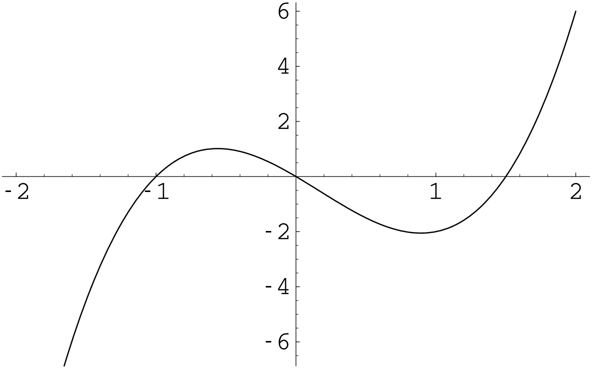
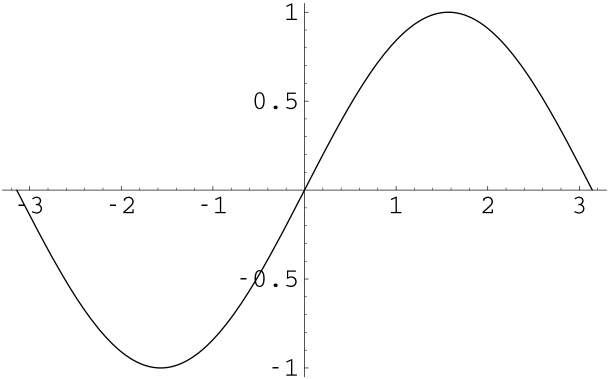
Die Schönen und die Biester

Jürgen Müller

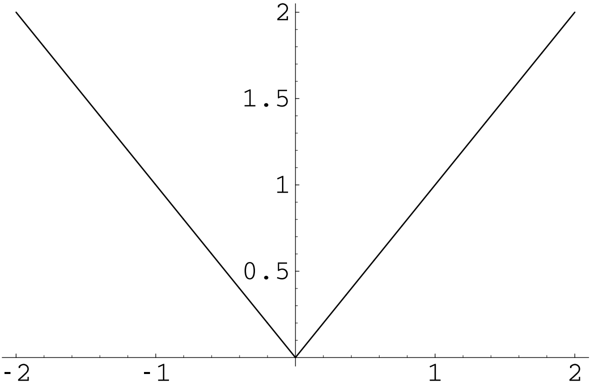
Universität Trier



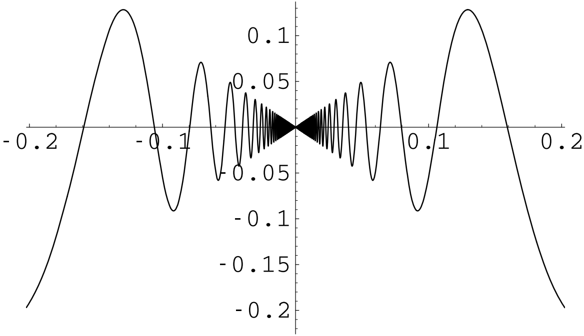
$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$$



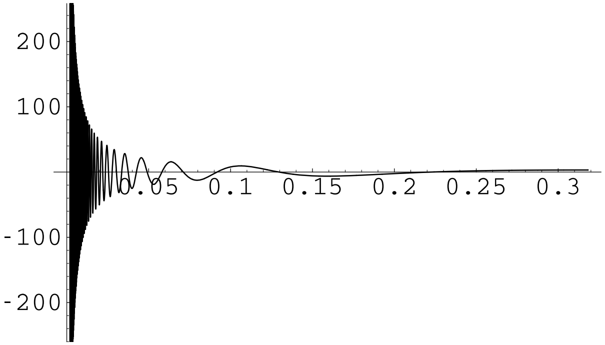
$\sin(x)$



$$f(x) = |x|$$



$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$



$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Weierstrass (1872) :

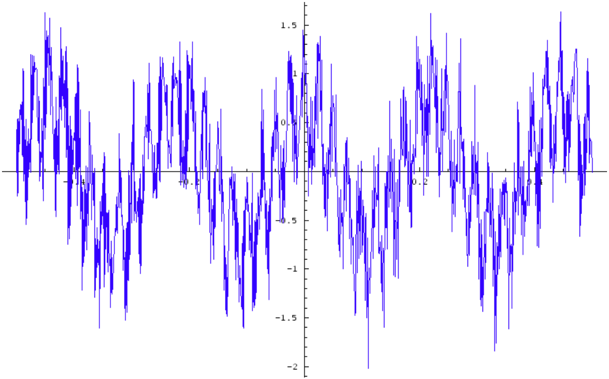
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k \cos(b^k x)$$

