L. Frerick/J. Müller SoSe 2019
28.05.2019

7. Hausübung zur Linearen Algebra

Abgabe: Bis Dienstag, 04.06.2019, 14.00 Uhr, im Kasten 11, E-Gebäude

H19: Es sei X eine nicht einelementige Menge. Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}^X$ Untervektorräume sind:

a) $\{f \in \mathbb{C}^X : \exists\, C \geq 0 : \forall\, x \in X : |f(x)| \leq C\}$,

b) $\{f \in \mathbb{C}^X : \exists\, x \in X : f(x) = 0\}$.

H20: Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die euklidsche Länge definiert durch

$$|x| := \sqrt{x^\top x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Zeigen Sie: Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, so gilt

a) $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\,x^\top y + |y|^2$.

b) (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) $|x^\top y| \leq |x| \cdot |y|$.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass für $a, b \in \mathbb{R}$

$$|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$$

gilt und wenden Sie diese Ungleichung mit $a = x_j/|x|$ und $b = y_j/|y|$ für $j = 1, \ldots, n$ an.

c) (Dreiecksungleichung) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

H21: Es sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Zeigen Sie, dass M ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist und geben Sie eine Basis von M an.

b) Beweisen Sie, dass durch $\varphi(x+iy) := \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2+y^2 > 0$ ein Gruppenmorphismus $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ mit $\varphi(\mathbb{C}^*) = M \setminus \{0\}$ definiert ist.