Jürgen Müller

Höhere Funktionentheorie

Skriptum zur Vorlesung
Wintersemester 2019/2020
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen aus der Funktionentheorie

In diesem einleitenden Abschnitt stellen wir zentrale Begriffe und Ergebnisse zusammen, die im Rahmen einer einführenden Funktionentheorie typischerweise behandelt werden. Zunächst einige Bezeichnungen: Für $a, b \in \mathbb{C}$ und $0 \leq \rho \leq \infty$ schreiben wir

$$U_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \rho\}$$

für die offene Kreisscheibe um a mit Radius ρ und

$$B_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq \rho\}, \quad K_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \rho\}$$

für die abgeschlossene Kreisscheibe bzw. den Kreis um a mit Radius ρ. Außerdem schreiben wir kurz $\mathbb{D} := U_1(0)$ und $\mathbb{S} := K_1(0)$. Weiter bezeichnet $[a, b] := s_a^b([0, 1])$, wobei

$$s_a^b(t) := tb + (1 - t)a = a + t(b - a)$$

für $t \in [0, 1]$, die Stecke von a nach b. Ist X eine Menge $f : X \to \mathbb{C}$, so schreiben wir

$$Z(f) := \{a \in X : f(a) = 0\}$$

für die Menge der Nullstellen von f. Ist $w \in \mathbb{C}$ und $a \in Z(f - w)$, also $f(a) = w$, so heißt a eine **w-Stelle** von f.

Bemerkung und Definition 1.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt $f : \Omega \to \mathbb{C}$ **(komplex) differenzierbar an** $a \in \Omega$, falls der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} (f(a + h) - f(a))/h$$

existiert. Man bezeichnet $f'(a)$ als **Ableitung** von f an der Stelle a. Weiter heißt f **differenzierbar**, falls f in jedem Punkt $a \in \Omega$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ **Ableitung** von f. Wie üblich sind höhere Ableitungen rekursiv definiert, also $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ mit $f^{(0)} := f$ im Falle der Existenz.
Ist f' stetig, so nennen wir f **holomorph**[1]. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f \in C^1(\Omega)$, also stetig reell differenzierbar auf Ω ist, und zusätzlich die **Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung**

$$\partial_{(0,1)} f = i \cdot \partial_{(1,0)} f$$

gilt ([Ü]). Schreibt man $\overline{\partial} f := (\partial_{(1,0)} f + i\partial_{(0,1)} f)/2$, so ist $f \in C^1(\Omega)$ genau dann holomorph, wenn $\overline{\partial} f = 0$ gilt. Wir setzen $H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}$.

Bemerkung und Definition 1.2 Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so heißt $f : X \to \mathbb{C}$ **analytisch an** $a \in X$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (c_k) in $\mathbb{C}$ so existieren, dass

$$f(a + h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu h^\nu \qquad (|h| < R)$$

[1] Man findet den Begriff holomorph auch oft als Synonym für komplex differenzierbar, also ohne die Forderung der Stetigkeit von f'. Man kann zeigen, dass die Stetigkeit schon aus der Existenz folgt (Stichwort: Lemma von Goursat)

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar auf $U_R(a) \cap X$ und es gilt

$$c_k = c_k(f, a) := f^{(k)}(a)/k! \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Wieder heißt f kurz **analytisch**, falls f analytisch an jedem Punkt $a \in \Omega$ ist. Wir setzen

$$C^\omega(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ analytisch}\}.$$

Ist f analytisch an a, so nennt man (mit $\min \varnothing := \infty$)

$$n(f, a) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : c_k(f, a) \neq 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die **Ordnung** von f an a. Für $w = f(a)$ gilt $n(f - w, a) > 0$ und $n(f - w, a)$ heißt dann auch **Vielfachheit** der w-Stelle a.

Bemerkung 1.3 Ist f analytisch an der Stelle $a \in X$ und $w = f(a)$, so ist entweder f lokal konstant $= w$ an a oder a ein isolierter Punkt von $Z(f - w)$.

> Denn: Ist $n := n(f - w, a) = \infty$, so ist $c_k(f - w, a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also $f(a + h) - w = 0$ für $|h| < R$. Ist $n < \infty$, so ist (wegen $c_k(f, a) = c_k(f - w, a)$ für $k \in \mathbb{N}$)
>
> $$f(a + h) - w = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu(f, a)h^\nu = h^n g(h)$$
>
> mit $g(h) := \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu+n}(f, a)h^\mu$ für $|h| < R$. Dabei ist $g(0) = c_n(f, a) \neq 0$ und aus Stetigkeitsgründen daher $g(h) \neq 0$ auf einer Umgebung von 0.

Bemerkung und Definition 1.4 Eine Menge $G \subset \mathbb{K}$ heißt **Gebiet**, falls G offen, nichtleer und zusammenhängend ist. Die Definition des Zusammenhangs eines metrischen Raumes und weitere relevante Begriffe und Ergebnisse aus der Topologie finden sich im Anhang A.

Aus Bemerkung 1.3 ergibt sich mit einem „Zusammenhangsargument“

Satz 1.5 (Identitätssatz)
Es seien $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Existiert eine Menge $M \subset G$ mit Häufungspunkt in G und $f|_M = g|_M$, so ist schon $f = g$.

Definition 1.6 Es seien $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $X \subset \mathbb{C}$. Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ stetig differenzierbar, so nennen wir γ einen **Weg** (in X) und $[\alpha, \beta]$ das **Parameterintervall** von γ. Außerdem heißt $\gamma^* := \gamma([\alpha, \beta])$ die **Spur** von γ. Weiter heißen $\gamma(\alpha)$ der **Anfangspunkt** und $\gamma(\beta)$ der **Endpunkt** von γ und der Weg **geschlossen** oder kurz

eine **Schleife**, falls Anfangspunkt und Endpunkt gleich sind. Schließlich heißt der Weg $\gamma_- : [\alpha, \beta] \to X$, definiert durch $\gamma_-(t) := \gamma(\alpha + \beta - t)$ für $t \in [\alpha, \beta]$ **Umkehrweg** von γ.
Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein Weg, so definieren wir für $f \in C(\gamma^*)$ das **Wegintegral** von f längs γ durch

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(\zeta) d\zeta := \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)\gamma' \, .$$

Außerdem nennen wir $L(\gamma) := \int_\alpha^\beta |\gamma'|$ die **Länge** von γ.

Bemerkung 1.7 Es sei γ ein Weg. Aus den entsprechenden Ergebnissen für Regelintegrale ergeben sich die Linearität des Wegintegrals, also die Linearität der Abbildung

$$C(\gamma^*) \ni f \mapsto \int_\gamma f \in \mathbb{C},$$

sowie

$$\int_{\gamma_-} f = -\int_\gamma f.$$

Da $|f|$ stetig und γ^* kompakt ist, existiert $\max_{\gamma^*} |f|$. Damit ergibt sich aus $|f \circ \gamma| \le \max_{\gamma^*} |f|$

$$\Big| \int_\gamma f \Big| \le \int_\alpha^\beta |f \circ \gamma| \cdot |\gamma'| \le L(\gamma) \max_{\gamma^*} |f| \, .$$

Als Konsequenz erhält man: Sind $f_n \in C(\gamma^*)$ für $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig auf γ^* gegen f, so gilt $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ für $n \to \infty$.

Besonders wichtig ist der Fall von Kreisintegralen:

Bemerkung und Definition 1.8 Für $a \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$ definieren wir $k_\rho(a) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$k_\rho(a)(t) := a + \rho e^{it} \qquad (t \in [-\pi, \pi]).$$

Dann ist $(k_\rho(a))^* = K_\rho(a)$ und für $f \in C(K_\rho(a))$

$$\int_{k_\rho(a)} f = \int_{-\pi}^{\pi} f(a + \rho e^{it}) i\rho e^{it} dt.$$

Insbesondere gilt mit $f(\zeta) := 1/(\zeta - a)$

$$\int_{k_\rho(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \int_{-\pi}^{\pi} (\rho e^{it})^{-1} \, i\rho e^{it} \, dt = i \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i$$

für alle $\rho > 0$. Außerdem ist

$$L(k_\rho(a)) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho \, dt = 2\pi\rho.$$

Bemerkung und Definition 1.9 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Für $g \in H(G)$ heißt $f \in H(G)$ eine **Stammfunktion** zu g in G, falls $f' = g$ gilt. Wie im Fall von Intervallen unterscheiden sich Stammfunktionen auf Gebieten lediglich durch eine additive Konstante. Mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung sieht man ([Ü]): Ist f eine Stammfunktion zu g in G, so gilt

$$\int_\gamma g = f(b) - f(a)$$

für alle Wege γ in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b und damit insbesondere $\int_\gamma g = 0$ für alle Schleifen γ in G. Dies deutet an, dass die Existenz einer Stammfunktion eine einschneidende Forderung ist. So hat etwa $g \in H(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ mit $g(z) = 1/(z-a)$ nach Bemerkung 1.8 keine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Mit Differenziation von Parameterintegralen kann man zeigen: Ist G sternförmig, so hat jede Funktion $g \in H(G)$ eine Stammfunktion in G.

Bemerkung und Definition 1.10 Es seien γ ein Weg in $\mathbb{C}$ und $C_\gamma f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$ für $f \in C(\gamma^*)$ definiert durch

$$(C_\gamma f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*)\,.$$

Sind $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ und $R := \operatorname{dist}(z, \gamma^*)$, so gilt

$$(C_\gamma f)(z + h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu h^\nu \qquad (h \in U_R(0))$$

mit

$$c_k = c_k(C_\gamma f, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

$C_\gamma f$ heißt **Cauchyintegral** von f (bezüglich γ). Insbesondere ist $C_\gamma f$ analytisch in $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Satz 1.11 (Cauchysche Integralformel für Kreise)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ist $a \in \Omega$, so gilt für $0 < \rho < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$

$$f 1_{U_\rho(a)}(z) = (C_{k_\rho(a)} f)(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus K_\rho(a)),$$

also insbesondere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in U_\rho(a))\,.$$

Als Folgerungen aus Bemerkung 1.10 und der Cauchyschen Integralformel für Kreise ergeben sich verschiedene Kernaussagen der komplexen Analysis:

Bemerkung 1.12 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gilt $H(\Omega) = C^\omega(\Omega)$ und für $f \in H(\Omega)$ und $a \in \Omega$ ist

$$f(a + h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(f, a)\, h^\nu \qquad (|h| < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)),$$

also der Konvergenzradius der Taylorreihe $\geq \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$.[2] Ist $0 < \rho < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$, so erhält man aus der Cauchyschen Integralformel für $z = a$ die **Mittelwertformel**

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + \rho e^{it})\, dt\,.$$

Weiter ergibt sich wegen $c_k(f, z) = c_k(C_{k_\rho(a)} f, z)$ für $z \in U_\rho(a)$ mit Bemerkung 1.10 die Cauchysche Integralformel für sämtliche Ableitungen von f, also

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{k_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \quad (z \in U_\rho(a),\ k \in \mathbb{N}).$$

Als Konsequenz erhält man die für unsere Betrachtungen zentrale **Cauchysche Ungleichung**: Für $|z - a| \leq r < \rho$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!\rho}{(\rho - r)^{k+1}} \max_{K_\rho(a)} |f| \tag{1.1}$$

und insbesondere für $r = 0$

$$|c_k(f, a)| \leq \rho^{-k} \max_{K_\rho(a)} |f|.$$

Bemerkung und Definition 1.13 Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n : X \to Y$. Dann heißt die Folge (f_n) **lokal gleichmäßig konvergent** (auf X), falls zu jedem $a \in X$ eine Umgebung U von a so existiert, dass $(f_n|_U)$ gleichmäßig auf U konvergiert. Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so gilt $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf X genau dann, wenn (f_n) gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen gegen f konvergiert. Als Anwendung der Cauchyschen Ungleichung ergibt sich: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sind $f_n \in H(\Omega)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so ist $f \in H(\Omega)$, und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf Ω.

Wir betrachten Entwicklungen holomorpher Funktionen auf Kreisringen:

Bemerkung und Definition 1.14 Es seien $0 \leq r < R \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$ und

$$V_{r,R}(a)) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

Für $f \in H(V_{r,R}(a))$ existiert genau ein Tupel $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (c_{k,r,R}(f, a))_{k \in \mathbb{Z}}$ so, dass

$$f(a + h) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu h^\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{-\mu} h^{-\mu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu h^\nu$$

mit lokal gleichmäßiger Konvergenz der beiden Reihen rechts auf $V_{r,R}(0)$. Dabei ist

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta$$

für beliebiges $r < \rho < R$. Man nennt c_k den k-ten **Laurent-Koeffizient** von f und $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu h^\nu$ **Laurent-Reihe** von f auf $V_{r,R}(a)$.

[2]Funktionen $f \in H(\mathbb{C})$ heißen **ganze Funktion**. Insbesondere sind Polynome und exp, sin, cos ganze Funktionen. Bei ganzen Funktionen ist für jedes $a \in \mathbb{C}$ der Konvergenzradius $\operatorname{dist}(a, \varnothing) = \infty$.

Bemerkung und Definition 1.15 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $a \in \Omega$. Ist $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, so heißt a eine **isolierte Singularität** von f. Für $R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ ist mit $c_k(f,a) := c_{k,0,R}(f,a)$

$$f(a+h) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu(f,a) h^\nu$$

auf $V_{0,R}(a) = U_R(0) \setminus \{a\}$. Damit heißt a

1. **hebbare Singularität**, falls $c_{-\mu}(f,a) = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$,[3]

2. **Pol** der **Ordnung** $p \in \mathbb{N}$, falls $c_{-p}(f,a) \neq 0$ und $c_{-\mu}(f,a) = 0$ für alle $\mu > p$. Wir setzen dann $n(f,a) := -p$. Damit ist die Ordnung auch an Polstellen definiert.

3. **wesentliche Singularität**, falls $c_{-\mu}(f,a) \neq 0$ für unendlich viele $\mu \in \mathbb{N}$.

Satz 1.16 (**Riemannscher Hebbarkeitssatz**)
Ist a eine isolierte Singularität von f, so sind äquivalent

a) *f hat an a eine hebbare Singularität.*

b) *f ist durch $f(a) := c_0(f,a)$ zu einer auf einer Umgebung von a holomorphen Funktion f fortsetzbar.*

c) *Es existiert eine Umgebung U von a so, dass f auf $U \setminus \{a\}$ beschränkt ist.*

Bemerkung 1.17 Ist a eine isolierte Singularität von f, so ist a genau dann ein Pol, wenn $|f(z)| \to +\infty$ für $z \to a$ gilt. In diesem Fall sind äquivalent:

a) f hat an a einen Pol der Ordnung p.

b) $1/f$ hat an a eine hebbare Singularität mit Nullstelle der Ordnung p an a.

Aus der Laurent-Entwicklung erhält man auch: Ist f nicht lokal konstant 0 an a, so hat f an a eine hebbare Singularität oder einen Pol genau dann, wenn ein $n \in \mathbb{Z}$ und eine auf einer Umgebung U von 0 holomorphe Funktion g existieren mit $g(0) \neq 0$ und $f(a+h) = h^n g(h)$ für $h \in U \setminus \{0\}$. In disem Fall ist $n = n(f,a)$.

Bemerkung und Definition 1.18 1. Hat f an a eine isolierte Singularität oder ist f analytisch an a, so nennt man $\operatorname{res}(f,a) := c_{-1}(f,a)$ das **Residuum** von f an a. Für $\rho > 0$ genügend klein ist

$$\operatorname{res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_\rho(a)} f\,.$$

Man kann damit zeigen ([Ü]): Hat f an a eine hebbare Singulatität oder einen Pol, so hat f'/f an a eine hebbare Singularität oder einen Pol der Ordnung 1 mit $\operatorname{res}(f'/f, a) = n(f,a)$.

[3] Ist $f \in H(\Omega)$, so hat $f|_{\Omega\setminus\{a\}}$ eine hebbare Singularität an a.

2. Sind $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ mit $B_R(a) \subset \Omega$ und $A \subset U_R(a)$ endlich, so gilt folgende einfache Version eines Residuensatzes: Für $f \in H(\Omega \setminus A)$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k_R(a)} f = \sum_{z \in A} \operatorname{res}(f, z).$$

Satz 1.19 (Rouché)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g \in H(\Omega)$. Sind $a \in \Omega$ und $R > 0$ mit $B_R(a) \subset \Omega$ und $|f - g| < |f| + |g|$ auf $K_R(a)$, so ist

$$\sum_{z \in Z(f) \cap U_R(a)} n(f, z) = \sum_{z \in Z(g) \cap U_R(a)} n(g, z)$$

Mithilfe des Satzes von Rouché kann man zeigen:

Satz 1.20 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Dann gilt*

1. *f ist lokal injektiv an der Stelle $a \in G$ genau dann, wenn $f'(a) \neq 0$ gilt.*
2. *Ist f nicht konstant, so ist f offen*[4].

Bemerkung 1.21 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$ nicht konstant.
1. (**Gebietstreue**) Nach Satz 1.20 ist $f(G)$ offen und aufgrund der Stetigkeit von f auch zusammenhängend, also ebenfalls ein Gebiet.
2. (**Maximumprinzip**) Für alle $a \in G$ und alle $r > 0$ mit $U_r(a) \subset G$ ist $f(U_r(a))$ offen. Also existiert insbesondere ein $w \in f(U_r(a))$ mit $|w| > |f(a)|$. Damit hat $|f|$ kein lokales Maximum an a.

Bemerkung und Definition 1.22 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ist $g \in H(G)$ nullstellenfrei, so heißt $f \in H(G)$ mit $\exp(f) = g$ in G ein **Zweig des Logarithmus** von g in G. Weiter heißt dann für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ die Funktion $\exp(f/m)$ ein **Zweig der m-ten Wurzel** von g in G (man beachte: es gilt $(\exp(f/m)^m = \exp(f) = g)$.
Wir nennen G **einfach zusammenhängend**, falls zu jeder Funktion $g \in H(G)$ eine Stammfunktion in G existiert. Ist dies der Fall, so existieren zu jeder nullstellenfreien Funktion $g \in H(G)$ Zweige des Logarithmus von g in G.

