L. Frerick/J. Müller

SoSe 2019
30.04.2019

3. Hausübung zur Linearen Algebra

Abgabe: Bis Dienstag, 07.05.2019, 14.00 Uhr, im Kasten 11, E-Gebäude

H7: Es sei $(S_4, \circ)$ die symmetrische Gruppe der Ordnung 4. Weiter bezeichne $\tau(i,j) \in S_4$ die Transposition, die i und j vertauscht, also $\tau_{i,j}(j) = i$, $\tau_{i,j}(i) = j$ und $\tau_{i,j}(k) = k$ für $k \neq i, j$.

a) Überlegen Sie sich, dass $V_4 := \big\{\mathrm{id},\ \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4},\ \tau_{1,3} \circ \tau_{2,4},\ \tau_{1,4} \circ \tau_{2,3}\big\}$ eine abelsche Untergruppe von S_4 ist.

b) Bestimmen Sie $\langle x \rangle := \langle \{x\} \rangle$ für alle $x \in V_4$.

H8: Es seien $(G, *)$ und $(H, *)$ Gruppen mit neutralen Elementen e_G bzw. e_H, und es sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\varphi(e_G) = e_H$ und $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ für alle $a \in G$.

b) Ist φ bijektiv, so ist φ^{-1} ein Gruppenmorphismus.

H9: Es seien $a \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\varphi : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}^*$ definiert durch $\varphi(m) := a^m$ für $m \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass φ ein Gruppenmorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist und bestimmen Sie den Kern von φ (in Abhängigkeit von a).