

Numerik (SoSe 2011)

Übungsblatt 2
Groß/Schulz

Abgabe: Di, 26. April 2011, bis 8¹⁵ Uhr, Kasten **Numerik**
im 1.OG des E-Gebäudes

Aufgabe 3:

(5 Punkte)

Beweisen Sie:

$O(n)$ und $U(n)$ sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation.

Handelt es sich hierbei sogar um abelsche Gruppen?

Aufgabe 4:

(5 Punkte)

Bestimmen Sie zur Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des \mathbb{R}^3 mit $u_1^T = (1, 1, 1)$, $u_2^T = (1, 1, 0)$ und $u_3^T = (1, 0, 0)$ ausgehend von u_1 eine Orthonormalbasis mit der Methode nach Gram-Schmidt.

Aufgabe 5:

(5 Punkte)

Betrachten Sie die Vektorräume

$$\begin{aligned} V &:= \{\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C_0^\infty[0, T]; \varphi(0) = \varphi(T) = 0\} \\ W &:= \{\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C_0^\infty[0, T]\} \end{aligned}$$

mit (auf beiden Vektorräumen gültigem) Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi) = \int_0^T \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Ferner definieren wir die lineare Abbildung

$$f : V \rightarrow W, \quad \varphi \mapsto \varphi'.$$

Wie sieht die zu f adjungierte Abbildung f^{ad} aus?

Hinweis: Sie dürfen Ihr Schulwissen zur Integralberechnung sowie die partielle Integration voraussetzen und anwenden.

Partielle Integration:

$$\int_a^b (u'(x)v(x))dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Aufgabe 6:

(3+3+2+1 Punkte)

Wenn man Reibungskräfte vernachlässigt, beschreibt die Flugbahn eines Objektes eine Parabel, d.h.:

$$y(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2,$$

wobei s die horizontale Position und y die vertikale Position, also die Höhe, des Objektes beschreibt. Sie beobachten einige Grundschüler beim Kugelstoßen. Beim Stoß eines Schülers durchquert die Kugel die folgenden Punkte (in Meter):

s_i	1	3	4	6
y_i	1	2	2	1

1. Überlegen Sie sich eine geeignete Matrix A und Vektoren x und b , so dass Sie das Problem, die Flugbahn der Kugel zu modellieren als Kleinste-Quadrate-Ausgleichsproblem formulieren können.
2. Lösen Sie das Problem mit der Normalengleichung.
3. Fertigen Sie eine Skizze an.
4. Wo wird der Ball den Boden treffen? Ist die Rechnung exakt oder können Fehler auftreten? Wenn ja, welche?