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so heißt jede (relativ) kompakte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ein **Loch** von Ω. Es gilt damit

Satz 1.23 *Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ ohne Löcher sind einfach zusammenhängend.*[5]

[4] Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt $f : X \to Y$ **offen**, falls Bilder offener Mengen offen sind, also $f(U)$ offen ist für alle offenen Mengen $U \subset X$.

[5] Die Umkehrung gilt auch, ist allerdings nicht leicht zu beweisen.

Der Satz ergibt sich als Folgerung aus dem Cauchytheorem, für dessen Formulierung wir weitere Begriffe und Konzepte brauchen:

Bemerkung und Definition 1.24 1. Es seien I eine endliche Menge, $M \subset \mathbb{C}$ und

$$\gamma_\iota : [\alpha_\iota, \beta_\iota] \to M$$

für $\iota \in I$ Wege mit Anfangspunkten a_ι und Endpunkten b_ι. Das Tupel $\gamma := (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ nennen wir eine **Kette** (in M) und $\gamma^* := \bigcup_{\iota \in I} \gamma_\iota^*$ die **Spur** von γ. Falls eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to I$ so existiert, dass für $j = 1, \ldots, n-1$ die Endpunkte $b_{\sigma(j)}$ von $\gamma_{\sigma(j)}$ mit den Anfangspunkten $a_{\sigma(j+1)}$ von $\gamma_{\sigma(j+1)}$ übereinstimmen, so sprechen wir von einem **Pfad** (in M). Wir nennen dann $a_{\sigma(1)}$ **Anfangspunkt** und $b_{\sigma(n)}$ **Endpunkt** von γ. Weiter heißt der Pfad γ **geschlossen**, falls zusätzlich $a_{\sigma(1)} = b_{\sigma(n)}$ gilt (diese Bedingung ist unabhängig von der Wahl von σ).[6] Schließlich setzen wir noch $\gamma_- := ((\gamma_\iota)_-)_{\iota \in I}$.
2. Ist γ eine Kette, so definieren wir für $f \in C(\gamma^*)$

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(\zeta) d\zeta := \sum_{\iota \in I} \int_{\gamma_\iota} f$$

und $L(\gamma) := \sum_{\iota \in I} L(\gamma_\iota)$. Dabei heißt wieder $L(\gamma)$ die **Länge** von γ. Mit Bemerkung 1.7 ergibt sich $\left| \int_\gamma f \right| \leq L(\gamma) \max_{\gamma^*} |f|$.

Satz 1.25 *Sind $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, so existiert eine Stammfunktion zu f in G genau dann, wenn*

$$\int_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade γ in G gilt.

Bemerkung und Definition 1.26 Es seien $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ eine Kette und $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt die Funktion $C_\gamma f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(C_\gamma f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \notin \gamma^*)$$

Cauchyintegral von f bezüglich γ. Dann ist $C_\gamma f = \sum_{\iota \in I} C_{\gamma_\iota} f \in H(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$ und es gilt $(C_\gamma f)(z) \to 0$ für $|z| \to +\infty$.

Bemerkung und Definition 1.27 Eine Kette $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ nennen wir einen **Zyklus**, falls eine Zerlegung $(I_\kappa)_{\kappa \in M}$ von I so existiert, dass $(\gamma_\iota)_{\iota \in I_\kappa}$ für alle $\kappa \in M$ ein geschlossener Pfad ist. Weiter heißt für Zyklen γ und $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$

$$\operatorname{ind}(\gamma, z) := (C_\gamma 1)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

[6] Man beachte dabei, dass für geschlossene Pfade Anfangs- und Endpunkt nicht eindeutig sind – was durchaus natürlich ist.

Index (oder auch **Windungszahl**) von z bezüglich γ. Nach der Cauchyschen Integralformel für Kreise gilt für $a \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$

$$\mathrm{ind}(k_\rho(a), z) = 1_{U_\rho(a)}(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus K_\rho(a)).$$

Allgemeiner gilt: Ist γ ein Zyklus, so ist $\mathrm{ind}(\gamma, \cdot)$ konstant auf jeder Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ und ganzzahlig. Außerdem hat $\mathrm{ind}(\gamma, \cdot)$ den Wert 0 auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.[7]

Definition 1.28 Es sei γ ein Zyklus. Dann heißt

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \mathrm{ind}(\gamma, z) \neq 0\}$$

Inneres von γ und

$$\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \mathrm{ind}(\gamma, z) = 0\}$$

Äußeres von γ. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein Zyklus in Ω, so heißt γ **nullhomolog** in Ω (oder **Ω-nullhomolog**), falls $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathrm{Ext}(\gamma)$ gilt.

Satz 1.29 (Cauchytheorem) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist γ ein Zyklus in Ω, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) γ ist Ω-nullhomolog.

b) Für alle $f \in H(\Omega)$ ist $f \cdot \mathrm{ind}(\gamma, \cdot)|_{\Omega \setminus \gamma^*} = C_\gamma f|_{\Omega \setminus \gamma^*}$

c) Für alle $f \in H(\Omega)$ ist $\int_\gamma f = 0$.

Bemerkung und Definition 1.30 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist γ ein Zyklus in Ω so, dass kein Loch von Ω in $\mathrm{Int}(\gamma)$ liegt, so ist γ in Ω nullhomolog. Damit ergibt sich aus dem Cauchytheorem: Ist G ein Gebiet ohne Löcher, so gilt für alle geschlossenen Pfade γ in G und alle $f \in H(G)$

$$f \cdot \mathrm{ind}(\gamma, \cdot)|_{G \setminus \gamma^*} = C_\gamma f|_{G \setminus \gamma^*} \quad \text{und} \quad \int_\gamma f = 0.$$

Mit Satz 1.25 folgt, dass G einfach zusammenhängend ist.

Als weitere zentrale Folgerung aus dem Cauchytheorem ergibt sich

Satz 1.31 (Residuensatz) *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein Ω-nullhomologer Zyklus. Ist f holomorph in $\Omega \setminus A$ für eine diskrete Menge A in Ω und ist $\gamma^* \cap A = \varnothing$, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f = \sum_{z \in A} \mathrm{ind}(\gamma, z) \cdot \mathrm{res}(f, z)\,. \tag{1.2}$$

[7] Für jede Kompakte Menge in $\mathbb{C}$ hat das Komplement $\mathbb{C} \setminus K$ genau eine unbeschränkte Komponente.

2 Meromorphe Funktionen und sphärische Ableitung

Hat f an einer Stelle a eine hebbare Singularität, so ist f in eindeutiger Weise zu einer an a holomorphen Funktion fortsetzbar. Wir wollen auch Funktionen an Polstellen einen Wert zuordnen. Dazu erweitern wir die komplexen Zahlen um einen Punkt, den wir ∞ nennen, und setzen

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

In Anbetracht der Charakterisierung von Polstellen in Bemerkung 1.17 vereinbaren wir $1/\infty := 0$, $1/0 := \infty$ und $-\infty := \infty$. Ist X eine Menge und $f : X \to \mathbb{C}_\infty$, so schreiben wir wieder $Z(f)$ für die Nullstellenmenge.

Bemerkung und Definition 2.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ **meromorph** (in Ω), falls für alle $a \in \Omega$ eine offene Umgebung U von a so existiert, dass $f|_U$ oder $(1/f)|_U$ holomorph ist.[8] Wir setzen

$$M(\Omega) := M(\Omega, \mathbb{C}_\infty) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty : f \text{ meromorph in } \Omega\}.$$

Für $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ ist damit $f \in M(\Omega)$ genau dann, wenn $1/f \in M(\Omega)$ gilt. Nach Bemerkung 1.17 ist dann f holomorph in $\Omega \backslash P(f)$, wobei $P(f) := Z(1/f)$, und hat genau dann einen Pol an der Stelle $a \in \Omega$, wenn $1/f$ eine Nullstelle endlicher Ordnung an a hat. Mit $n(f, a) := -\infty$ falls f lokal konstant ∞ an a ist, gilt $n(f, a) = -n(1/f, a)$. Ist f um keine Stelle konstant mit Wert 0 oder ∞, so ist $P(f)$ die Polstellenmenge von f, die dann diskret in Ω ist (vgl. Bemerkung 1.3).

Bemerkung und Definition 2.2 Mithilfe der Charakterisierung von hebbaren Singulartitäten bzw. Polstellen in Bemerkung 1.17 sieht man: Sind $f, g \in M(\Omega)$ um keine Stelle lokal konstant mit Wert 0 oder ∞, so sind auch $f + g$ und $f \cdot g \in M(\Omega)$ (und damit auch $f/g = f \cdot (1/g)$) in folgendem Sinne: Die jedenfalls bis auf Polstellen von f und g auf Ω punktweise definierten Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ haben eindeutig bestimmte meromorphe Fortsetzungen auf Ω, die man dann auch mit $f + g$ beziehungsweise $f \cdot g$ bezeichnet.
Wir erweitern die Addition auf $\mathbb{C}$ zu einer Abbildung auf $(\mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty) \setminus \{(\infty, \infty)\}$ durch

$$\infty + w := w + \infty := \infty \quad (w \in \mathbb{C})$$

und die Multiplikation zu einer Abbildung auf $(\mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty) \setminus \{(0, \infty), (\infty, 0)\}$ durch

$$w \cdot \infty = \infty \cdot w := \infty \quad (w \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}).$$

Damit gilt $(f + g)(a) = f(a) + f(g)$ auch für $a \notin P(f) \cap P(g)$ und $(f \cdot g)(a) = f(a)g(a)$ auch für $a \notin (P(f) \cap Z(g)) \cup (P(g) \cap Z(f))$.

[8] Man beachte, dass nach dieser Definition meromorphe Funktionen auch konstant mit Wert ∞ um Punkte a sein können. Meist schließt man den Fall lokal konstanter Funktionen mit Wert ∞ bei der Definition meromorpher Funktionen nicht mit ein. Das hat aus algebraischer Sicht Vorteile (die in diesem Sinne meromorphen Funktionen bilden im Falle eines Gebiets G den Quotientenkörper des Rings der in G holomorphen Funktionen). Für unsere Zwecke erweist sich die erweiterte Definition jedoch als praktischer.

Beispiel 2.3 1. Rationale Funktionen sind meromorph in $\mathbb{C}$.
2. Die Funktionen

$$\tan = \sin \cdot (1/\cos) \qquad \text{und} \qquad \cot = 1/\tan$$

sind meromorph in $\mathbb{C}$. Wegen $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ und $Z(\cos) = \pi(\mathbb{Z}+1/2) = P(1/\cos)$ sind beide als $\mathbb{C}_\infty$-wertige Funktionen sogar punktweise auf $\mathbb{C}$ definiert. Da alle Nullstellen von sin und cos von erster Ordnung sind, hat tan Nullstellen erster Ordnung an den Stellen $k\pi$ und cot an den Stellen $(k+1/2)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Also hat $\cot = 1/\tan$ Pole erster Ordnung an den Stellen $k\pi$ und $\tan = 1/\cot$ Pole erster Ordnung an den Stellen $(k+1/2)\pi$.

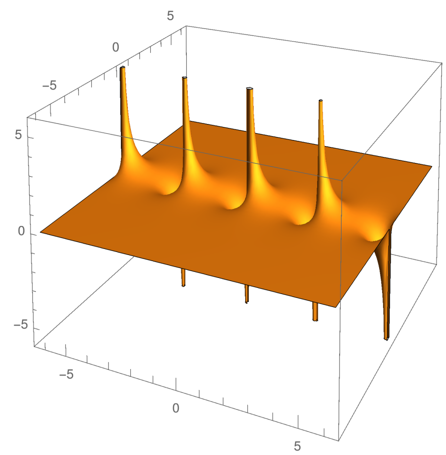

Abbildung 1: Re(cot).

3. Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}_\infty$ definiert durch

$$f(z) = 1/\sin(1/z) \qquad \big(z \in \mathbb{C}^*\big)\ .$$

ist meromorph in $\mathbb{C}^*$ mit $P(f) = Z(1/f) = \{1/(k\pi) : k \in \mathbb{Z}^*\}$.[9]

Bemerkung und Definition 2.4 Wir wollen nun $\mathbb{C}_\infty$ mit einer natürlichen Metrik so versehen, dass meromorphe Funktionen zu stetigen Abbildungen werden. Dazu sei S^2 die Oberfläche der Kugel mit Mittelpunkt $(0,0,1/2)$ und Radius $1/2$ in $(\mathbb{R}^3, ||\cdot||_2)$. Dann ist durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{1+|z|^2}\left(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|^2\right) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ definiert. Geometrisch ergibt sich der Punkt $\varphi(z)$ als der Schnittpunkt der Sphäre S^2 mit der Strecke zwischen den Punkten $(0,0,1)$, also dem „Nordpol" der Sphäre, und dem Punkt $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, 0)$. Mit $\varphi(\infty) := (0,0,1)$ ist $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ bijektiv. Die Umkehrabbildung, genannt **stereographische Projektion**, ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(\xi,\eta,\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\zeta}(\xi + i\eta), & \text{falls } \zeta \neq 1 \\ \infty, & \text{falls } \zeta = 1 \end{cases}$$

[9] Ist R ein Ring, so schreiben wir $R^* := R \setminus \{0\}$.

Durch

$$\chi(z,w) := \|\varphi(z) - \varphi(w)\|_2 \qquad (z, w \in \mathbb{C}_\infty)$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$ definiert. Da $\varphi^{-1} : S^2 \to (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ nach Definition eine Isometrie und damit insbesondere stetig ist, übertragt sich die Kompaktheit von S^2 auf $\mathbb{C}_\infty$. Also ist $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ein *kompakter* metrischer Raum.

Die Metrik χ heißt **chordale Metrik**. Außerdem spricht man dann von der **Riemannschen Sphäre** oder auch der **Riemannschen Zahlenkugel** $\mathbb{C}_\infty$, da man neben der metrischen Struktur nach Bemerkung 2.2 auch eine von $\mathbb{C}$ herkommende (mit passenden Einschränkungen versehene) arithmetische Struktur auf $\mathbb{C}_\infty$ hat. Man kann nachrechnen, dass für $z \in \mathbb{C}$

$$\chi(z,w) = \begin{cases} \frac{|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}, & \text{falls } w \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, & \text{falls } w = \infty \end{cases}$$

gilt. Ist (w_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, so ergibt sich damit $\chi(w_n, \infty) \to 0$ genau dann, wenn $|w_n| \to +\infty$, und $\chi(w_n, w) \to 0$ für $w \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $|w_n - w| \to 0$. Ist also $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ meromorph, so ist f stetig, auch an Polstellen.

Bemerkung und Definition 2.5 Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Dann heißt die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \\ a/c, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

eine **Möbius-Transformation**. Dabei ist $\varphi|_\mathbb{C}$ eine rationale Funktion und $\varphi : (\mathbb{C}_\infty, \chi) \to (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ stetig und bijektiv mit Umkehrfunktion

$$\varphi^{-1}(w) = \begin{cases} \dfrac{dw-b}{a-cw}, & \text{falls } w \in \mathbb{C} \\ -d/c, & \text{falls } w = \infty \end{cases}.$$

Außerdem sieht man leicht, dass Kompositionen von Möbius-Transformationen wieder Möbius-Transformationen sind. Damit die Menge der Möbius-Transformationen eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathbb{C}_\infty$.

Der Schrankensatz zeigt, dass die „Verzerrung" holomorpher Funktionen auf Strecken durch den Betrag der Ableitung abgeschätzt werden kann. Wir wollen nun ein entsprechendes Ergebnis für meromorphe Funktionen herleiten, wobei der Betrag der klassischen Ableitung durch eine passende sphärische Ableitung ersetzt wird.

Bemerkung und Definition 2.6 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in M(\Omega)$. Ist $z \in \Omega$ mit $f(z) \neq \infty$, so setzen wir

$$f^\#(z) := |f'(z)|/(1 + |f(z)|^2)$$

und ist f konstant $= \infty$ um z, so setzen wir $f^{\#}(z) = 0$. Ist a ein Pol der Ordnung p, so folgt aus der Laurent-Entwicklung bezüglich a die Existenz einer Zahl $c \in \mathbb{C}^*$ mit

$$f(a+h)h^p \to c \qquad (h \to 0)$$

und damit

$$(1 + \left|f^2(a+h)\right|)|h|^{2p} \to |c|^2 \qquad (h \to 0).$$

Weiter gilt

$$f'(a+h)h^{p+1} \to -cp \qquad (h \to 0),$$

also insgesamt

$$\frac{\left|f'(a+h)\right|}{1 + \left|f^2(a+h)\right|} \to \begin{cases} 1/|c|, & \text{falls } p = 1 \\ 0, & \text{falls } p > 1 \end{cases} \qquad (h \to 0).$$

Damit hat die für eine Umgebung U von a auf $U \setminus \{a\}$ stetige Funktion $f^{\#}$ an a einen Grenzwert in $[0, \infty)$. Schreibt man für den Grenzwert $f^{\#}(a)$, so ist $f^{\#}(z)$ für alle $z \in \Omega$ definiert. Man nennt $f^{\#}(z)$ die **sphärische Ableitung** von f an z. Nach Definition ist $f^{\#} \in C(\Omega)$ und $f^{\#} \geq 0$.

