Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 12 — Abgabe: Di, 17. Juli 2012, bis 16^{30} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs/Wagner — im Foyer des E-Gebäudes

Alle Punkte auf diesem Übungsblatt sind Bonuspunkte!

Aufgabe 26: (10* Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar in einer offenen, konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Ferner existiere ein Nullstelle $x_* \in \mathbb{R}^n$ und Konstanten $r, \beta > 0$ so, dass $N(x_*, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_*|| < r\} \subset D$, $F(x_*) = 0$ und $(F'(x_*))^{-1}$ existiert mit

$$\left\| \left(F'(x_*)\right)^{-1} \right\| \leq \beta.$$

Weiter sei F' Hölder stetig auf Umgebungen $N(x_*, r)$, d.h. für einen Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ und eine Konstante $\gamma > 0$ gelte

$$\left\| F'(x) - F'(y) \right\| \leq \gamma \left\| x - y \right\|^{\alpha} \quad \forall x, y \in N(x_*, r).$$

Zeigen Sie: Dann existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass für alle Startwerte $x_0 \in N(x_*, r)$ die durch das Newton-Verfahren erzeugte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert ist, gegen x_* konvergiert und folgende Fehlerabschätzung

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \beta\gamma \left\| x_k - x_* \right\|^{1+\alpha} \quad k = 0, 1, 2, ...$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass unter den obigen Vorraussetzungen für jedes $x, x + h \in D$ gilt

$$\left\| F(x + h) - F(x) - F'(x)h \right\| \leq \frac{\gamma}{1 + \alpha} \left\| h \right\|^{1+\alpha}$$

und benutzen Sie das Banach-Lemma.

Programmieraufgabe 11: (6*+6* Punkte)

i) Programmieren Sie das eindimensionale Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} - 1$$

Verwenden Sie als Startwerte

$$a)\ x_0 = 2, \quad b)\ x_0 = -1$$

und als Abbruchkriterium $||f(x_k)||_2 \leq 10^{-10}$. Erstellen Sie für jeden Startwert eine Tabelle in einer Textdatei mit den Ergebnissen und **kommentieren diese ausführlich**

$$k \;\Big|\; x_k \;\Big|\; f(x_k) \;\Big|\; |x_k - x_*| \;\Big|\; |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*| \;\Big|\; |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*|^2$$

mit der exakten Nullstelle $x_* = 0$. Plotten Sie die Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$. Was fällt Ihnen dabei auf?

ii) Da $x_* = 0$ aus dem Aufgabenteil i) eine zweifache Nullstelle ist, konvergiert das Newton-Verfahren nur noch q-linear. Programmieren Sie daher das folgende modifizierte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

mit denselben Werten wie im Aufgabenteil i). Erstellen Sie wiederum eine Tabelle in einer Textdatei mit den Ergebnissen und **kommentieren diese ausführlich**. was fällt Ihnen auf?

$$k \;\Big|\; x_k \;\Big|\; f(x_k) \;\Big|\; |x_k - x_*| \;\Big|\; |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*| \;\Big|\; |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*|^2$$

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.