L. Frerick/J. Müller SoSe 2019

15.05.2019

5. Hausübung zur Linearen Algebra

Abgabe: Bis Dienstag, 21.05.2019, 14.00 Uhr, im Kasten 11, E-Gebäude

H13: a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Zeigen Sie:

(i) Für $A \in K^{m\times n}$ sind $AA^\top$ und $A^\top A$ symmetrisch.

(ii) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ symmetrisch, so ist AB genau dann symmetrisch ist, wenn A und B vertauschen, also $AB = BA$ gilt.

b) Finden Sie symmetrische Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass AB nicht symmetrisch ist.

H14: Sind K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$, so heißt

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

die Determinante von A. Zeigen Sie:

a) Für $A, B \in K^{2\times 2}$ gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

b) $\det : (\mathrm{GL}_2(K), \cdot) \to (K^*, \cdot)$ ist ein Gruppenmorphismus.

H15: (Orthogonale Gruppe) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathrm{O}_n := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : A^\top = A^{-1}\}.$$

Beweisen Sie:

a) O_n ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) Für $A \in \mathrm{O}_2$ gilt $|\det A| = 1$ und $\mathrm{SO}_2 := \{A \in \mathrm{O}_2 : \det A = 1\}$ ist eine Untergruppe von O_2.

c) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathrm{O}_2 \setminus \mathrm{SO}_2$.