Beispiel 2.7 Für $f(z) = z$ gilt

$$f^{\#}(z) = \frac{1}{1 + |z|^2} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Bemerkung 2.8 Die klassische Ableitung f' verändert sich nicht, wenn man f eine Translation nachschaltet, das heißt, ist $w \in \mathbb{C}$ und ist $\tau_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von der Form $\tau_w(u) = u + w$, so gilt $(\tau_w \circ f)' = f'$. Das Gleiche gilt im Falle von $|f'|$ für Drehungen $u \mapsto e^{i\theta}u$. Eine entsprechende Eigenschaft kann man für die sphärische Ableitung und geeignete Möbius-Transformationen herleiten. Für $w \in \mathbb{C}$ betrachten wir φ_w mit

$$\varphi_w(u) := \frac{u - w}{1 + u\overline{w}} \qquad (u \in \mathbb{C}).$$

Dann gilt

$$(\varphi_w)'(u) = \frac{1 + |w|^2}{(1 + u\overline{w})^2} \qquad (u \in \mathbb{C} \setminus \{-1/\overline{w}\}).$$

Aus

$$|1 + u\overline{w}|^2 + |u - w|^2 = (1 + |u|^2)(1 + |w|^2)$$

folgt

$$(\varphi_w)^{\#}(u) = \frac{1 + |w|^2}{|1 + u\overline{w}|^2 + |u - w|^2} = \frac{1}{1 + |u|^2} = (\varphi_0)^{\#}(u) \qquad (u \in \mathbb{C}).$$

Für $\varphi_\infty(u) := 1/u$ gilt genauso $(\varphi_\infty)^{\#}(u) = 1/(1 + |u|^2)$.
Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so ergibt sich damit nach der Kettenregel für die sphärische Ableitung ([Ü]) für $w \in \mathbb{C}_\infty$ und $f \in M(\Omega)$

$$(\varphi_w \circ f)^{\#} = f^{\#} \ ,$$

also insbesondere $(1/f)^{\#} = f^{\#}$.

Bemerkung 2.9 Für $t \in \mathbb{R}$ gilt ([Ü])

$$\sin(\arctan(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Damit ergibt sich für $u, w \in \mathbb{C}$ mit $\arctan|\infty| := \pi/2$

$$\sin\big(\arctan|\varphi_w(u)|\big) = \frac{|\varphi_w(u)|}{\sqrt{1+|\varphi_w(u)|^2}} = \frac{|u-w|}{\sqrt{|1+u\overline{w}|^2+|u-w|^2}} = \chi(u,w).$$

Die Gleichheit von linker und rechter Seite gilt auch für $w = \infty$. Also ist mit

$$\sigma(u,w) := \arctan|\varphi_w(u)|$$

insbesondere

$$\chi(u,w) \leq \sigma(u,w) \leq \frac{\pi}{2}\chi(u,w).$$

Tatsächlich definiert σ ebenfalls eine Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$, genannt **sphärische Metrik**, was wir allerdings weder nutzen noch beweisen werden.[10]

Wir zeigen nun, dass durch die sphärische Ableitung $f^\#$ die „Verzerrung“ von f als Abbildung von $\Omega \subset \mathbb{C}$ in die Riemannsche Sphäre $\mathbb{C}_\infty$ abgeschätzt werden kann.

Satz 2.10 (**Sphärischer Schrankensatz**)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in M(\Omega)$. Sind $a \in \Omega$ und $h \in \mathbb{C}^*$ mit $[a, a+h] \subset \Omega$, so ist

$$\chi(f(a+h), f(a)) \leq \max_{[a,a+h]} f^\# \cdot |h|.$$

Beweis. Ist f konstant um eine Stelle $z \in [a, a+h]$, so ist f konstant auf $[a, a+h]$ und damit ist die Behauptung klar. Wir können also voraussetzen, dass f um keine Stelle konstant ist.

1. Zunächst sei f so, dass $f(u) \neq f(a)$ sowie $f(u) \neq -1/\overline{f(a)}$ für alle $u \in (a, a+h]$ gilt. Ist φ_w wie in Bemerkung 2.8, so existiert eine offene Menge $U \supset [0,1]$ so, dass

$$\psi(\zeta) := (\varphi_{f(a)} \circ f)(a+\zeta h),$$

eine auf U holomorphe Funktion definiert mit $\psi(0) = 0$. Außerdem ist ψ nullstellenfrei auf $(0,1)$. Damit ist auch $|\psi| = \sqrt{\psi \cdot \overline{\psi}}$ differenzierbar auf $(0,1)$, und es gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\pm|\psi|' \leq |\psi'|.$$

[10] Der sphärische Abstand $\sigma(u,w)$ entspricht geometrisch der Länge des kleineren Bogens eines Großkreises, auf dem die beiden Urbildpunkte $\varphi(u)$ und $\varphi(w)$ unter der stereographischen Projektion liegen. Sind die beiden Punkte keine Gegenpunkte, so existiert genau ein solcher Großkreis; Gegenpunkte haben stets den sphärischen Abstand $\pi/2$. Wie bei der chordalen Metrik ist $z \mapsto 1/z$ eine Isometrie bzgl. σ.

Also ist $g := \arctan \circ |\psi|$ stetig auf $[0,1]$, differenzierbar auf $(0,1)$, und nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\tau \in (0,1)$ mit

$$\sigma(f(a+h), f(a)) = g(1) = g(1) - g(0) = g'(\tau) = \frac{|\psi|'(\tau)}{1+|\psi|^2(\tau)} \leq \psi^\#(\tau).$$

Weiter ist nach Bemerkung 2.8 und der Kettenregel

$$\psi^\#(\tau) = (\varphi_{f(a)} \circ f)^\#(a+\tau h) \cdot |h| = f^\#(a+\tau h) \cdot |h|,$$

also mit $\xi := a + \tau h$

$$\chi(f(a+h), f(a)) \leq \sigma(f(a+h), f(a)) \leq f^\#(\xi) \cdot |h|.$$

2. Ist nun f beliebig, so existiert zu jedem $b \in [a, a+h]$ eine offene Umgebung U_b so dass $f(u) \neq f(b)$ für $u \in U_b \setminus \{b\}$ und $f(u) \neq -1/\overline{f(b)}$ für $u \in U_b$. Wegen der Kompaktheit von $[a, a+h]$ existiert eine endliche Menge $B \subset [a, a+h]$ mit $[a, a+h] \subset \bigcup_{b \in B} U_b$. Daher gibt es Punkte $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ so, dass mit $a_j := a + s_j h$ für $j = 0, \ldots, n$ die Bedingungen, aus 1., also $f(u) \neq f(a_j)$ und $f(u) \neq -1/\overline{f(a_j)}$ auf $(a_{j-1}, a_j]$, erfüllt sind (beachte: $[a_{j-1}, a_j] = [a_j, a_{j-1}]$). Durch Anwendung von 1. auf die Strecken $[a_{j-1}, a_j]$ ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung für χ die Behauptung (man beachte dabei, dass $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j - a_{j-1}| = |h|$ gilt). □

Definition 2.11 Es seien (X, d_X) und (S, d) metrische Räume und $C(X,S)$ die Menge der stetigen Funktionen von X nach S.
1. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X,S)$ heißt **gleichgradig stetig** an der Stelle $a \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle x mit $d_X(x,a) < \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig an allen $a \in X$, so heißt $\mathcal{F}$ kurz gleichgradig stetig.
2. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so heißt $\mathcal{F} \subset C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{C})$ **(lokal) beschränkt**, falls $\mathcal{F}|_K$ für jede kompakte Teilmenge von Ω beschränkt in $(C(K), \|\cdot\|_{\infty,K})$ ist, also $\sup_{f\in\mathcal{F}} \max_K |f| < \infty$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn zu jedem $a \in \Omega$ ein $R > 0$ so existiert, dass $\mathcal{F}|_{B_r(a)}$ beschränkt in $(C(B_r(a)), \|\cdot\|_{\infty, B_r(a)})$ ist.

Satz 2.12 *Es sei $\mathcal{F} \subset M(\Omega)$. Ist $\mathcal{F}^\# := \{f^\# : f \in \mathcal{F}\} \subset C(\Omega)$ lokal beschränkt, so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$.*

Beweis. Es seien $a \in \Omega$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(a) \subset \Omega$. Dann gilt $c := \sup_{f\in\mathcal{F}} \max\limits_{B_\rho(a)} f^\# < \infty$. Ist $z \in U_\rho(a)$, so ergibt sich für $f \in \mathcal{F}$ mit dem sphärischen Schrankensatz

$$\chi(f(z), f(a)) \leq \max_{[a,z]} f^\# \cdot |z-a| \leq c|z-a|.$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig an a. □

3 Normale Familien

Wir untersuchen in diesem Abschnitt Kompaktheitseigenschaften von Familien holomorpher bzw. meromorpher Funktionen. Wir starten mit einer einfachen Version des Satzes von Arzelà-Ascoli.

Definition 3.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $a \in X$ und $\rho > 0$ schreiben wir wieder $U_\rho(a) := U_{\rho,X}(a) := \{x \in X : d(x, a) < \rho\}$. Eine Menge $M \subset X$ heißt

1. **relativ kompakt**, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt,
2. **folgenkompakt** (für uns kurz **kompakt**), falls M relativ kompakt und abgeschlossen ist.[11]
3. **präkompakt** oder auch **total beschränkt**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliche Menge $E \subset X$ (oder äquivalent $E \subset M$; [Ü]) so existiert, dass $M \subset \bigcup_{x\in E} U_\varepsilon(x)$ gilt.

Bemerkung 3.2 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt ([Ü] bzw. Analysis)
1. M ist relativ kompakt genau dann, wenn $\overline{M}$ kompakt ist.
2. Ist M relativ kompakt, so ist M auch präkompakt.
3. M ist genau dann kompakt, wenn M **überdeckungskompakt** ist, also für jede Familie offener Mengen $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ mit $M \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ eine endliche Menge $E \subset I$ existiert mit $M \subset \bigcup_{\alpha\in E} U_\alpha$.

Satz 3.3 *Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und ist $M \subset X$ präkompakt, so ist M schon relativ kompakt.*

Beweis. Es sei (x_n) eine Folge in M. Da $M_0 := M$ präkompakt ist, existiert ein $E_1 \subset X$ endlich mit

$$M_0 \subset \bigcup_{a\in E_1} U_{1/2}(a).$$

Da E_1 endlich ist, existiert ein $a_1 \in E_1$ so, dass ∞ viele Folgenglieder von (x_n) in

$$M_1 := U_{1/2}(a_1) \cap M_0$$

liegen (d. h. $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in E_1\}$ ist unendlich). Außerdem ist $\operatorname{diam}(M_1) < 1$. Da $M_1 \subset M_0$ präkompakt ist, existiert $E_2 \subset X$ endlich mit

$$M_1 \subset \bigcup_{a\in E_2} U_{1/4}(a).$$

[11] Äquivalent dazu ist, dass jede Folge in M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Wieder existiert ein $a_2 \in E_2$ so, dass unendlich viele Folgenglieder von (x_n) in

$$M_2 := U_{1/4}(a_2) \cap M_1$$

liegen. Dabei ist $\operatorname{diam}(M_2) < 1/2$. Induktiv erhält man auf diese Weise eine Folge (M_j) von Mengen mit $M_j \subset M_{j-1}$ und $\operatorname{diam}(M_j) < 1/j$ so, dass jedes M_j unendlich viele Folgenglieder von (x_n) enthält. Setzt man $n_0 := 1$ und wählt für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $n_j > n_{j-1}$ mit $x_{n_j} \in M_j$, so ist (x_{n_j}) eine Cauchy-Folge in X. Da (X, d) vollständig ist, ist (x_{n_j}) konvergent. □

Es sei (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist für kompakte metrische Räume (K, d_K) auf $C(K, S)$ durch

$$d_\infty(f, g) := d_{\infty,K}(f, g) := \max_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

eine vollständige Metrik definiert (siehe Analysis). Konvergenz einer Folge bezüglich d_∞ bedeutet gleichmäßige Konvergenz. Im Fall $S = \mathbb{C}$ ist

$$d_\infty(f, g) = \max_K |f - g| = \|f - g\|_{\infty,K}.$$

Satz 3.4 (**Arzelà-Ascoli**)
Es seien (K, d_K) und (S, d) kompakte metrische Räume. Ist $\mathcal{F} \subset C(K, S)$ gleichgradig stetig, so ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.

Beweis. Nach Satz 3.3 reicht es, zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist präkompakt. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $a \in K$ existiert ein $\delta_a = \delta_{a,\varepsilon} > 0$ mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle x mit $d_K(x, a) < \delta_a$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Da K kompakt und $(U_{\delta_a})_{a \in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, existiert eine endliche Teilmenge E von K mit

$$K = \bigcup_{a \in E} U_{\delta_a}(a).$$

Da (S, d) kompakt ist, ist auch $(C(E, S), d_\infty) = (\operatorname{Abb}(E, S), d_\infty)$ kompakt. Also ist $\mathcal{F}|_E$ präkompakt (da relativ kompakt), das heißt, für eine endliche Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ gilt

$$\mathcal{F}|_E \subset \bigcup_{g \in \mathcal{E}} U_{\varepsilon, C(E,S)}(g|_E)\ .$$

Es sei $f \in \mathcal{F}$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{E}$ mit $f|_E \in U_{\varepsilon, C(E,S)}(g|_E)$. Ist $x \in K$ beliebig, so ist $x \in U_{\delta_a}(a)$ für ein $a \in E$. Für dieses a gilt

$$d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d\big(g(x), g(a)\big) < \varepsilon,$$

also

$$d\big(f(x), g(x)\big) \le d\big(f(x), f(a)\big) + d\big(f(a), g(a)\big) + d\big(g(a), g(x)\big) < 3\varepsilon.$$

Folglich ist $d_\infty(f, g) < 3\varepsilon$ und damit $\mathcal{F} \subset \bigcup_{g \in \mathcal{E}} U_{3\varepsilon, C(K,S)}(g)$. □

Bemerkung 3.5 Man kann (im Fall beliebiger vollständiger Räume (S, d)) zeigen, dass gleichgradige Stetigkeit notwendig für relative Kompaktheit in $(C(K, S), d_\infty)$ ist ([Ü]).

Wir wollen im Weiteren wieder Funktionen auf offenen Mengen in $\mathbb{C}$ untersuchen.

Bemerkung und Definition 3.6 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.
1. Für

$$K_m := K_m(\Omega) := B_m(0) \cap \{z \in \Omega : \text{dist}\,(z, \partial\Omega) \geq 1/m\}.$$

gilt

- $K_m \subset \Omega$ ist kompakt mit $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$ für $m \in \mathbb{N}$.
- Für alle $K \subset \Omega$ kompakt ist $K \subset K_m$ für m genügend groß.

Wir nennen $(K_m) = (K_m(\Omega))$ die **Standardausschöpfung** von Ω.
2. Ist (S, d) ein vollständiger metrischer Raum, so definieren wir $f, g \in C(\Omega, S)$

$$d_{\text{loc}}(f, g) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \min\{1/m, d_{\infty, K_m}(f, g)\} \quad (\leq 1)$$

mit $d_{\infty,\emptyset}(f, g) := 0$. Man kann leicht nachrechnen, dass d_{loc} eine Metrik auf $C(\Omega, S)$ ist. Im Weiteren soll stets $C(\Omega, S)$ mit dieser Metrik versehen sein.

Satz 3.7 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt*

1. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(\Omega, S)$ ist genau dann d_{loc}-konvergent, wenn sie lokal gleichmäßig auf Ω konvergiert.*
2. *Der metrische Raum $(C(\Omega, S), d_{\text{loc}})$ ist vollständig.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$: Gilt $f_n \to f$ in $(C(\Omega, S), d_{\text{loc}})$ und ist $K \subset \Omega$ kompakt, so wählen wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_m$. Dann folgt

$$\min\{1/m, d_{\infty,K_m}(f, f_n)\} \leq d_{\text{loc}}(f_n, f) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also auch

$$d_{\infty,K_m}(f, f_n) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

und damit

$$d_{\infty,K}(f, f_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

$\Leftarrow$: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/m_\varepsilon < \varepsilon$. Also ist

$$\sup_{m \geq m_\varepsilon} \min\left\{\frac{1}{m}, d_{\infty,K_m}(f, f_n)\right\} \leq \frac{1}{m_\varepsilon} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Weiter existiert ein $R_\varepsilon > 0$ mit

$$d_{\infty,K_{m_\varepsilon}}(f, f_n) < \varepsilon \qquad (n > R_\varepsilon).$$

Damit ist auch

$$\max_{1\le m\le m_\varepsilon} \min\{1/m, d_{\infty,K_m}(f, f_n)\} < \varepsilon$$

für $n > R_\varepsilon$, also auch $d_{\mathrm{loc}}(f, f_n) < \varepsilon$ für $n > R_\varepsilon$.
2. Die Überlegungen aus 1. zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine d_{loc}-Cauchyfolge ist, wenn $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßige Cauchyfolge auf allen kompakten Teilmengen K von Ω ist. Ist also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine d_{loc}-Cauchyfolge, so existiert für alle kompakten, nichtleeren $K \subset \Omega$ eine stetige Funktion $f_K : K \to S$ mit $f_n \to f_K$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf K. Durch $f(z) := f_K(z)$, falls $z \in K$, ist damit eine Grenzfunktion $f \in C(\Omega, S)$ definiert. □

Bemerkung 3.8 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Aus Bemerkung 1.13 folgt, dass $H(\Omega)$ abgeschlossen in $(C(\Omega,\mathbb{C}), d_{\mathrm{loc}})$ ist. Also ist auch $(H(\Omega), d_{\mathrm{loc}})$ als metrischer Raum vollständig.

Definition 3.9 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega, S)$ heißt **normal**, falls $\mathcal{F}$ relativ kompakt im metrischen Raum $(C(\Omega, S), d_{\mathrm{loc}})$ ist, d. h. falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine lokal gleichäßig konvergente Teilfolge hat. Für $a \in \Omega$ nennen wir $\mathcal{F}$ **normal an** a, falls eine offene Umgebung U von a so existiert, dass $\mathcal{F}|_U$ normal ist. Wie üblich sagen wir, dass $\mathcal{F}$ **lokal normal** ist, falls $\mathcal{F}$ normal an jedem Punkt $a \in \Omega$ ist.

Satz 3.10 (Arzelà-Ascoli, II) *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, (S, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{F} \subset C(\Omega, S)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $\mathcal{F}$ ist normal.

b) $\mathcal{F}$ ist lokal normal.

c) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.

