

Numerik (SoSe 2012)

Übungsblatt 11
Groß/Sachs/Wagner

Abgabe: Di, 10. Juli 2012, bis 16³⁰ Uhr, *Kasten E6*
im Foyer des E-Gebäudes

Aufgabe 23:

(6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $u, v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel:

$$A + uv^\top \text{ regulär} \iff 1 + v^\top A^{-1}u =: \sigma \neq 0$$

Darüber hinaus gilt im Falle der Regularität:

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1}uv^\top A^{-1}.$$

Aufgabe 24:

(3 Punkte)

Gegeben sei eine reellwertige Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie: Falls $(x_k)_k$ in einer gegebenen Norm $\|\cdot\|$ q-superlinear gegen x_* konvergiert, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x_*\|} = 1.$$

Wie interpretieren Sie diese Aussage?

Aufgabe 25:

(3 Punkte)

Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2^2 \\ \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Entwickeln und formulieren Sie das mehrdimensionale Newton-Verfahren für die Nullstellensuche des nichtlinearen Gleichungssystems $F(x_1, x_2) = (0, 0)^\top$. Berechnen Sie die erste Iterierte mit dem Startwert $x_0 = (1, 1)^\top$ (per Hand!).

Programmieraufgabe 10:

(10+6* Punkte)

- i) Programmieren Sie das eindimensionale Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Funktionen:

$$\begin{aligned}f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto x^2 - 1 \\f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto x^2 - 2x + 1 \\f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto e^{x-1} - 1\end{aligned}$$

Verwenden Sie als Startwerte

$$a) x_0 = 2, \quad b) x_0 = -4$$

und als Abbruchkriterium $\|f(x_k)\|_2 \leq 10^{-10}$. Erstellen Sie für jeden Startwert und jede Funktion eine Tabelle in einer Textdatei mit den Ergebnissen und **kommentieren diese ausführlich**

$$k \mid x_k \mid f(x_k) \mid |x_k - x_*| \mid |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*| \mid |x_{k+1} - x_*|/|x_k - x_*|^2$$

mit $x_* = 1$. Plotten Sie die Funktionen f_1, f_2, f_3 auf dem Intervall $[-2, 2]$. Was fällt Ihnen dabei auf?

- ii) Programmieren Sie das mehrdimensionale Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie als Startwerte

$$a) x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b) x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad c) x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und als Abbruchkriterium $\|f(x_k)\|_2 \leq 10^{-10}$. Erstellen Sie für jeden Startwert eine Tabelle in einer Textdatei mit den Ergebnissen

$$k \mid x_k = (x_1^k, x_2^k)^\top \mid f(x_k) = (\cos(x_1^k) \cdot \sin(x_2^k), \sin(x_1^k) \cdot \cos(x_2^k))^\top$$

Plotten Sie `[X,Y] = meshgrid(-pi:0.1:pi, -pi:0.1:pi); Z = sin(X).*cos(Y); surf(X,Y,Z)` und **kommentieren sie ausführlich die Ergebnisse**.

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name, Matrikelnummer, Studienfach

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.