal{K}_{i+1}(A, x) := \mathrm{span}(x, Ax, A^2x, ..., A^ix).$$

Aufgabe 13: (3+3+3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, v \in \mathbb{R}^n$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $A^k = 0$ gilt. Die kleinste Zahl k mit $A^k = 0$ heißt der Nilpotenzindex von A.
Beweisen Sie folgende Aussagen für Krylovräume:

i) A sei nilpotent mit Nilpotenzindex $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Krylovräume

$$\mathcal{K}_k(A, x) = \mathcal{K}_{k+m}(A, x) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

ii) A heißt idempotent, falls $A^2 = A$ ist. Jede idempotente Matrix hat nur die Eigenwerte $\lambda = 0$ und/oder $\lambda = 1$.

iii) Für idempotente Matrizen A und zugehörigem Eigenvektor v gilt

$$\mathcal{K}_1(A, v) = \mathcal{K}_m(A, v) \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2.$$