Beweis. a) ⇒ b) ist klar.
b) ⇒ c): Es seien $a \in \Omega$ und U eine offene Umgebung von a so, dass $\mathcal{F}|_U$ normal ist. Sind $\rho > 0$ mit $K := B_\rho(a) \subset U$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$, so existiert eine auf U lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_n)_{n\in I}$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in I}$ auf K gleichmäßig. Also ist $\mathcal{F}|_K$ relativ kompakt in $C(K, S)$. Nach Bemerkung 3.5 ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig an der Stelle a.
c) ⇒ a): Es sei (K_m) die Standardausschöpfung von Ω. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $\mathcal{F}|_{K_m}$ für jedes m relativ kompakt. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$, so ergibt sich mit $I_0 := \mathbb{N}$ induktiv, dass zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n)_{n\in I_m}$ von $(f_n)_{n\in I_{m-1}}$ existiert, die

gleichmäßig auf K_m konvergiert. Definiert man $n_0 := 1$ und wählt $n_j > n_{j-1}$ mit $n_j \in I_j$, so konvergiert die Folge $(f_{n_j})_j$ gleichmäßig auf allen K_m und damit auch gleichmäßig auf allen kompakten Mengen $K \subset \Omega$. $\square$

Im Weiteren werden wir neben Familien in $C(\Omega)$ oft Familien in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ betrachten, wobei die Riemannsche Sphäre $\mathbb{C}_\infty$ mit der chordalen Metrik χ versehen ist. Um Konvergenz in $\mathbb{C}_\infty$ von Konvergenz in $\mathbb{C}$ zu unterscheiden, sprechen wir im ersten Fall auch von **sphärischer Konvergenz** und im zweiten von **Normkonvergenz**. Um Normalität einer Familie in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ von Normalität in $C(\Omega)$ zu unterscheiden, nennen wir entsprechend im ersten Fall die Familie auch **sphärisch normal** und im zweiten **norm-normal**.

Beispiel 3.11 Es sei $f(z) = z$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Familie $\mathcal{F} := \{f + n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty)$ ist (sogar norm-)gleichgradig stetig, also sphärisch normal nach Satz 3.10. Damit hat jede Folge in $\mathcal{F}$ eine sphärisch lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Hier konvergiert $(f + n)_{n \in \mathbb{N}}$ sphärisch lokal gleichmäßig gegen ∞. Die Familie $\mathcal{F}$ ist nicht norm-normal.

Bemerkung 3.12 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Wir schreiben $M \Subset \Omega$, falls M relativ kompakt in Ω ist.[12] Konvergiert eine Folge (f_n) in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ sphärisch lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C(\Omega)$, so existiert zu jeder offenen Menge $U \Subset \Omega$ ein $n_U \in \mathbb{N}$ mit $f_n|_U \in C(U)$ für $n \geq n_U$ und $f_n \to f$ $(n \to \infty,\ n \geq n_U)$ lokal norm-gleichmäßig auf U.

Denn: Ist $M \subset \mathbb{C}$ beschränkt, so ist $\operatorname{dist}_\chi(M, \infty) > 0$ und es existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$|u - w| \leq c \cdot \chi(u, w) \qquad (u, w \in M).$$

Ist $U \Subset \Omega$, so ist $f(U) \Subset \mathbb{C}$, also

$$\delta := \operatorname{dist}_\chi(f(U), \infty) > 0.$$

Wegen $f_n \to f$ sphärisch gleichmäßig auf $\overline{U}$ (nach Bemerkung 1.13) existiert ein $n_U \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{dist}(f_n(U), \infty) \geq \delta/2$ für $n \geq n_U$. Damit gilt $f_n|_U \in C(U)$ für $n \geq n_U$ und $f_n \to f$ lokal norm-gleichmäßig auf U.

Bemerkung 3.13 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und (f_m) eine Folge in $H(\Omega)$ mit $f_m \to f \in H(\Omega)$ lokal gleichmäßig auf Ω. Aus dem Satz von Rouché ergibt sich ([Ü]): Sind $a \in \Omega$, $w \in \mathbb{C}$ und ist f nicht lokal konstant an a, so gilt für alle genügend kleinen $r > 0$

$$\sum_{z \in U_r(a)} n(f_m - w, z) = \sum_{z \in U_r(a)} n(f - w, z)$$

bis auf endliche viele m. Insbesondere folgt daraus: Ist G ein Gebiet und $f \in H(G)$ nicht konstant, so folgt aus $w \in f(G)$ schon $w \in f_m(G)$ bis auf endlich viele m. Die Aussage bezeichnet man als den **Satz von Hurwitz**. Sie ist im Allgemeinen falsch, wenn die Grenzfunktion konstant ist (man betrachte etwa $w = 0$ und f_m konstant $= 1/m$ auf $\mathbb{C}$).

[12] Dies ist genau dann der Fall, wenn $M \subset \Omega$ beschränkt ist mit $\operatorname{dist}(M, \partial\Omega) > 0$.

Wir schreiben

$$H_\infty(\Omega) := \{f \in M(\Omega) : f^{-1}(\{\infty\}) \text{ offen}\}.$$

für die Menge der Funktionen in $M(\Omega)$, die keine Pole haben.

Satz 3.14 *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so sind $M(\Omega)$ und $H_\infty(\Omega)$ abgeschlossen in $(C(\Omega, \mathbb{C}_\infty), d_{\text{loc}})$, also als metrische Räume vollständig.*

Beweis. 1. Es sei (f_n) eine Folge in $M(\Omega)$ mit $f_n \to f$ in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$.
Ist $a \in \Omega$ mit $f(a) \neq \infty$, so existiert eine offene Umgebung V von a mit $f|_V \in C(V)$. Ist $U \Subset V$ eine offene Umgebung von a, so gilt $f_n|_U \in H(U)$ für n genügend groß und $f_n \to f$ lokal norm-gleichmäßig auf U nach Bemerkung 3.12. Also ist $f|_U$ holomorph.
Ist $f(a) = \infty$, so ist $(1/f)(a) = 0$. Aus $f_n \to f$ in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ folgt auch $1/f_n \to 1/f$ in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$, da $w \mapsto 1/w$ eine Isometrie auf $\mathbb{C}_\infty$ ist. Wie oben sieht man, dass $(1/f)|_U \in H(U)$ und damit $f|_U \in M(U)$ für eine Umgebung U von a gilt.
2. Es seien nun $f_n \in H_\infty(\Omega)$ mit $f_n \to f$ in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$. Wir müssen zeigen: Ist $a \in \Omega$ mit $f(a) = \infty$, so ist f konstant (mit Wert ∞) um a. Wie vorher gilt: Es existiert eine offene Umgebung U von a mit $(1/f_n)|_U \in H(U)$ für n genügend groß und $1/f_n \to 1/f$ lokal norm-gleichmäßig auf U. Ohne Einschränkung sei dabei U ein Gebiet. Dann ist entweder $1/f_n$ konstant mit Wert 0 auf U für unendlich viele n oder $1/f_n$ hat für genügend große n keine Nullstellen in U. In beiden Fällen ist $1/f$ konstant mit Wert 0 auf U, im zweiten Fall nach dem Satz von Hurwitz. □

Bemerkung 3.15 Man sieht leicht ([Ü]): Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ lokal normal, so ist $\mathcal{F}$ lokal beschränkt.

Satz 3.16 (**Marty**)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $\mathcal{F} \subset M(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

a) $\mathcal{F}$ ist sphärisch normal.

b) $\mathcal{F}^\#$ ist lokal beschränkt.

Beweis. b) $\Rightarrow$ a): Nach Satz 2.12 ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$. Da $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ kompakt ist, ist $\mathcal{F}$ nach Satz 3.10 sphärisch normal.
a) $\Rightarrow$ b): Die Abbildung $M(\Omega) \ni f \mapsto f^\# \in C(\Omega)$ ist stetig ([Ü]). Ist also $\mathcal{F}$ sphärisch normal, so ist damit $\mathcal{F}^\#$ norm-normal. Nach Bemerkung 3.15 gilt a). □

Beispiel 3.17 Wir betrachten $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H(\mathbb{C}) \subset M(\mathbb{C})$ mit $f_n(z) = z^n$. Dann ist

$$f_n^{\#}(z) = \frac{n|z|^{n-1}}{1+|z|^{2n}} \leq \begin{cases} n|z|^{n-1} & (z \in \mathbb{D}) \\ \dfrac{n}{|z|^{n+1}} & (z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \end{cases} .$$

Insbesondere ist $\mathcal{F}_n^{\#}|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{S}}$ lokal beschränkt. Nach dem Satz von Marty ist $\mathcal{F}|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{S}}$ sphärisch normal. Hier gilt

$$f_n(z) = z^n \to \begin{cases} 0 & \text{lokal norm-gleichmäßig in } \mathbb{D} \\ \infty & \text{sphärisch lokal gleichmäßig in } \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases} .$$

Aus $f_n^{\#}(z) = n/2$ für $z \in \mathbb{S}$ folgt, dass $\mathcal{F}$ an keiner Stelle $z \in \mathbb{S}$ sphärisch normal ist.

Der folgende Satz zeigt, dass in $(H(\Omega), d_{\text{loc}})$ die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß bzw. des Satzes von Heine-Borel gilt.

Satz 3.18 (kleiner Satz von Montel) *Sind $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$, so sind äquivalent:*

a) $\mathcal{F}$ norm-normal.

b) $\mathcal{F}$ lokal norm-normal.

c) $\mathcal{F}$ ist lokal beschränkt.

Beweis. Nach Bemerkung 3.15 reicht es, c) $\Rightarrow$ a) zu zeigen: Ist $\mathcal{F}$ lokal beschränkt, so folgt aus der Cauchyschen Ungleichung (1.1), dass auch $\{f' : f \in \mathcal{F}\}$ lokal beschränkt ist, und damit auch $\mathcal{F}^{\#}$. Nach dem Satz von Marty ist $\mathcal{F}$ sphärisch normal. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$, so konvergiert eine Teilfolge $(f_n)_{n\in I}$ sphärisch lokal gleichmäßig gegen $f \in H_\infty(\Omega)$. Wegen der lokalen Beschränktheit von $\mathcal{F}$ ist $f \in H(\Omega)$ und nach Bemerkung 3.12 konvergiert dann $(f_n)_{n\in I}$ auch lokal norm-gleichmäßig. $\square$

Beispiel 3.19 Ist $\mathcal{F}$ wie in Beispiel 3.17, so ist $\mathcal{F}|_{\mathbb{D}}$ lokal beschränkt, also auch norm-normal.

4 Konforme Abbildungen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt holomorphe Bijektionen zwischen zwei Gebieten. Wir wollen unter anderem zeigen, dass man mithilfe solcher Abbildungen beliebige einfach zusammenhängende (echte) Teilgebiete von $\mathbb{C}$ „konform“ zur Einheitskreisscheibe deformieren kann.

Bemerkung und Definition 4.1 Es seien G und D Gebiete in $\mathbb{C}$.
1. Eine bijektive holomorphe Funktion $\varphi : G \to D$ nennt man auch eine **konforme** Abbildung von G auf D.[13] Nach Satz 1.20 ist φ offen (und damit φ^{-1} stetig) und φ' nullstellenfrei. Nach der Umkehrregel ist $(\varphi^{-1})' = 1/(\varphi' \circ \varphi^{-1})$ und damit auch $\varphi^{-1} : D \to G$ eine konforme Abbildung. Ist $D = G$, so nennen wir φ einen (konformen) **Automorphismus**.
2. Die Gebiete G, D heißen **konform äquivalent**, falls eine konforme Abbildung $\varphi : G \to D$ existiert. Nach 1. und der Kettenregel ist dadurch tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete in $\mathbb{C}$ definiert.

Beispiel 4.2 1. Ist $\theta \in \mathbb{R}$, so beschreibt $\varphi(z) := \varphi_\theta(z) := e^{i\theta} z$ für $z \in \mathbb{C}$ die Drehung um den Winkel θ. Ist $G := U_\rho(0)$ für $0 < \rho \leq \infty$, so ist $\varphi|_G$ ein konformer Automorphismus mit $\varphi(0) = 0$.
2. Es seien $G = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$ und $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Dann ist $\varphi := \exp|_G : G \to D$ eine konforme Abbildung. Die Umkehrabbildung $\log := \varphi^{-1}$ nennt man den **Hauptzweig des Logarithmus**.
3. Die Abbildung $j : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}^*),$$

heißt **Joukowski-Abbildung**. Mit $G := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und $D := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ist $\varphi := j|_G$ eine konforme Abbildung von G nach D ([Ü]).

Spezielle Klassen von Möbius-Transformationen ergeben wichtige konforme Abbildungen von offenen Kreisscheiben oder Halbebenen auf die Einheitskreisscheibe. Wir schreiben $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Satz 4.3 *1. Für $\alpha \in \mathbb{D}$ ist durch*

$$\varphi(z) := \varphi_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definiert mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ und $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$, also

$$\varphi_\alpha^{-1}(w) = \frac{w + \alpha}{1 + \overline{\alpha} w} \quad (w \in \mathbb{D}).$$

[13] Tatsächlich ist Konformität einer Abbildung zunächst lokal definiert als Winkeltreue an einer Stelle. Man kann zeigen, dass holomorphe Funktionen genau dann winkeltreu an einer Stelle z sind, wenn die Ableitung an z nicht verschwindet, also z nicht kritisch ist. Daher sind bijektive holomorphe Funktionen stets winkeltreu an allen Stellen.

2. *Für $\beta \in \mathbb{H}$ ist durch*

$$\varphi(z) := \varphi_\beta(z) := \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\beta : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ definiert mit $\varphi_\beta(\beta) = 0$ und

$$\varphi_\beta^{-1}(w) = \frac{\beta - \overline{\beta} w}{1-w} \qquad (w \in \mathbb{D}).$$

Beweis. Wir betrachten φ wieder als Möbius-Transformation definiert auf $\mathbb{C}_\infty$.
1. Es gilt für $|z| = 1$

$$|z-\alpha| = |z| \cdot |1 - \alpha\overline{z}| = |1 - \overline{\alpha} z|,$$

also $\big|\varphi(z)\big| = 1$, das heißt $\varphi(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$. Weiter ist nach Bemerkung 2.5

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha} w} \qquad (w \in \mathbb{D}),$$

also von der gleichen Form. Damit ist auch $\varphi^{-1}(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$ und folglich $\varphi(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$. Hieraus folgt wiederum $\varphi(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S}) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S}$. Aus $\varphi(\alpha) = 0 \in \mathbb{D}$ und der Gebietstreue von φ (Bemerkung 1.21) ergibt sich dann $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $\varphi(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und damit auch $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
2. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x-\beta| = |x-\overline{\beta}|$, das heißt $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$. Außerdem ist $\varphi(\infty) = 1$, also $\varphi(\mathbb{R}_\infty) \subset \mathbb{S}$, wobei $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da $\varphi\big(\mathbb{R}_\infty\big)$ zusammenhängend ist und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 1$ gilt, folgt $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$. Aus $\varphi(\beta) = 0 \in \mathbb{D}$ ergibt sich wie in 1. damit auch $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. □

Beispiel 4.4 1. (**Cayley-Transformation**) Durch

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

ist eine konforme Abbildung von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{D}$ definiert. Dabei gilt $\varphi(i) = 0$ und

$$\varphi^{-1}(w) = i \cdot \frac{1+w}{1-w} \qquad (w \in \mathbb{D}).$$

2. Es sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) := \frac{z}{1-z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1+z}{1-z} - 1\Big) = \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Nach 1. ist durch $\mathbb{D} \ni z \mapsto (1+z)/(1-z)$ eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf die rechte Halbebene $-i\mathbb{H}$ gegeben. Damit ist φ eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf die Halbebene $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) > -1/2\}$ mit $\varphi(0) = 0$.
3. (**Koebe-Abbildung**) Es sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) := \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)^2 - 1\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^\nu \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Da $w \mapsto w^2$ die rechte Halbebene $-i\mathbb{H}$ konform auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ abbildet, sieht man wie in 2., dass φ eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ mit $\varphi(0) = 0$ darstellt.

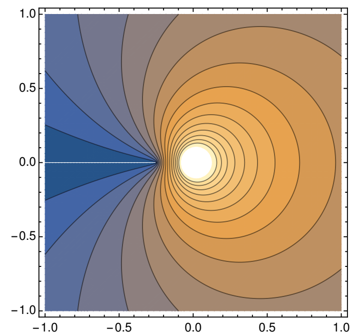

Abbildung 2: Bilder von Kreisringen unter der Koebe-Funktion.

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorph, so ist f nach dem Satz von Liouville bereits konstant. Damit existiert insbesondere keine konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{D}$, das heißt, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sind nicht konform äquivalent. Wir zeigen nun, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ ist.[14]
Zunächst beweisen wir zwei Hilfsresultate, das auch für sich genommen von Interesse sind. Setzt man für $f \in H(U_R(0))$ und $0 \leq r < R$

$$M(r, f) := \max_{K_r(0)} |f|$$

so ist $M(r, f) = \max_{B_r(0)} |f|$ nach dem Maximumprinzip, also insbesondere $r \mapsto M(r, f)$ monoton wachsend.

Satz 4.5 (**Schwarzsches Lemma**)
Es sei $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Dann ist $M(r, f) \leq r$ für $0 < r < 1$ und $|f'(0)| \leq 1$. Außerdem folgt aus der Gleichheit in einer der beiden Ungleichungen, dass f eine Drehung ist, das heißt, es existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = e^{i\theta} z$ für $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. Aus $f(0) = 0$ folgt, dass $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & \text{falls } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

holomorph in $\mathbb{D}$ ist. Es sei $0 \leq r < 1$ gegeben. Dann gilt für $r < s < 1$

$$M(r, g) \leq M(s, g) = M(s, f)/s \leq 1/s \to 1 \qquad (s \to 1^-).$$

Also ist $M(r, g) \leq 1$ und damit $M(r, f) = rM(r, g) \leq r$ sowie $|f'(0)| \leq 1$.
Ist $M(r, f) = r$ für ein r mit $0 < r < 1$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ ein Maximum in $\mathbb{D}$. Nach dem Maximumprinzip ist dann g konstant $= c$ mit $|c| = 1$. Damit ist f eine Drehung. □

[14] Der Satz zeigt, dass die Einheitskreisscheibe nicht nur als ein Beispiel, sondern – in diesem Sinne – als ein Modell eines beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiets angesehen werden kann.

Satz 4.6 (**Hurwitz**)
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G. Ist f_n injektiv für unendlich viele n, so ist entweder f konstant oder f injektiv.

