J. Müller / P. Beise Wintersemester 2009/2010

11.11.2009

3. Übung Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen

Abgabe: Bis Dienstag, 17.11.2009 um 8:30 Uhr im Kasten 12

H7: Es seien (S, d) ein kompakter metrischer Raum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C(S)$ so, dass gilt:

(i) $\big(C(S), \|\cdot\|\big)$ ist ein Banachraum.

(ii) Für alle $t \in S$ ist $C(S) \ni f \mapsto f(t) \in \mathbb{K}$ stetig.

Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|f\|_\infty \le c\|f\| \qquad \big(f \in C(S)\big).$$

H8: a) Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Beweisen Sie: Abzählbare Schnitte dichter G_δ-Mengen sind wieder dichte G_δ-Mengen.

b) Zeigen Sie: Ist $S_0 \subset S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ abzählbar, so ist

$$A_{S_0} := \Big\{f \in C(S) : \sup_{n\in\mathbb{N}} \big|(s_n f)(z)\big| = \infty \text{ für alle } z \in S_0\Big\}$$

eine dichte G_δ-Menge in $C(S)$.

c) Zeigen Sie auch noch: Für alle $f \in C(S)$ ist

$$\{z \in S : \sup_{n\in\mathbb{N}} \big|(s_n f)(z)\big| = \infty\}$$

eine G_δ-Menge in S. (Hinweis: B.3.2.2)

H9: a) Geben Sie eine Folge (A_n) dichter Mengen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ an mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

b) Überlegen Sie sich, dass dichte G_δ-Mengen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ überabzählbar sind.