J. Müller / P. Beise Wintersemester 2009/2010
18.11.2009

4. Übung Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen

Abgabe: Bis Dienstag, 24.11.2009 um 8:30 Uhr im Kasten 12

H10: Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.
Ist $X \subset Y$, so schreiben wir $X \hookrightarrow Y$ (X stetig eingebettet in Y), falls $j : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$

$$j(x) := x \qquad (x \in X)$$

stetig ist. Zeigen Sie:

a) Ist X ein Banachraum mit $X \hookrightarrow Y$, $X \neq Y$, so ist X von 1. Kategorie in Y.

b) Ist $1 \leq p \leq q < \infty$, so gilt $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$.

c) Für $p < q$ ist ℓ_p von 1. Kategorie in ℓ_q.

H11: Es seien X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ Normen auf X.
Zeigen Sie

a) Sind $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, \|\cdot\|')$ Banachräume und existiert ein $c > 0$ mit

$$\|x\| \leq c\|x\|' \qquad (x \in X),$$

so sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent.

b) Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C(S)$ wie in H. 7, so sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent.

H12: Es seien $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \sqrt{t^2 + 1/n} \qquad \big(t \in [-1, 1]\big).$$

Überlegen Sie sich, dass $f_n \to |\cdot|$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$ und dass

$$\int_{-1}^{1} |\text{sign} - f_n'|^2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(d. h. $f_n' \to \text{sign}$ in $L_2[-1, 1]$).