Beweis. Es sei f nicht konstant. Wir betrachten $w \in f(G)$ und $a \in G$ mit $f(a) = w$. Ist $z \in G$, $z \neq a$ und sind $U := U_\delta(a)$ sowie $V = U_\delta(z)$ mit $\delta := |z - a|/2$, so ist $w \in f_n(U)$ bis auf endlich viele n nach Bemerkung 3.13. Da f_n für unendlich viele n injektiv ist, folgt $w \notin f_n(V)$ für unendlich viele n. Wieder nach Bemerkung 3.13 ist dann auch $w \notin f(V)$, also insbesondere $f(z) \neq w$. □

Unter Verwendung des kleinen Satzes von Montel zeigen wir nun

Satz 4.7 (**Riemannscher Abbildungssatz**)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und es sei $a \in G$. Dann existiert eine konforme Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(a) = 0$. Insbesondere sind G und $\mathbb{D}$ konform äquivalent.

Beweis. 1. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{\psi \in H(G) : \psi(G) \subset \mathbb{D},\ \psi \text{ injektiv},\ \psi(a) = 0\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ nichtleer.
Denn: Es sei $\zeta \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann existiert nach Bemerkung 1.22 ein $f \in H(G)$ mit $f^2(z) = z - \zeta$ für alle $z \in G$. Ist $f(z_1) = \pm f(z_2)$, so ist

$$z_1 - \zeta = f^2(z_1) = f^2(z_2) = z_2 - \zeta,$$

also auch $z_1 = z_2$. Damit ist f injektiv und aus $w \in f(G) \setminus \{0\}$ folgt $-w \notin f(G)$.
Da $f(G)$ ein Gebiet ist (Gebietstreue holomorpher Funktionen), existieren ein $c \in f(G)$ und ein $r > 0$ mit $B_r(c) \subset f(G) \setminus \{0\}$. Dann gilt aber $B_r(-c) \cap f(G) = \varnothing$. Ist $\psi := r/(f + c)$, so ist ψ injektiv und $\psi(G) \subset \mathbb{D}$ (beachte: $|f + c| > r$). Die Funktionen φ_α aus Satz 4.3.1 bilden $\mathbb{D}$ konform auf $\mathbb{D}$ ab mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$. Für $\alpha := \psi(a)$ ist damit $\varphi_\alpha \circ \psi \in \mathcal{F}$.
2. Wir zeigen: Ist $\psi \in \mathcal{F}$ mit $\psi(G) \neq \mathbb{D}$, so existiert ein $\psi_1 \in \mathcal{F}$ mit

$$\left|\psi_1'(a)\right| > \left|\psi'(a)\right|.$$

Denn: Es sei $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(G)$. Dann ist $\varphi_\alpha \circ \psi \in H(G)$ injektiv und $(\varphi_\alpha \circ \psi)(G) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Wieder existiert ein $g \in H(G)$ mit $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. Wie in 1. sieht man, dass g injektiv ist. Ist $\psi_1 := \varphi_\gamma \circ g$, wobei $\gamma = g(a)$, so folgt $\psi_1 \in \mathcal{F}$ und

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ g^2 = \varphi_{-\alpha} \circ (\varphi_{-\gamma})^2 \circ \psi_1$$

(beachte $\varphi_{-\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}$ und entsprechend für γ). Ist $h := \varphi_{-\alpha} \circ (\varphi_{-\gamma})^2$, so gilt $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ mit

$$h(0) = \varphi_{-\alpha}(g^2(a)) = \psi(a) = 0$$

und h ist *nicht injektiv*. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $|h'(0)| < 1$. Also ergibt sich mit der Kettenregel (beachte: $\psi_1(a) = 0$)

$$|\psi'(a)| = |h'(0)| \cdot |\psi_1'(a)| < |\psi_1'(a)|.$$

3. Jetzt lassen wir es krachen: Nach Definition ist $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \cup \{0\}$ lokal beschränkt in $H(G)$. Außerdem ist $\mathcal{F}_0$ nach Bemerkung 3.13 und dem Satz von Hurwitz eine abgeschlossene Teilmenge von $H(G)$, also nach dem Satz von Montel (Satz 3.18) kompakt. Wir betrachten die Abbildung $\ell : H(G) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\ell(\psi) = |\psi'(a)| \qquad (\psi \in H(G)).$$

Nach Satz 1.13 ist ℓ stetig. Also wird ℓ maximal auf $\mathcal{F}_0$, das heißt, es existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}_0$ mit

$$|\varphi'(a)| \geq |\psi'(a)| \qquad (\psi \in \mathcal{F}_0).$$

Dabei ist $\varphi \neq 0$, da $\mathcal{F}$ nach 1. nichtleer ist. Aus 2. folgt $\varphi(G) = \mathbb{D}$. Damit ist φ eine konforme Abbildung von G auf $\mathbb{D}$ mit $\varphi(a) = 0$, also wie gewünscht. □

Man kann sich – im Fall der Existenz – fragen, „wie viele“ konforme Abbildungen φ zwischen G und $\mathbb{D}$ mit $\varphi(a) = 0$ existieren.

Satz 4.8 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $\varphi : G \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung mit $\varphi(a) = 0$. Dann gilt*

1. *Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ ist auch $\psi = e^{i\theta}\varphi$ eine konforme Abbildung von G auf $\mathbb{D}$ mit $\psi(a) = 0$.*
2. *Ist ψ eine konforme Abbildung von G auf $\mathbb{D}$ mit $\psi(a) = 0$, so existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\psi = e^{i\theta}\varphi$.*

Beweis. 1. Es gilt $\psi(a) = 0$. Da Kompositionen konformer Abbildungen wieder konform sind, ist ψ nach Beispiel 4.2.1 eine konforme Abbildung von G auf $\mathbb{D}$.
2. Nach Voraussetzung ist $\sigma := \psi \circ \varphi^{-1}$ eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ mit $\sigma(0) = 0$. Also gilt nach dem Schwarzschen Lemma, angewandt auf die Funktionen σ^{-1} und σ,

$$|z| = |\sigma^{-1}(\sigma(z))| \leq |\sigma(z)| \leq |z| \qquad (z \in \mathbb{D})$$

und damit $|\sigma(z)| = |z|$. Wieder nach dem Schwarzschen Lemma ist σ eine Drehung. Also existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\psi = e^{i\theta}\varphi$. □

Bemerkung 4.9 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$. Nach Satz 4.8.2 existiert höchstens eine konforme Abbildung φ von G auf $\mathbb{D}$ mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi'(a) > 0$. Ist $G \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz und Satz 4.8.1 damit *genau eine* konforme Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi'(a) > 0$.

Bemerkung und Definition 4.10 Wir setzen für Gebiete $G \subset \mathbb{C}$

$$\mathrm{Aut}(G) := \{\varphi : G \to G \text{ konform}\}.$$

Dann ist $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ eine Gruppe, die **Automorphismengruppe** von G.

Beispiel 4.11 1. Es sei $\alpha \in \mathbb{D}$. Nach Satz 4.3.1 und Bemerkung 4.8 ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(\alpha) = 0$ genau dann, wenn φ die Form

$$\varphi(z) = \varphi_{\alpha,\theta}(z) := e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

für ein $\theta \in \mathbb{R}$ hat. Also ist

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\varphi_{\alpha,\theta} : \alpha \in \mathbb{D},\, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

2. Für $G = \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ die Menge der affin-linearen Abbildungen $\varphi = \varphi_{a,c}$ der Form

$$\varphi_{a,c}(z) := a + cz \qquad (z \in \mathbb{C})$$

mit $a \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}^*$ ([Ü]).

Bemerkung und Definition 4.12 Es sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Dann heißt Γ eine **Kurve**, falls eine stetige surjektive Abbildung $\gamma : \mathbb{S} \to \Gamma$ existiert. Weiter heißt Γ eine **(geschlossene) Jordankurve**, falls ein Homöomorphismus $\gamma : \mathbb{S} \to \Gamma$ existiert. Der Jordansche Kurvensatz[15] besagt, dass das Komplement einer Jordankurve aus zwei Gebieten besteht, wobei genau eines beschränkt ist. Wir schreiben $\mathrm{Int}(\Gamma)$ für das beschränkte und $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ für das unbeschränkte. Es gilt dann $\Gamma = \partial\, \mathrm{Int}(\Gamma) = \partial\, \mathrm{Ext}(\Gamma)$. Außerdem ist $\mathrm{Int}(\Gamma)$ konform äquivalent zu $\mathbb{D}$ und $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ konform äquivalent zu $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Oft betrachtet man konforme Abbildungen $\varphi : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \setminus K$, wobei K eine kompakte Menge in $\mathbb{C}$ ist. Ein typisches Beispiel ist die Joukowski-Abbildung (Beispiel 4.2). Wie eben bemerkt, existiert im Falle $K = \Gamma \cup \mathrm{Int}(\Gamma)$ stets eine solche Abbildung.
Ist $\varphi : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, so hat φ eine Laurent-Entwicklung

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

in $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = V_{1,\infty}(0)$. Hat $z \mapsto \varphi(1/z)$ einen Pol erster Ordnung an 0, so ist $c_\nu = 0$ für $\nu > 1$, also

$$\varphi(z) = c_1 z + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k} \quad (|z| > 1) \tag{4.1}$$

mit $c_1 \neq 0$.[16] Wir zeigen unter Verwendung des Greenschen Satzes bzw. der Sektorformel von Leibniz (siehe etwa `https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Green`).

[15] Der Beweis stellt sich als überraschend diffizil heraus; siehe etwa R.B. Burckel, An Introduction to Classical Complex Analysis, Academic Press, New York, 1979, p. 102.

[16] Ist φ injektiv und so, dass $\varphi(z) \to \infty$ für $|z| \to +\infty$, so hat φ stets eine Entwicklung der Form (4.1).

Satz 4.13 (Flächensatz) *Ist $\varphi : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ injektiv mit Laurent-Entwicklung (4.1), so gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|c_{-k}|^2 \leq |c_1|^2.$$

Beweis. Es sei $R > 1$. Mit $\gamma_R(t) := \varphi(Re^{it})$ gilt $\gamma_R'(t) = i \sum\limits_{\mu=-\infty}^{1} \mu c_\mu R^\mu e^{i\mu t}$. Also ergibt sich wegen $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\mu-\nu)t}\, dt = 2\pi\delta_{\nu,\mu}$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\gamma_R}(t)\gamma_R'(t)\, dt &= i \sum_{\mu,\nu=-\infty}^{1} \overline{c_\nu}\ \mu c_\mu\, R^{\nu+\mu} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\mu-\nu)t}\, dt \\ &= 2\pi i \Big(|c_1|^2 R^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k|c_{-k}|^2 R^{-2k}\Big).\end{aligned}$$

Wir schreiben λ_2 für das Legesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$. Wegen der Injektivität von φ erhält man mit der Sektorformel von Leibniz

$$0 \leq 2\lambda_2(\mathrm{Int}(\gamma_R^*)) = -i \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\gamma_R}(t)\gamma_R'(t)\, dt = 2\pi\Big(|c_1|^2 R^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k|c_{-k}|^2 R^{-2k}\Big). \tag{4.2}$$

Durch Grenzübergang $R \to 1^+$ ergibt sich $|c_1|^2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} k|c_{-k}|^2 \geq 0$. □

Bemerkung 4.14 Ist unter den Voraussetzungen des Flächensatzes $\gamma_R(t) := \varphi(R_n e^{it})$ für $R > 1$, so folgt aus dem Maximumprinzip, angewandt auf $z \mapsto 1/\varphi(1/z)$, dass

$$\mathrm{Ext}(\gamma_R^*) \cup \gamma_R^* \subset \mathrm{Ext}(\gamma_r^*)$$

für $1 < r < R$ gilt. Ist $K := \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ und (R_n) eine fallende Folge mit $1 > R_n \to 1$, so ergibt sich damit

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Int}(\gamma_{R_n}^*),$$

also aus (4.2) und der Stetigkeit des Lebesgue-Maßes von oben die Fächenformel

$$\lambda_2(K) = \pi\Big(|c_1|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k|c_{-k}|^2\Big).$$

Im Falle $\varphi(z) = z$ ist $K = \overline{\mathbb{D}}$ und c_{-k} für $k \in \mathbb{N}$. Hier ergibt sich $\lambda_2(K) = \pi$. Im Fall der Joukowski-Abbildung $\varphi(z) = (z+1/z)/2$ ist $K = [-1, 1]$ und $c_{-1} = c_1 = 1/2$ sowie $c_{-k} = 0$ für $k \geq 2$. Hier gilt $\lambda_2(K) = 0$.

5 Sätze von Montel und Picard

In diesem Abschnitt werden wir zwei zentrale Sätze der Funktionentheorie beweisen, die großen Sätze von Montel und Picard. Unser Zugang ist ein vergleichsweise neuer, der auf dem Reskalierungssatz von Zalcman basiert.

Einleitend betrachten wieder die Familie $\mathcal{F} := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n(z) = z^n$. In Beispiel 3.17 hatten wir gesehen, dass $\mathcal{F}$ etwa an $z = 1$ nicht sphärisch normal ist. Man kann zeigen, dass

$$e^\zeta = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} (f_n \circ \varphi_n)(\zeta)$$

mit $\varphi_n(\zeta) = 1 + \zeta/n$ gilt, wobei die Konvergenz lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ ist ([Ü]). Es zeigt sich also, dass eine geeignete affin-lineare Skalierung im Argument der f_n an der Stelle 1 zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ konvergenten Folge mit nicht-konstanter Grenzfunktion führt. Wir werden beweisen, dass eine entsprechende Aussage ganz allgemein für nicht normale Familien gilt. Dazu setzen wir (vgl. Beispiel 4.11)

$$\mathrm{Aut}_+(\mathbb{C}) := \{\varphi_{a,\rho} : a \in \mathbb{C},\ \rho > 0\} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}).$$

Satz 5.1 (**Zalcman-Lemma**)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $\mathcal{F} \subset M(\Omega)$ nicht sphärisch normal an a. Dann existieren eine Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ und eine Folge (φ_n) in $\mathrm{Aut}_+(\mathbb{C})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *$\varphi_n = \varphi_{a_n,\rho_n}$ mit $\rho_n \to 0$ und $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.*
2. *$f_n \circ \varphi_n \in M(\mathbb{D})$ mit $(f_n \circ \varphi_n)^\#(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Für alle $U \Subset \mathbb{C}$ mit $0 \in U$ existiert ein $n_U \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n(U) \subset \Omega$ für $n \geq n_U$ und*
$$\sup_U (f_n \circ \varphi_n)^\# \to 1 \quad (n \to \infty,\ n \geq n_U).$$

Beweis. Es sei (r_n) eine Folge positiver Zahlen mit $B_{r_n}(a) \subset \Omega$ und $r_n \to 0$. Aus dem Satz von Marty ergibt sich induktiv die Existenz einer Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ mit

$$r_n \cdot \max_{B_{r_n/2}(a)} f_n^\# \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Dann gilt auch

$$R_n := \max_{z\in B_{r_n}(a)} f_n^\#(z)(r_n - |z-a|) \geq \frac{r_n}{2} \cdot \max_{B_{r_n/2}(a)} f_n^\# \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge können wir voraussetzen, dass (R_n) wachsend ist mit $R_n \geq 1$ für alle n. Wir wählen $a_n \in U_{r_n}(a)$ mit

$$f_n^\#(a_n)\big(r_n - |a_n - a|\big) = R_n$$

und setzen $\rho_n := 1/f_n^\#(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ und

$$\rho_n R_n = \frac{R_n}{f_n^\#(a_n)} = r_n - |a_n - a|,$$

also insbesondere $\rho_n \to 0$. Außerdem ist

$$a_n + \rho_n \mathbb{D} \subset a_n + \rho_n U_{R_n}(0) = U_{\rho_n R_n}(a_n) \subset U_{r_n}(a).$$

Mit $\varphi_n := \varphi_{a_n,\rho_n}$ ist $f_n \circ \varphi_n$ meromorph in $\mathbb{D}$, und nach der sphärischen Kettenregel gilt

$$(f_n \circ \varphi_n)^\# = \rho_n f_n^\# \circ \varphi_n$$

in $\mathbb{D}$, also insbesondere $(f_n \circ \varphi_n)^\#(0) = \rho_n f_n^\#(a_n) = 1$ für alle n.
Nun sei $U \Subset \mathbb{C}$ gegeben, n_U so gewählt, dass $U \subset U_{R_{n_U}}(0)$ und $n \geq n_U$. Ist $\zeta \in U$, so gilt $w_n := a_n + \rho_n \zeta \in U_{r_n}(a)$ und damit

$$R_n \geq f_n^\#(w_n)\big(r_n - |w_n - a|\big) \geq f_n^\#(w_n)(r_n - |a_n - a| - \rho_n|\zeta|)\,,$$

also

$$(f_n \circ \varphi_n)^\#(\zeta) = \rho_n f_n^\#(w_n) \leq \frac{\rho_n R_n}{r_n - |a_n - a| - \rho_n|\zeta|} = \frac{\rho_n R_n}{\rho_n R_n - \rho_n|\zeta|} = \frac{1}{1 - |\zeta|/R_n}$$

und folglich wegen $0 \in U$

$$1 \leq \sup_U (f_n \circ \varphi_n)^\# \leq (1 - R_{n_U}/R_n)^{-1} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

□

Unter den Bedingungen des Zalcman-Lemmas ist nach dem Satz von Marty für jede offene Menge $U \Subset \mathbb{C}$ die Familie $\{f_n \circ \varphi_n : n \geq n_U\}$ in $M(U)$ sphärisch normal. Geeignete (affin-lineare) Skalierung im Argument führt also zu Normalität. Damit erhält man

Satz 5.2 (**Reskalierungssatz von Zalcman**)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $\mathcal{F} \subset M(\Omega)$ nicht sphärisch normal an a. Dann existieren eine Folge $(\varphi_n = \varphi_{a_n,\rho_n})$ in $\mathrm{Aut}_+(\mathbb{C})$ mit $a_n \to a$ und $\rho_n \to 0$, eine Funktion $g \in M(\mathbb{C})$ mit

$$\max_{\mathbb{C}} g^\# = g^\#(0) = 1$$

und eine Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ so, dass für alle offenen $U \Subset \mathbb{C}$ die Folge $(f_n \circ \varphi_n)_{n \geq n_U}$ für ein geeignetes $n_U \in \mathbb{N}$ sphärisch lokal gleichmäßig auf U gegen g konvergiert. Ist $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$, so ist g eine ganze Funktion.

