J. Müller / P. Beise

Wintersemester 2009/2010
09.12.2009

7. Übung Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen

Abgabe: Bis Dienstag, 15.12.2009 um 8:30 Uhr im Kasten 12

H19: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und C^1-berandet und $I = (0,\infty)$. Ferner sei $u := I \times \overline{\Omega}$ von der Form

$$u(t,x) = v(t)w(x) \qquad (t \in I, x \in \overline{\Omega})$$

mit $v \in C^1(I), w \in C^2(\Omega) \cap C_0^1(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

1. Ist u Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $I \times \Omega$, so existieren ein $\lambda < 0$ und ein $D > 0$ mit
$$\big|u(t,x)\big| \leq De^{\lambda t} \qquad (t \in I, x \in \overline{\Omega}).$$
2. Ist u Lösung der Schrödinger-Gleichung auf $I \times \Omega$, so existiert ein $\alpha > 0$ derart, dass $u(\cdot, x)$ $2\pi\alpha$-periodisch für alle $x \in \overline{\Omega}$ ist.

H20: Es sei $T : \ell_1 \to \ell_1$ definiert durch

$$T(x_j) := (x_{j+1}) \qquad (x = (x_j) \in \ell_1)$$

(Shift-Abbildung). Bestimmen Sie $r(T), \sigma(T)$ und $\sigma_p(T)$.

H21: (Volterra-Operator)
Es sei $k \in C(\Delta)$, wobei $\Delta := \{(s,t) : 0 \leq s \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definiert durch

$$T_k f(t) := \int_0^t f(s)k(s,t)ds \qquad (f \in C[0,1], t \in [0,1]).$$

Zeigen Sie:

a) $T_k \in L(C[0,1], C[0,1])$ und $\|T_k\| \leq \|k\|_\infty$.

b) Es ist $T_k^n = T_{k_n}$, wobei $k_n \in C(\Delta)$ rekursiv gegeben ist durch $k_1 := k$ und
$$k_{n+1}(s,t) := \int_s^t k_n(s,u)k(u,t)du \qquad ((s,t) \in \Delta, n \in \mathbb{N}).$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\big|k_n(s,t)\big| \leq \frac{(t-s)^{n-1}\|k\|_\infty^n}{(n-1)!} \qquad ((s,t) \in \Delta).$$

d) $r(T_k) = 0$.