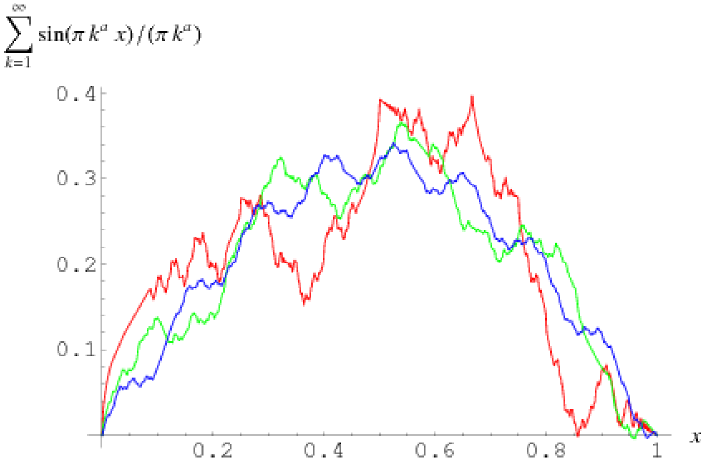
Weierstrass (1872) :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k \cos(b^k x)$$

mit geeigneten a, b

stetig, nirgends differenzierbar


1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-0.4
-0.2
0.2
0.4


$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k^a x) / (\pi k^a)$
0.4
0.3
0.2
0.1
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

Fourier-Reihen: f integrierbar und 2π-periodisch

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots,$

Fourier-Reihen: f integrierbar und 2π-periodisch

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$s_n(x) = (s_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots.$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - |x| \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - |x| \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

Dann ist

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\cos(2\ell+1)x}{(2\ell+1)^2}$$

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

- Dirichlet (1829)

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

- Dirichlet (1829) ☺

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

- Dirichlet (1829) ☺
- Du Bois-Reymond (1876)

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

- Dirichlet (1829) ☺
- Du Bois-Reymond (1876) ☹

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

- Dirichlet (1829) ☺
- Du Bois-Reymond (1876) ☹
- Carleson (1966)

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

- Dirichlet (1829) ☺
- Du Bois-Reymond (1876) ☹
- Carleson (1966) ☺

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

- Dirichlet (1829) ☺
- Du Bois-Reymond (1876) ☹
- Carleson (1966) ☺
- Kahane/Katznelson (1966)

Frage:
f stetig und 2π-periodisch auf $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

für einige/alle x ?

- Dirichlet (1829) ☺
- Du Bois-Reymond (1876) ☹
- Carleson (1966) ☺
- Kahane/Katznelson (1966) ☹

Satz

Es gibt "viele" stetige und 2π-periodische Funktionen f so, dass zu jeder Funktion g eine Folge (n_j) existiert mit

$$g(x) = \lim_{j \to \infty} s_{n_j}(x)$$

für alle rationalen Zahlen $x \in [-\pi, \pi]$.

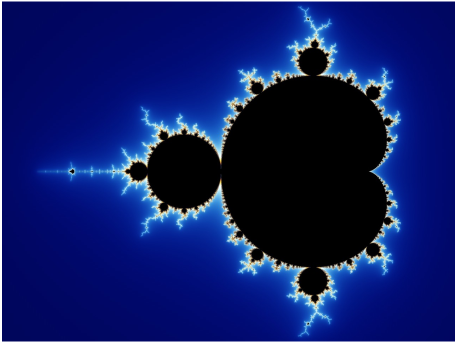
Satz

Es gibt "viele" stetige und 2π-periodische Funktionen f so, dass zu jeder Funktion g eine Folge (n_j) existiert mit

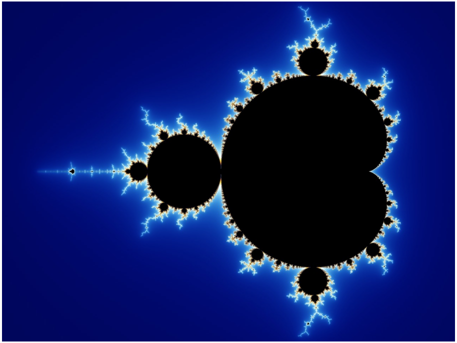
$$g(x) = \lim_{j\to\infty} s_{n_j}(x)$$

für alle rationalen Zahlen $x \in [-\pi, \pi]$.

.... kurz: Es gibt viele stetige Biester! ☹☹



M Mandelbrot-Menge.



M Mandelbrot-Menge.

Frage:

$$\text{Rand von } M = f([-\pi, \pi])$$

für eine stetige, 2π-periodische Funktion? (MLC-Conjecture)