L. Frerick/J. Müller

SoSe 2019
19.06.2019

9. Hausübung zur Linearen Algebra

Abgabe: Bis Dienstag, 25.06.2019, 14.00 Uhr, im Kasten 11, E-Gebäude

H25: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt alternierend, falls $A^\top = -A$ gilt. Damit bezeichne $\mathrm{Sym}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der symmetrischen Matrizen und $\mathrm{Alt}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der alternierenden Matrizen. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Sym}(n)$ und $\mathrm{Alt}(n)$ sind Unterräume von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathrm{Sym}(n) \oplus \mathrm{Alt}(n)$.
Hinweis: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top)$.

H26: Es seien V, W Vektorräume über K und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Weiter sei $f : V \to W$ linear. Zeigen Sie:

a) f genau dann f injektiv, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig in W sind.

b) f genau dann f surjektiv, wenn $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von W ist.

c) Im Fall $\dim W = n$ ist f surjektiv genau dann, wenn f injektiv ist.

H27: (Linksshift) Die Abbildung $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$\varphi(x) := (x_2, x_3, \ldots) \qquad (x = (x_1, x_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

Zeigen Sie, dass φ linear ist und untersuchen Sie φ auf Injektivität und Surjektivität. Bestimmen Sie zudem $\ker(\varphi)$.