Numerik für Lehramt(SoSe 2012)

Übungsblatt 4 — Abgabe: Di, 15. Mai 2012, bis 8^{30} Uhr, *Kasten E4*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 7: (8 Punkte)

Es seien A und B Matrizen und $|||\cdot|||$ die sogenannte abgeleitete Matrix-Norm

$$|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

i) $|||A||| \geq 0$

ii) $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

iii) $|||\alpha A||| = |\alpha||||A|||$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

iv) $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$

v) $|||Ax||| \leq |||A||||||x||$

vi) $|||AB||| \leq |||A||||||B|||$

Aufgabe 8: (8 Punkte)

Beweisen Sie das Korollar zum Banach Lemma aus der Vorlesung.
Seien dazu $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|||A^{-1}B||| < 1$, $|||\cdot|||$ eine konsistente Matrixnorm. Dann gilt

i) $(A+B)^{-1}$ existiert,

ii) $|||(A+B)^{-1}||| \leq \frac{|||A^{-1}|||}{1-|||A^{-1}B|||}$

ii) $|||(A+B)^{-1} - A^{-1}||| \leq \frac{|||A^{-1}B||||||A^{-1}|||}{1-|||A^{-1}B|||}$

Aufgabe 9: (2+3 Punkte)

Seien $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere Dreiecksmatrizen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) $L_1 \cdot L_2$ ist eine untere Dreiecksmatrix.

ii) Falls L_1 invertierbar ist, so ist auch L_1^{-1} eine untere Dreiecksmatrix.