Beweis. Es seien (φ_n) und (f_n) Folgen wie im Zalcman-Lemma. Da nach dem Satz von Marty die Familie $\{f_n \circ \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $M(\mathbb{D})$ sphärisch normal ist, können wir nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge voraussetzen, dass die Folge $(f_n \circ \varphi_n)$ in $M(\mathbb{D})$ konvergiert. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $g_{\mathbb{D}}$. Wieder nach dem Satz von Marty ist für jedes $U \Subset \mathbb{C}$ die Familie $\{f_n \circ \varphi_n : n \geq n_U\}$ mit geeignetem n_U in $M(U)$ sphärisch normal. Nach dem Satz von Vitali ([Ü]) existiert eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Fortsetzung g von $g_{\mathbb{D}}$ so, dass für alle U

$$f_n \circ \varphi_n \to g \qquad (n \to \infty,\, n \geq n_U)$$

in $M(U)$ gilt. Aufgrund der Stetigkeit von $h \mapsto h^\#$ folgt $(f_n \circ \varphi_n)^\# \to g^\#$ in $C(U)$. Wieder mit dem Zalcman-Lemma ergibt sich

$$\max_{\mathbb{C}} g^\# = g^\#(0) = 1.$$

Insbesondere ist g nicht konstant. Ist $\mathcal{F}$ eine Familie in $H(\Omega)$, so ist die Grenzfunktion $g \in H_\infty(\mathbb{C})$ und nicht konstant, also eine (nicht konstante) ganze Funktion. □

Damit beweisen wir folgenden zentralen Satz.

Satz 5.3 (**Sphärischer Normalitätssatz**; **großer Satz von Montel**)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{F} \subset M(\Omega)$ und $a \in \Omega$. Existiert eine offene Umgebung U von a so, dass $\mathcal{F}|_U$ drei Werte auslässt, das heißt

$$\#\big(\mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(U)\big) \geq 3,$$

so ist $\mathcal{F}$ sphärisch normal an a.

Beweis.
1. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass U ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Zunächst sei die Familie $\mathcal{F}$ so, dass

$$0, 1, \infty \notin \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(U)$$

gilt. Dann ist $\mathcal{F} \subset H(U)$ und aus $0 \notin f(U)$ für $f \in \mathcal{F}$ folgt die Existenz m-ter Wurzeln von f auf U, das heißt, für alle $m \in \mathbb{N}$ existieren $h = h_m \in H(U)$ mit $h^m = f$ (siehe Bemerkung 1.22). Wir setzen für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_k := \{h \in H(U) : h^{2^k} = f \text{ für ein } f \in \mathcal{F}\}.$$

Wegen $1 \notin f(U)$ für $f \in \mathcal{F}$ enthält für alle $h \in \mathcal{F}_k$ das Bild $h(U)$ keine 2^k-ten Einheitswurzeln.
Angenommen, $\mathcal{F}$ ist nicht sphärisch normal an a. Ist $V \subset U$ eine offene Umgebung von a, so existiert eine Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{F}$, die keine auf V sphärisch lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Sind $k \in \mathbb{N}$ und $h_{n,k} \in \mathcal{F}_k$ mit $(h_{n,k})^{2^k} = f_n$, so hat auch $(h_{n,k})_n$ keine auf V sphärisch lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Also ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $\mathcal{F}_k$ nicht sphärisch normal an a.
Es sei $g_k \in H(\mathbb{C})$ eine Grenzfunktion zu $\mathcal{F}_k$ wie im Reskalierungssatz (die dort g heißt). Aus Bemerkung 3.13 folgt, dass $g_k(\mathbb{C})$ keine 2^k-ten Einheitswurzeln enthält. Außerdem gilt $g_k^\# \leq 1 = g_k^\#(0)$. Damit ist nach dem Satz von Marty $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine sphärisch normale Familie. Ist $g \in H_\infty(\mathbb{C})$ lokal gleichmäßiger Grenzwert einer Teilfolge von $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so ist g nicht konstant, da $g^\#(0) = 1$ gilt. Wieder nach Bemerkung 3.13 enthält $g(\mathbb{C})$ keine 2^k-te Einheitswurzel, jetzt aber für alle $k \in \mathbb{N}$, das heißt $g(\mathbb{C}) \cap W = \varnothing$, wobei

$$W := \{w \in \mathbb{S} : w^{2^k} = 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}.$$

Da W dicht in $\mathbb{S}$ ist ([Ü]) und da $g(\mathbb{C})$ ein Gebiet ist, gilt $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}$ oder $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Im ersten Fall ist g konstant nach dem Satz von Liouville. Widerspruch. Im zweiten Fall liefert die Anwendung des Satzes von Liouville auf $1/g$ den gleichen Widerspruch.
2. Nun seien $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(U)$ beliebig. Dann existiert eine Möbius-Transformation $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, die die drei Werte w_1, w_2, w_3 nach $0, 1, \infty$ abbildet.[17] Nach 1. ist die Familie $\{\varphi \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ sphärisch normal an a. Da $\varphi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ stetig ist und $f = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f$ für $f \in \mathcal{F}$ gilt, ist dann auch $\mathcal{F}$ sphärisch normal an a. □

Bemerkung 5.4 Ist unter den Voraussetzungen des großen Satzes von Montel $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$, so folgt aus $\#\big(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(U)\big) \geq 2$ die sphärische Normalität von $\mathcal{F}$ an a.

Beispiel 5.5 Es seien $f \in H(\mathbb{D})$ und $(S_n f)_n$ die Folge der n-ten Teilsummen

$$(S_n f)(z) := \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$$

der Taylor-Reihe von f um 0. Bekanntlich konvergiert $(S_n f)$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{D}$ gegen f. Ist der Konvergenzradius 1, so ist die Folge $((S_n f)(z))$ zudem in allen Punkten $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ norm-divergent. Nach dem Satz von Vitali ([Ü]) ist dann die Familie $\{S_n f : n \in \mathbb{N}\} \subset H(\mathbb{C})$ an allen Stellen $a \in \mathbb{S}$ nicht sphärisch normal und Bemerkung 5.4 ist daher für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ mit $U \cap \mathbb{S} \neq \varnothing$ die Menge $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (S_n f)(U)$ höchstens einpunktig.

Bemerkung und Definition 5.6 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in M(\Omega \setminus \{a\})$. Ein Punkt $w \in \mathbb{C}_\infty$ heißt **Picardscher Ausnahmewert** oder kurz **Ausnahmewert** von f an der Stelle a, falls eine Umgebung U von a existiert mit $w \notin f\big(U \setminus \{a\}\big)$. Wir schreiben $E_\infty(f, a)$ für die Menge der Ausnahmewerte von f an a. Für Funktionen $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ ist der Wert ∞ offenbar stets ein Ausnahmewert. In diesem Fall schreiben wir $E(f, a) := E_\infty(f, a) \cap \mathbb{C}$.

Satz 5.7 (**Großer Satz von Picard**)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in \Omega$. Ist $f \in M(\Omega \setminus \{a\})$ mit $\#(E_\infty(f, a)) \geq 3$, so ist f meromorph fortsetzbar nach Ω. Ist $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ mit $\#(E(f, a)) \geq 2$, so hat f an a eine hebbare Singularität oder einen Pol.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $a = 0$, $\mathbb{D} \subset \Omega$ und $0, 1, \infty \notin f(\mathbb{D}^*)$ mit $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ gilt. (Ansonsten kann man eine affin-lineare Abbildung vor- und eine Möbius-Transformation nachschalten, vgl. den Beweis zu Satz 5.3.) Dann sind insbesondere f und $1/f$ in $H(\mathbb{D}^*)$. Wir definieren $g_n \in H(\mathbb{D}^*)$ durch

$$g_n(z) := f(z/n) \qquad (n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{D}^*).$$

[17] $\varphi(z) = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{z - w_1}{z - w_3}$ ist im Falle $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ geeignet, $\varphi(z) = \frac{z - w_1}{w_2 - w_1}$ für $w_3 = \infty$.

Dann sind $0, 1, \infty \notin g_n(\mathbb{D}^*)$ für alle n. Nach dem großen Satz von Montel ist $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ sphärisch normal. Also existieren eine Teilfolge $(g_n)_{n\in I}$ von (g_n) und ein $g \in H_\infty(\mathbb{D}^*)$ mit $g_n \to g$ $(n \to \infty, n \in I)$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{D}^*$.
Ist g nicht konstant mit Wert ∞, so ist $g \in H(\mathbb{D}^*)$. In diesem Fall existiert ein $M > 0$ so, dass

$$\big|f(z)\big| \le M \quad \text{und} \quad \big|g(z)\big| \le M - 1 \qquad \Big(|z| = \frac{1}{2}\Big).$$

Dann ist auch $\big|g_n(z)\big| \le M$ für $|z| = 1/2$ und $n \in I$ genügend groß, also

$$\big|f(z)\big| \le M \qquad \Big(|z| = \frac{1}{2n}\Big)$$

für $n \in I$ genügend groß. Nach dem Maximumprinzip ist damit

$$\big|f(z)\big| \le M \qquad \Big(\frac{1}{2n} \le |z| \le \frac{1}{2}\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $|f| \le M$ auf $(1/2)\mathbb{D}^*$. Folglich hat f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz an 0 eine hebbare Singularität . Ist g konstant $= \infty$, so argumentiert man entsprechend mit $1/f$ statt f. Dann hat $1/f$ eine hebbare Singularität an 0 (mit Wert 0) und folglich f einen Pol. $\square$

Beispiel 5.8 Es sei $f(z) = e^{1/z}$ für $z \in \mathbb{C}^*$. Da 0 nicht als Wert angenommen wird, folgt $0 \in E(f, 0)$. Da f an 0 eine wesentliche Singularität hat, ist $E(f, 0) = \{0\}$ nach dem Satz von Picard (das kann man hier auch direkt nachrechnen). Ist $f \in H(\mathbb{C}^*)$ mit $f(z) = e^{1/z}(z - 1)$ für $z \in \mathbb{C}^*$, so hat f den Picardschen Ausnahmewert 0 an der Stelle 0, obwohl hier $0 = f(1)$ gilt, also 0 als Wert angenommen wird.

Bemerkung und Definition 5.9 Es sei $f \in M(\mathbb{C})$. Ein Punkt $w \in \mathbb{C}_\infty$ heißt **Picardscher Ausnahmewert** oder kurz **Ausnahmewert** von f, falls w Ausnahmewert der Funktion $g \in M(\mathbb{C}^*)$ mit $g(z) := f(1/z)$ für $z \in \mathbb{C}^*$ an der Stelle 0 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f^{-1}(\{w\})$ endlich ist (nach dem Identitätssatz existieren keine Häufungspunkte von w-Stellen in $\mathbb{C}$). Ist f ganz und transzendent, so hat $g \in H(\mathbb{C}^*)$ an der Stelle 0 eine wesentliche Singularität. Setzt man $E(f) := E(g, 0) \subset \mathbb{C}$, so ist $E(f)$ höchstens einpunktig nach dem großen Satz von Picard. Insbesondere ist damit $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ leer oder einpunktig. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt dies auch für nichtkonstante Polynome und damit für beliebige nichtkonstante ganze Funktionen f. Man bezeichnet die entsprechende Aussage auch als den **kleinen Satz von Picard**.

Beispiel 5.10 Für $f = \exp$ ist $0 \notin \exp(\mathbb{C})$, also 0 Picardscher Ausnahmewert und für $f(z) = ze^z$ ist $0 \in E(f)$, also ebenfalls Picardscher Ausnahmewert, obwohl $0 \in f(\mathbb{C})$ gilt. Ist $f = \cos(\mathbb{C})$, so gilt $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ([Ü]). Da cos zudem 2π-periodisch ist, hat cos keine Picardschen Ausnahmewerte in $\mathbb{C}$.

6 Komplexe Dynamik

Ist X eine nichtleere Menge, so ist $(\mathrm{Abb}(X,X),\circ)$ ein Monoid. Für $f \in \mathrm{Abb}(X,X)$ betrachten wir die Potenzen $f^{\circ 0} := \mathrm{id}_X$ und

$$f^{\circ n} := f^{\circ(n-1)} \circ f \qquad (n \in \mathbb{N})$$

bezüglich der Komposition $\circ$ auf $\mathrm{Abb}(X,X)$. Man spricht in diesem Kontext von einem (diskreten) dynamischen System (X,f) (oder kurz f) und betrachtet dabei das Verhalten der Folge $(f^{\circ n})$ für große n.

Bemerkung und Definition 6.1 Es seien X eine Menge und $f : X \to X$. Dann heißt eine Menge $A \subset X$

1. **vorwärts-invariant** oder kurz **invariant** (unter f), falls $f(A) \subset A$,
2. **rückwärts-invariant** (unter f), falls $f^{-1}(A) \subset A$,
3. **vollständig invariant** (unter f), falls $f(A) \subset A$ und $f^{-1}(A) \subset A$.

Ist A invariant, so kann man das System auf die Teilmenge A einschränken, das heißt (A, f_A) mit $f_A : A \to A$, definiert durch $f_A(x) := f(x)$ für $x \in A$, ist ebenfalls ein dynamisches System. Man kann sich leicht überlegen ([Ü]): A ist genau dann vollständig invariant, wenn A und $X \setminus A$ invariant sind. Weiter heißt für $x \in X$

$$O^+(x) := O^+(f,x) := \{f^{\circ n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

Vorwärtsorbit oder kurz **Orbit** von x. Zudem setzen wir

$$O^-(x) := O^-(f,x) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f^{\circ n})^{-1}(\{x\})$$

sowie $O(x) := O(f,x) := O^+(x) \cup O^-(x) \cup \{x\}$ und für $A \subset X$

$$O^+(A) := O^+(f,A) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{\circ n}(A).$$

Damit ist A genau dann invariant, wenn $O^+(A) \subset A$ gilt.

Für das lokale dynamische Verhalten glatter Funktionen sind insbesondere Fixpunkte von Bedeutung.

Definition 6.2 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ offen und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Ferner sei $a \in X$ ein **Fixpunkt** von f, also $f(a) = a$. Man nennt $\lambda := f'(a)$ den **Multiplikator** von a und damit a

1. **superattraktiv**, falls $\lambda = 0$,

2. **attraktiv**, falls $0 < |\lambda| < 1$,
3. **neutral**, falls $|\lambda| = 1$,
4. **abweisend**, falls $|\lambda| > 1$.

Bemerkung 6.3 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ offen und $f : X \to \mathbb{K}$ stetig differenzierbar. Ist a ein attraktiver oder superattraktiver Fixpunkt, so existiert zu jedem δ mit $|\lambda| < \delta < 1$ ein $\rho > 0$ so, dass $f(B_r(a)) \subset B_r(a)$ für $0 < r < \rho$ und

$$|f^{\circ n}(x) - a| \leq \delta^n |x - a| \qquad (x \in U_\rho(a),\, n \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere gilt $f^{\circ n} \to a$ lokal gleichmäßig auf $U_\rho(a)$.

Denn: Es sei $\rho > 0$ so, dass $U_\rho(a) \subset X$ und $\sup\limits_{U_\rho(a)} |f'| \leq \delta$. Für $0 < r < \rho$ und $B := B_r(a)$ gilt nach dem Schrankensatz

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| \leq \delta |x - a| \qquad (x \in B),$$

also $f(B) \subset B$ und induktiv $|f^{\circ n}(x) - a| \leq \delta^n |x - a|$ für $x \in B$ und $n \in \mathbb{N}$.

Wir untersuchen nun das globale Verhalten von $(f^{\circ n})$ für dynamische Systeme $(\mathbb{C}, f)$ im Falle ganzer Funktionen f.

Bemerkung und Definition 6.4 Für $f \in H(\mathbb{C})$ setzen wir $\langle f \rangle := \{f^{\circ n} : n \in \mathbb{N}\}$. Dann heißen

$$F := F(f) := \{z \in \mathbb{C} : \langle f \rangle \text{ sphärisch normal an } z\}$$

die **Fatou-Menge** von f und $J := J(f) := \mathbb{C} \setminus F$ die **Julia-Menge** von f. Man beachte: Aus der Definition ergibt sich, dass F offen und damit J abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist. Außerdem ist $\langle f \rangle|_F$ sphärisch normal nach Bemerkung 3.9. Schließlich nennt man

$$I := I(f) := \big\{z \in \mathbb{C} : f^{\circ n}(z) \to \infty \ (n \to \infty)\big\}$$

die **Entweichmenge** von f.

Beispiel 6.5 Es sei $f(z) = z^2$, also $f^{\circ n}(z) = z^{2^n}$. Hier ist $a = 0$ ein superattraktiver Fixpunkt und es gilt $f(B_r(0)) \subset B_r(0))$ für $0 < r < 1$ sowie $f^{\circ n}(z) \to 0$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{D}$. Aus Beispiel 3.17 ergibt sich weiter, dass $\langle f \rangle$ genau dann sphärisch normal an z ist, wenn $|z| \neq 1$ gilt. Also ist hier $J = \mathbb{C} \setminus F = \mathbb{S}$. Außerdem ist $I = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Satz 6.6 *$F(f)$, $J(f)$ und $I(f)$ sind vollständig invariant.*

Beweis. 1. Ohne Einschränkung sei f nicht konstant. Sind $b \in F$ und $\varepsilon > 0$, so existiert wegen der gleichgradigen Stetigkeit von $\langle f \rangle$ an b eine Umgebung U von b mit

$$\chi(f^{\circ n}(z), f^{\circ n}(b)) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}_0,\, z \in U).$$

Ist $a \in f^{-1}(F)$ und $b = f(a)$, so gilt für alle $u \in f^{-1}(U)$

$$\chi(f^{\circ(n+1)}(u), f^{\circ(n+1)}(a)) = \chi(f^{\circ n}(f(u)), f^{\circ n}(b)) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Da $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von b ist, ist $\langle f \rangle|_{f^{-1}(F)}$ gleichgradig stetig, also $f^{-1}(F) \subset F$ nach Satz 3.10. Ist $c \in f(F)$ und $b \in F$ mit $f(b) = c$, so ist $V := f(U)$ wegen der Offenheit von f eine Umgebung von c. Sind $w \in V$ und $z \in U$ mit $f(z) = w$, so ist

$$\chi\big(f^{\circ n}(w), f^{\circ n}(c)\big) = \chi\big(f^{\circ(n+1)}(z), f^{\circ(n+1)}(b)\big) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Also ist $\langle f \rangle|_{f(F)}$ gleichgradig stetig und damit auch $f(F) \subset F$ nach Satz 3.10.
2. Nach 1. ist $F(f)$ vollständig invariant und nach Bemerkung 6.1 damit auch $J(f) = \mathbb{C} \setminus F(f)$. Die Invarianz von $I(f)$ ergibt sich leicht aus der Definition von $I(f)$. □

Bemerkung 6.7 Ist a ein attraktiver oder superattraktiver Fixpunkt von $f \in H(\mathbb{C})$, so folgt $a \in F(f)$ aus Bemerkung 6.3. Ist dagegen a abweisend, so gilt stets $a \in J(f)$.

