

Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 5

Abgabe: Di, 22. Mai 2012, bis 16³⁰ Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs

im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 12:

(6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ folgende Äquivalenzen der Matrixnormen gelten

i) $\frac{1}{\sqrt{d}} \| \|A\| \|_{\infty} \leq \| \|A\| \|_2 \leq \sqrt{m} \| \|A\| \|_{\infty},$

ii) $\frac{1}{\sqrt{m}} \| \|A\| \|_1 \leq \| \|A\| \|_2 \leq \sqrt{d} \| \|A\| \|_1.$

Hinweis:

Nutzen Sie dazu Ergebnisse aus der Aufgabe 7.2 ii) der Übung zur Einführung in die Mathematik (WS 11/12 - Frerick, Kalmes).

Aufgabe 13:

(3 Punkte)

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass der Spektralradius $\rho(A)$ keine Matrixnorm ist.

Programmieraufgabe 3:

(12 Punkte)

Programmieren Sie zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Richardson-Iteration in Matlab. Wählen Sie dazu als Relaxationsparameter $\vartheta = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ jeweils mit Startvektor $x_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$.

Berechnen Sie die Verfahren ab, sobald $\|Ax_i - b\|_2 \leq 10^{-6}$ gilt oder die Iterationszahl i größer als 100 ist.

Geben Sie den Relaxationsparameter ϑ , die benötigte Iterationszahl i_{\max} , den Spektralradius $\rho(M_\vartheta)$ und die iterierte Lösung tabellarisch formatiert aus und plotten Sie den Verlauf des Quotientens

$$q_i := \frac{\|e_i\|_2}{\|e_{i-1}\|_2} = \frac{\|x_i - x_*\|_2}{\|x_{i-1} - x_*\|_2}.$$

Die exakte Lösung x_* , sowie die Eigenwerte λ_{\min} und λ_{\max} können Sie hierbei mittels Matlab berechnen. Vergleichen Sie diese Grafik mit dem Ergebnis aus der Aufgabe 11.

Wieviele Iterationen benötigt die Richardson-Iteration in Abhängigkeit vom Relaxationsparameter. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse ausführlich.

Hilfreiche Matlabbefehle: `while`, `and`, `clear`

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie die Ergebnisse (nicht den Quellcode) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.