Denn: Es gilt

$$(f^{\circ n})^{\#}(a) = |(f^{\circ n})'(a)|/(1 + |a|^2)$$

und mit der Kettenregel $(f^{\circ n})'(a) = (f'(a))^n = \lambda^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Also folgt

$$(f^{\circ n})^{\#}(a) = |\lambda|^n/(1 + |a|^2) \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Nach dem Satz von Marty ist damit $a \in J(f)$.

Beispiel 6.8 Für $f(z) = \lambda \sin z$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$, ist $a = 0$ Fixpunkt mit $f'(0) = \lambda$. Also ist $0 \in F(f)$, falls $|\lambda| < 1$, und $0 \in J(f)$, falls $|\lambda| > 1$. Ist $\lambda = 1$, so kann man sich überlegen, dass $0 \in J(f)$ gilt.

Bemerkung 6.9 Ist $f(z) = b + cz$ für $b, c \in \mathbb{C}$ und $c \neq 1$, so gilt mit $a := b/(1 - c)$

$$f^{\circ n}(z) = a + c^n(z - a) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Hier ist a Fixpunkt mit Multiplikator c. Im Fall $|c| < 1$ gilt $f^{\circ n} \to a$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ und $J(f) = I(f) = \varnothing$. Ist $|c| = 1$, so ist $\langle f \rangle$ lokal beschränkt auf $\mathbb{C}$, also ist nach dem kleinen Satz von Montel auch hier $J(f) = I(f) = \varnothing$. Im Fall $|c| > 1$ ist $J(f) = \mathbb{C} \setminus I(f) = \{a\}$. Ist $f(z) = b + z$ (also $c = 1$), so gilt $f^{\circ n}(z) = nb + z$. Damit ist $J(f) = \varnothing$ sowie $I(f) = \mathbb{C}$, falls $b \neq 0$.

Im Weiteren werden wir uns mit der Struktur von Julia-Mengen und der Dynamik einer Funktion auf ihrer Julia-Menge auseinandersetzen. Wir werden dabei nur noch den nicht affin-linearen Fall betrachten (also f' nicht konstant) und zudem davon ausgehen, dass $J(f)$ nichtleer ist.[18] Wir schreiben

$$\mathcal{E} := \{f \in H(\mathbb{C}) : f' \text{ nicht konstant und } J(f) \neq \varnothing\}.$$

Satz 6.10 *Ist f ein Polynom vom Grad ≥ 2, so ist $f \in \mathcal{E}$ und $J(f)$ kompakt.*

Beweis. Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{d} c_\nu z^\nu$ mit $d \geq 2$ und $c_d \neq 0$. Dann gilt

$$f(z)/z^d \to c_d \qquad (|z| \to \infty)$$

und damit existiert ein $R > 0$ so, dass $\big|f(z)\big| \geq 2|z|$ für $z \in V := V_{R,\infty}(0)$. Induktiv ergibt sich $|f^{\circ n}(z)| \geq 2^n|z|$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in V$. Damit ist $V \subset F(f)$ und $J(f)$ kompakt. Wäre $J(f) = \varnothing$, so würde nach dem Satz von Vitali $f^{\circ n} \to \infty$ spährisch lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ gelten. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat $f(z) - z$ für eine Nullstelle, also f einen Fixpunkt. Widerspruch □

Satz 6.11 *Es sei $f \in \mathcal{E}$. Dann gilt*

1. *Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $U \cap J(f) \neq \varnothing$, so ist $\mathbb{C} \setminus O^+(U)$ höchstens einpunktig.*
2. *Entweder ist $J(f) = \mathbb{C}$ oder $J(f)$ hat keine inneren Punkte.*

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus dem großen Satz von Montel. Wir zeigen: Hat $J(f)$ einen inneren Punkt a, so ist $F(f) = \varnothing$. Dazu sei $U := U_\delta(a) \subset J(f)$. Da $J(f)$ invariant ist, folgt $O^+(U) \subset J(f)$, also $F(f) \subset \mathbb{C} \setminus O^+(U)$. Nach 1. ist damit $F(f)$ höchstens einpunktig und als offene Menge dann leer. □

Für Polynome f hat $J(f)$ nach Satz 6.10 und Satz 6.11 keine inneren Punkte. Auf der anderen Seite gibt es transzendente Funktionen, deren Julia-Menge ganz $\mathbb{C}$ ist. So kann man zeigen, dass etwa $J(\exp) = \mathbb{C}$ gilt.[19]
Während jedes Polynom vom Grad ≥ 2 Fixpunkte hat, gibt es transzendente Funktionen ohne Fixpunkt (Beispiel: $z \mapsto e^z + z$).

[18] Man kann zeigen, dass $J(f)$ für nicht-affin lineare ganze Funktionen stets nichtleer ist.
[19] Einen Beweis findet man zum Beispiel in Morosawa, S., Nishimura, Y., Taniguchi, M., Ueda, T. *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000

Bemerkung und Definition 6.12 Sind $X \neq \varnothing$ eine Menge und $f : X \to X$, so heißt $a \in X$ **periodischer Punkt** von f, falls $f^{\circ m}(a) = a$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, das heißt, falls a Fixpunkt einer Iterierten $f^{\circ m}$ von f ist. Jedes m mit dieser Eigenschaft nennt man eine **Periode** von a, und das Minimum p aller Perioden heißt die **minimale Periode** von a. Ist $f \in H(\mathbb{C})$, so heißt der periodische Punkt a **(super-)attraktiv** beziehungsweise **neutral** beziehungsweise **abweisend**, falls a als Fixpunkt von $f^{\circ p}$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Satz 6.13 *Es sei f eine transzendente ganze Funktion. Dann hat f unendlich viele periodische Punkte der Periode zwei*[20] *oder es existiert ein Fixpunkt c so, dass $f^{-1}(\{c\})$ unendlich ist.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g := (f^{\circ 2} - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})/(f - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \in M(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}.$$

Ist $g(a) = 0$, so ist a ein Fixpunkt von $f \circ f$, ist $g(a) = \infty$, so ist a ein Fixpunkt von f und ist $g(a) = 1$, so ist $f(a)$ ein Fixpunkt von $f \circ f$. Da f kein Polynom ist, ist g keine rationale Funktion, denn wäre $g = p/q$ mit Polynomen $p, q \neq 0$, so wäre

$$(f \circ f)q - fp = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(q - p).$$

Ist $w \in \mathbb{C}$ kein Picardscher Ausnahmewert von f, so ist $f(w)q(z) - wp(z) = z(q(z) - p(z))$ für alle $z \in f^{-1}(\{w\})$. Da beide Seiten Polynome in z sind, gilt die Gleichung für alle $z \in \mathbb{C}$. Also ist $(f(w) - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})q = (w - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})p$. Da dies für alle $w \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme gilt, ergibt sich durch Differenzieren nach w die Konstanz von p/q und $f'(w) = p/q$ für alle w. Widerspruch.
Da g transzendent (also nicht rational) ist, ist $z \mapsto g(1/z)$ nicht meromorph fortsetzbar an der Stelle 0 ([Ü]). Nach dem großen Satz von Picard hat g höchstens zwei Ausnahmewerte. Folglich nimmt g einen der Werte $0, 1, \infty$ unendlich oft an. Gilt dies für 0 oder für ∞, so hat f unendlich viele periodische Punkte der Periode 2. Ist $g^{-1}(\{1\})$ unendlich, so ist jeder Punkt in $W := f(g^{-1}(\{1\}))$ ein Fixpunkt von f. Ist W unendlich, so existieren unendlich viele Fixpunkte. Ist W endlich, so existiert ein $a \in g^{-1}(\{1\})$ mit $f(a') = f(a)$ für unendlich viele $a' \in g^{-1}(\{1\})$. Für $c = f(a)$ gilt dann die zweite Alternative. □

Satz 6.14 *Ist $f \in \mathcal{E}$ transzendent, so ist $J(f)$ unbeschränkt.*

Beweis. Da $J(f) \supset J(f \circ f)$ gilt, können wir nach Satz 6.13 ohne Einschränkung annehmen, dass f unendlich viele Fixpunkte oder einen Fixpunkt mit unendlich vielen Urbildern hat.

[20] In diesem Fall kann man leicht zeigen, dass $J(f) \neq \varnothing$ ist.

Angenommen, J sei beschränkt. Wir betrachten die unbeschränkte Komponente F_∞ von F. Dann existiert ein $a \in F_\infty$ mit $f^n(a) = f(a)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen: Es existiert eine Folge (g_j) in $\langle f \rangle$ mit $g_j \to \infty$ auf F_∞. Widerspruch zu $g_j(a) = f(a)$.
Angenommen, zu jeder Folge (g_j) in $\langle f \rangle$ existieren ein $g \in H(F_\infty)$ und eine auf F_∞ sphärisch lokal gleichmäßig gegen g konvergente Teilfolge $(g_j)_{j\in I}$. Nach Bemerkung 3.12 ist die Konvergenz lokal norm-gleichmäßig. Nach dem Maximumprinzip konvergiert dann $(g_j)_{j\in I}$ lokal norm-gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ ([Ü]). Damit ist $J(f) = \varnothing$. Widerspruch. Also existiert eine Folge (g_j) in $\langle f \rangle$ für die jede auf F_∞ sphärisch lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge gegen ∞ konvergiert. Dann gilt schon $g_j \to \infty$ auf F_∞ ([Ü] zum Satz von Vitali). □

Bemerkung und Definition 6.15 1. Es seien $X \neq \varnothing$ eine Menge und $f : X \to X$. Weiter seien $A \subset X$ und $a \in X$. Dann gilt: Aus $O^-(a) \cap O^+(A) \neq \varnothing$ folgt $a \in O^+(A)$.

Denn: Sind $x \in X$ und $n, k \in \mathbb{N}$ mit $f^{\circ n}(x) = a$ und $x \in f^{\circ k}(A)$, so gilt

$$a = f^{\circ n}(x) \in f^{\circ n}(f^{\circ k}(A)) = f^{\circ(n+k)}(A) \subset O^+(A).$$

Außerdem ist $a \in O^+(A)$ genau dann, wenn $O^-(a) \cap A \neq \varnothing$ ist.
2. Es sei $f \in \mathcal{E}$. Ist U eine offene Menge mit $U \cap J(f) \neq \varnothing$ und ist $a \in \mathbb{C} \setminus O^+(U)$, so ist $O^-(a) \cap O^+(U) = \varnothing$ nach 1. Nach Satz 6.11.1 ist $\mathbb{C} \setminus O^+(U)$ höchstens einpunktig, also

$$O^-(a) \subset \{a\}.$$

Einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ mit $O^-(a) \subset \{a\}$ heißt **Montelscher Ausnahmewert** von f. Wir schreiben $M(f)$ für die Menge der Montelschen Ausnahmewerte. Damit gilt: Für U offen mit $U \cap J(f) \neq \varnothing$ ist

$$\mathbb{C} \setminus M(f) \subset O^+(U). \tag{6.1}$$

Wieder nach Satz 6.11.1 ist $M(f)$ höchstens einpunktig. Ist a ein Montelscher Ausnahmewert, so ist entweder $O^-(a) = \varnothing$, das heißt $a \notin f(\mathbb{C})$ (wie etwa $a = 0$ bei $f(z) = e^z$) oder aber $O^-(a) = \{a\}$ und damit a ein Fixpunkt mit $O(a) = \{a\}$ (wie etwa $a = 0$ bei $f(z) = ze^z$ oder auch bei $f(z) = z^2$). Insbesondere ist jeder Montelsche Ausnahmewert auch ein Picardscher. Ist $f \in \mathcal{E}$ ein Polynom, so gilt $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra. Ist $a \in \mathbb{C}$ mit $O(a) = \{a\}$, so hat die Gleichung $f(z) = a$ nur die Lösung a. Damit ist

$$f(z) - a = c(z - a)^d$$

mit $d = \deg(f) \geq 2$ und einer Konstante $c \in \mathbb{C}^*$. Dies sind also die einzigen Polynome, bei denen ein Montelscher Ausnahmewert existiert. In diesem Fall ist zudem a ein superattraktiver Fixpunkt und damit $a \in F(f)$. Weiterhin ist $O^-(a)$ unendlich für alle $f \in \mathcal{E}$ und alle $a \notin M(f)$.

Denn: Es existiert ein $z \neq a$ mit $f(z) = a$. Ist f transzendent, so ist a oder z kein Picardscher Ausnahmewert. Also hat einer der beiden Punkte unendlich viele Urbilder. Ist a ein Polynom, so sieht man induktiv, dass a mindestens $n+1$ Urbilder unter $f^{\circ n}$ hat. Damit ist auch hier $O^-(a)$ unendlich.

Nach den Sätzen 6.10 und 6.14 ist $J(f) \setminus M(f)$ für beliebige $f \in \mathcal{E}$ nichtleer. Wegen der Rückwärts-Invarianz von $J(f)$ ist damit $J(f)$ stets unendlich.

Satz 6.16 *Es seien $f \in \mathcal{E}$ und $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $U \cap J(f) \neq \varnothing$. Dann gilt*

1. $J(f) \setminus M(f) \subset O^+(U \cap J(f)) \subset J(f)$.
2. *Ist f ein Polynom, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit* $\bigcup_{n=1}^{N} f^{\circ n}(U \cap J(f)) = J(f)$.

Beweis. Da $J = J(f)$ vollständig invariant ist, gilt

$$f^{\circ n}(U \cap J) = f^{\circ n}(U) \cap J$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $O^+(U \cap J) = O^+(U) \cap J$. Die erste Aussage ergibt sich damit aus (6.1). Ist f ein Polynom, so ist $M(f) \subset F(f)$ und damit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^{\circ n}(U) \cap J) = O^+(U \cap J) = J.$$

Da $f^{\circ n}(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offen in $\mathbb{C}$ ist, ist $f^{\circ n}(U) \cap J$ offen in J für alle n. Aus der Überdeckungskompaktheit von J folgt $\bigcup_{n=1}^{N} f^{\circ n}(U \cap J) = J$ für alle genügend großen N. $\square$

Bemerkung 6.17 Aus Bemerkung 6.15.1 und Satz 6.16 ergibt sich unmittelbar: Ist $f \in \mathcal{E}$ und ist $a \in J(f) \setminus M(f)$, so ist $O^-(a)$ dicht in $J(f)$.[21] Ist f ein Polynom, so gilt dies für alle $a \in J(f)$.

Wir haben bereits gesehen, dass Julia-Mengen $J(f) \neq \mathbb{C}$ keine inneren Punkte in $\mathbb{C}$ haben. Man kann zeigen, dass Julia-Mengen andererseits stets „reichhaltig“ sind.

Satz 6.18 *Ist $f \in \mathcal{E}$, so ist $J(f)$ perfekt.*[22]

[21] Die Dichtheit von $O^-(z)$ in $J(f)$ kann genutzt werden, um Bilder von $J(f)$ zu erzeugen. Man startet mit einem beliebigen $z \in J(f) \setminus M(f)$ und berechnet sukzessive die entsprechenden Urbildmengen. Die Vereinigung dieser Mengen füllt $J(f)$ dicht auf.

[22] Eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes heißt perfekt, falls jeder Punkt der Menge Häufungspunkt der Menge ist.

Beweis. Nach Bemerkung 6.15 ist $J = J(f)$ unendlich. Ist $a \in J$, so ist auch $J \setminus O^+(a)$ unendlich.

> Denn: Ist $f(a)$ periodischer Punkt, so ist die Behauptung klar. Ist $f(a)$ kein periodischer Punkt, so ist $O^-(f(a))$ unendlich nach Bemerkung 6.15. Ist $z \in O^-(f(a))$, so ist $z \notin O^+(a)$ (sonst wäre $z = f^{\circ k}(a)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, also $f(a) = f^{\circ(n+k-1)}(f(a))$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $f^{\circ n}(z) = f(a)$, und damit $f(a)$ periodisch).

Ist nun U offen mit $a \in U$, so existert nach Satz 6.16 ein $w \in O^+(U \cap J) \setminus O^+(a)$. Sind $\zeta \in U \cap J$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{\circ n}(\zeta) = w$, so ist $\zeta \neq a$. Also ist a Häufungspunkt von J. □

Bemerkung 6.19 Da $J(f)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist, ist $J(f)$ (mit der Betragsmetrik) ein vollständiger metrischer Raum. Aus der Perfektheit folgt insbesondere, dass $J(f)$ lokal überabzählbar ist ([Ü]).

Wir werden nun zeigen, dass für viele $z \in J(f)$ auch der Vorwärtsorbit $O^+(z)$ dicht in $J(f)$ ist. Vorbereitend zeigen wir mithilfe des Satzes von Baire[23]:

Satz 6.20 (Universalitätskriterium) *Es seien (X, d_X) ein vollständiger und (Y, d_Y) ein separabler metrischer Raum. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C(X, Y)$. Ist*

$$D := \{x \in X : \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \text{ dicht in } Y\},$$

so ist D eine G_δ-Menge und folgende Aussagen sind äquivalent:

a) Für alle offenen, nichtleeren Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f_n(U) \cap V \neq \varnothing.$$

b) D ist dicht in X.[24]

Beweis. Es sei $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ dicht in Y und

$$\mathcal{U} := \{U_{1/k}(y_j) : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann enthält jede offene, nichtleere Teilmenge von Y eine Menge aus $\mathcal{U}$. Es sei $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathcal{U}$. Dann ist $x \in D$ genau dann, wenn zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f_n(x) \in W_m$, das heißt $x \in f_n^{-1}(W_m)$. Also ist

$$D = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} O_m,$$

[23] Siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Funktionalanalysis/Funktionalanalysis_WS1819, Satz 2.1

[24] Elemente von D werden als universelle Elemente bezüglich (f_n) bezeichnet. Daher der Name Universalitätskriterium.

wobei $O_m := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(W_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ offen ist. Insbesondere ist D eine G_δ-Menge. Weiter gilt a) genau dann, wenn O_m dicht in X ist für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit ist die Implikation b) $\Rightarrow$ a) klar und die Implikation a) $\Rightarrow$ b) eine Folgerung aus dem Satz von Baire. □

Satz 6.21 *Es sei $f \in \mathcal{E}$. Dann ist die Menge der Punkte $z \in J(f)$, deren Orbit $O^+(z)$ dicht in $J(f)$ ist, eine dichte G_δ-Menge in $J(f)$.*

Beweis. Nach Bemerkung 6.17 ist der vollständige metrische Raum $J = J(f)$ separabel. Es sei $f_n : J \to J$ definiert durch $f_n(z) := f^{\circ n}(z)$ für $z \in J$. Nach Satz 6.16 ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(U \cap J) = O^+(U \cap J) \supset J \setminus M(f)$$

für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ mit $U \cap J \neq \varnothing$. Da $J \setminus M(f)$ nach Satz 6.18 dicht in $J(f)$ ist, ist insbesondere die Bedingung a) aus dem Universalitätskriterium erfüllt (man beachte: A ist offen in J genau dann, wenn $A = U \cap J$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ gilt). Aus dem Universalitätskriterium ergibt sich die Behauptung. □

Beispiel 6.22 Wir betrachten noch einmal $f(z) = z^2$, also $f^{\circ n}(z) = z^{2^n}$. Hier gibt es eine dichte Menge periodischer Punkte in $J(f) = \mathbb{S}$, denn es gilt für $z \in \mathbb{S}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$f^{\circ n}(z) = z^{2^n} = z$$

genau dann, wenn $z^{2^n-1} = 1$, also genau dann, wenn z eine $(2^n - 1)$-te Einheitswurzel ist. Die Menge

$$\{z \in \mathbb{S} : z^{2^n-1} = 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

dieser periodischen Punkte von f ist dicht in $\mathbb{S}$. Vorwärtsorbits periodischer Punkte sind – als endliche Mengen – natürlich nicht dicht in $\mathbb{S}$. Allerdings existiert nach Satz 6.21 auch eine dichte G_δ-Menge von Punkten $z \in \mathbb{S}$ so, dass der Vorwärtsorbit $\{z^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{S}$ liegt. Es zeigt sich also, dass kleinste Veränderungen in den Startwerten z völlig unterschiedliches Verhalten der Iteriertenfolge (z^{2^n}) bewirken können. Die Dynamik auf der Julia-Menge erweist sich als extrem kompliziert.

Als weitere Anwendung des Reskalierungssatzes beweisen wir abschließend, dass stets viele periodische Punkte in der Julia-Menge existieren.

Satz 6.23 *Es sei $f \in \mathcal{E}$. Dann ist $J(f)$ der Abschluss der Menge der abweisenden periodischen Punkte.*

Beweis. Wir betrachten die Menge D aller Punkte in $J(f)$, deren Vorwärtsorbit dicht in $J(f)$ ist. Nach Satz 6.21 ist D dicht in $J(f)$. Da abweisende periodische Punkte stets in $J(f)$ liegen, reicht es zu zeigen: Ist $a \in D$ und ist $U \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung von a, so existiert ein abweisender periodischer Punkt in U.
Es seien also $a \in D$ und U eine offene Umgebung von a. Nach dem Reskalierungssatz existieren Folgen (a_k) mit $a_k \to a$, (ρ_k) mit $\rho_k \to 0$, (n_k) sowie eine nicht konstante ganze Funktion g so, dass für $\varphi_k = \varphi_{a_k,\rho_k}$

$$f^{\circ n_k} \circ \varphi_k \to g \quad (k \to \infty)$$

und $\varphi_k \to a$ gleichmäßig auf allen Mengen $M \Subset \mathbb{C}$ gilt (wobei $k \geq k_M$). Da $J(f)$ perfekt ist und g nach dem kleinen Satz von Picard höchstens einen Wert auslässt, ist $O^+(a) \cap U \cap g(\mathbb{C})$ nichtleer. Es sei $w \in \mathbb{C}$ mit $g(w) \in O^+(a) \cap U$. Dann existiert eine offene Umgebung V von w mit $g(V) \subset U$ und $g'(z) \neq 0$ für $z \in V \setminus \{w\}$. Da $g(V \setminus \{w\})$ offen ist, existieren weiterhin ein $j \in \mathbb{N}$ und ein ζ in $V \setminus \{w\}$ mit $g(\zeta) = f^{\circ j}(a)$. Da ζ Nullstelle von $g - f^{\circ j}(a)$ ist und

$$f^{\circ n_k} \circ \varphi_k - f^{\circ j} \circ \varphi_k \to g - f^{\circ j}(a) \quad (k \to \infty)$$

gleichmäßig auf allen $M \Subset \mathbb{C}$ gilt, existieren nach Bemerkung 3.13 (Hurwitz) Punkte ζ_k mit $\zeta_k \to \zeta$ und

$$f^{\circ n_k}(\varphi_k(\zeta_k)) = f^{\circ j}(\varphi_k(\zeta_k))$$

für k genügend groß. Also ist $\eta_k := f^{\circ j}(\varphi_k(\zeta_k))$ ein Fixpunkt von $f^{\circ(n_k - j)}$ und damit ein periodischer Punkt von f für k genügend groß. Aus $\varphi_k(\zeta_k) \to a$ folgt

$$\eta_k \to f^{\circ j}(a) = g(\zeta) \in U$$

für $k \to \infty$, also $\eta_k \in U$ für k genügend groß. Schließlich gilt, wieder für k genügend groß,

$$(f^{\circ n_k} \circ \varphi_k)'(\zeta_k) = (f^{\circ(n_k-j)} \circ f^{\circ j} \circ \varphi_k)'(\zeta_k) = (f^{\circ(n_k-j)})'(\eta_k) \cdot (f^{\circ j})'(\varphi_k(\zeta_k)) \cdot \rho_k.$$

Aus

$$(f^{\circ j})'(\varphi_k(\zeta_k)) \cdot \rho_k \to (f^{\circ j})'(a) \cdot 0 = 0 \quad (k \to \infty)$$

und

$$(f^{\circ n_k} \circ \varphi_k)'(\zeta_k) \to g'(\zeta) \neq 0 \quad (k \to \infty)$$

folgt $(f^{\circ(n_k-j)})'(\eta_k) \to \infty$ für $k \to \infty$ und damit sind die η_k abweisend für k genügend groß. □

7 Rungetheorie

Wir wollen der Frage nachgehen, inwiefern holomorphe Funktionen auf offenen Mengen durch Polynome oder rationale Funktionen lokal gleichmäßig approximiert werden kann. Ist Ω offen mit Löchern, so kann man im Allgemeinen nicht jede Funktion in $H(\Omega)$ durch Polynome lokal gleichmäßig approximieren:

Beispiel 7.1 Es sei $\Omega = \mathbb{C}^*$ und $f(z) = 1/z$ für $z \in \Omega$. Ist $r > 0$, so existiert keine Folge (p_n) von Polynomen mit $p_n \to f$ gleichmäßig auf $K_r(0)$.

Denn angenommen, doch. Dann folgt mit Bemerkungen 1.8 und 1.9

$$0 = \int_{k_r(0)} p_n \to \int_{k_r(0)} f = 2\pi i \qquad (n \to \infty).$$

Widerspruch!

Bemerkung und Definition 7.2 Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Für $M \subset C(K)$ bezeichnen wir im Weiteren mit $\overline{\text{span}}(M)$ den Abschluss des linearen Spanns von M im Banachraum $(C(K), ||\cdot||_{\infty,K})$. Damit schreiben wir

$$P(K) := \overline{\text{span}}\{z \mapsto z^n|_K : n \in \mathbb{N}_0\}$$

für den Abschluss der Polynome in $C(K)$, also die Menge aller Funktionen in $C(K)$, die in der Supremumsnorm auf K beliebig genau durch Polynome approximierbar sind. Ist $g_a : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ für $a \in \mathbb{C}_\infty$ definiert durch

$$g_a(z) := \begin{cases} (a-z)^{-1}, & \text{falls } a \in \mathbb{C} \\ z, & \text{falls } a = \infty \end{cases},$$

so setzen wir allgemeiner für $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$

$$R_A(K) := \overline{\text{span}}\{(g_a|_K)^n : a \in A,\, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen ist $P(K) = R_{\{\infty\}}(K)$. Mittels Partialbruchzerlegung kann man zeigen ([Ü]), dass $\text{span}\{(g_a|_K)^n : a \in A,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ der Menge der rationalen Funktionen mit Polen nur in A entspricht.[25] Damit ist $R_A(K)$ die Menge aller Funktionen in $C(K)$, die in der Supremumsnorm auf K beliebig genau durch rationale Funktionen mit Polen ausschließlich in A approximierbar sind.

Beispiel 7.3 Es seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 < r \le R < \infty$. Ist $K := B_R(a)$, so ergibt sich für alle offenen Mengen $\Omega \supset B_R(a)$ und $f \in H(\Omega)$ aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Taylor-Reihe

$$f|_K \in P(K).$$

[25] Wir sprechen bei rationalen Funktionen f von einem Pol an ∞, falls $f(z) \to \infty$ für $|z| \to +\infty$ gilt.

Für den Kreisring $K := \{z : r \leq |z-a| \leq R\} = B_R(a) \setminus U_r(a)$ folgt aus der Laurent-Entwicklung für alle auf einer offenen Obermenge von K holomorphen Funktionen f

$$f|_K \in R_{\{a,\infty\}}(K).$$

Vorbereitend für das Weitere beweisen zunächst einen Approximationssatz für spezielle Cauchyintegrale.

Satz 7.4 *Es seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\gamma := s_u^v$ eine orientierte Strecke in $\mathbb{C} \setminus K$. Dann gilt für alle Funktionen $f \in C[u,v]$*

$$C_\gamma f \in \overline{\operatorname{span}}\{g_a|_K : a \in [u,v]\}\ .$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $[u,v] \times K \ni (\zeta, z) \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z) \in \mathbb{C}$ (gleichmäßig) stetig auf der kompakten Menge $[u,v] \times K \subset \mathbb{C}^2$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta')}{\zeta' - z} \right| < \varepsilon$$

für alle $\zeta, \zeta' \in [u,v]$ mit $|\zeta - \zeta'| < \delta$ und alle $z \in K$.
Weiterhin existieren $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ so, dass für $\gamma_j := s_u^v|_{[t_{j-1}, t_j]}$

$$|\zeta - \zeta'| < \delta \qquad (\zeta, \zeta' \in \gamma_j^*,\ j = 1, \ldots, n)$$

gilt. Wählt man $a_j \in \gamma_j^* \subset [u,v]$ und setzt damit $c_j := f(a_j) \int_{\gamma_j} d\zeta$ für $j = 1, \ldots, n$, so folgt für $z \in K$

$$\begin{aligned} \left| 2\pi i\, C_\gamma f(z) - \sum_{j=1}^n c_j \frac{1}{a_j - z} \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \left(\int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_j} \frac{f(a_j)}{a_j - z}\, d\zeta \right) \right| \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^n L(\gamma_j) = \varepsilon \cdot L(\gamma) = \varepsilon |v - u|. \end{aligned}$$

Also ist $\|C_\gamma f - (2\pi i)^{-1} \sum_{j=1}^n c_j g_{a_j}\|_{\infty, K} \leq \varepsilon |v-u|/2\pi$. □

Der folgende Satz ist für die weiteren Überlegungen in diesem Abschnitt von zentraler Bedeutung.

Satz 7.5 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset \Omega$ kompakt und $0 < d < dist(K, \partial\Omega)/\sqrt{2}$. Dann existiert ein in Ω nullhomologer Zyklus $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ mit $\gamma^* \cap K = \varnothing$ und $\operatorname{ind}(\gamma, \cdot)|_K = 1$, wobei $\gamma_\iota = s_{a_\iota}^{b_\iota}$ für gewisse $a_\iota, b_\iota \in d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$ mit $|b_\iota - a_\iota| = d$.*

Beweis. Es seien $Q_1, \ldots, Q_N$ die kompakten Quadrate der Seitenlänge d mit Ecken in $d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$, die K treffen[26]. Für $L := \bigcup_{n=1}^N Q_n$ gilt dann

$$K \subset L^\circ \subset L \subset \Omega.$$

[26] Sind A, B Mengen, so sagen wir, dass A die Menge B trifft, falls $A \cap B$ nichtleer ist.

> Denn: Aus der Definition der Q_n folgt $K \subset L$ und $K \cap \partial L = \varnothing$. Ist $n \in \{1, \dots, N\}$ und ist $z_n \in Q_n \cap K$, so gilt $B_{d\sqrt{2}}(z_n) \subset \Omega$. Wegen $\operatorname{diam}(Q_n) = d\sqrt{2}$ ist $Q_n \subset \Omega$.

Ist Q ein beliebiges kompaktes Quadrat mit Ecken a, b, c, d (positiv orientiert), so ist $\partial Q = \gamma_Q^*$, wobei

$$\gamma_Q := \left(s_a^b, s_b^c, s_c^d, s_d^a\right)$$

ein geschlossener Pfad ist. Dabei gilt ([Ü])

$$\operatorname{ind}(\gamma_Q, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in Q^\circ \\ 0, & \text{falls } z \notin Q \end{cases}.$$

Wir betrachten nun diejenigen, in entsprechender Weise orientierten Seiten der Quadrate Q_n, deren Spur zum Rand ∂L von L gehört, und bezeichnen das resultierende Tupel mit $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$. Dann ist $\gamma_\iota = s_{a_\iota}^{b_\iota}$ für gewisse $a_\iota, b_\iota \in d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$ mit $|b_\iota - a_\iota| = d$. Aus der Konstruktion der γ_ι ergibt sich, dass für eine geeignete Zerlegung $(I_\kappa)_{\kappa \in M}$ von I die Ketten $(\gamma_\iota)_{\iota \in I\kappa}$ geschlossene Pfade sind. Damit ist $\gamma := (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ ein Zyklus und es gilt

$$\gamma^* = \bigcup_{\iota \in I} \gamma_\iota^* = \partial L \subset \Omega \setminus K.$$

Nach Konstruktion ist

$$\operatorname{ind}(\gamma, z) = \sum_{\iota \in I} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\iota} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{ind}(\gamma_{Q_n}, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in \bigcup_{n=1}^N Q_n^\circ \\ 0, & \text{falls } z \notin L \end{cases}$$

(man beachte: die auf der linken Seite ,,fehlenden” Strecken werden je zweimal in entgegengesetzter Orientierung durchlaufen und damit entfallen die entsprechenden Integrale). Aus Stetigkeitsgründen gilt $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 1$ auch für beliebiges $z \in L^\circ$ und damit insbesondere für alle $z \in K$. □

Satz 7.6 (**Satz von Runge für kompakte Mengen**)
Es seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und f holomorph auf einer offenen Menge $\Omega \supset K$.

1. *Trifft $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, so ist $f|_K \in R_A(K)$.*
2. *Ist $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ zusammenhängend, so gilt $f|_K \in P(K)$.*

Beweis. Es genügt, die erste Aussage zu beweisen. Die zweite ergibt sich als Spezialfall der ersten mit $A = \{\infty\}$.
Es sei $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ wie in Satz 7.5. Dann gilt nach dem Cauchytheorem

$$f|_K = (C_\gamma f)|_K = \sum_{\iota \in I} (C_{\gamma_\iota} f)|_K \;.$$

Da $\gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus K$ gilt, ist f Summe von Cauchyintegralen wie in Satz 7.4. Also reicht es nach Satz 7.4, zu zeigen, dass $g_a|_K \in R_A(K)$ für alle $a \in \mathbb{C} \setminus K$ gilt. Dazu sei G eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Wir zeigen: Für alle $a \in G$ ist $g_a|_K \in R_A(K)$.
Ist $\varphi : G \to C(K)$ definiert durch

$$\varphi(a) := g_a|_K \qquad (a \in G),$$

so ist φ stetig.

> Denn: Es seien $a \in G$ und $\delta := \operatorname{dist}(a, K)$. Ist (a_n) eine Folge in G mit $a_n \to a$, so ist $\operatorname{dist}(a_n, K) \geq \delta/2$ für n genügend groß. Aus
>
> $$\frac{1}{a_n - z} - \frac{1}{a - z} = \frac{a - a_n}{(a_n - z)(a - z)}$$
>
> folgt
>
> $$\|g_{a_n} - g_a\|_{\infty,K} \leq \frac{2}{\delta^2}\,|a - a_n| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Wir setzen $V := \varphi^{-1}\big(R_A(K)\big)$. Dann ist $V \subset G$ abgeschlossen, da $R_A(K) \subset C(K)$ abgeschlossen ist.
Wir zeigen: V ist nichtleer und offen. Da G ein Gebiet ist, ist dann schon $V = G$ und damit $g_a|_K \in R_A(K)$ für alle $a \in G$.
1. Nach Definition ist $A \cap G \subset V$. Ist G beschränkt, so ist G auch eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Nach Voraussetzung existiert ein $b \in A \cap G (\subset V)$. Ist G die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so ist $G_\infty := G \cup \{\infty\}$ die Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, die ∞ enthält. Ist $b \in A \cap G_\infty$, so ist im Falle $b \neq \infty$ wieder $b \in A \cap G \subset V$. Ist $b = \infty$, so ist $g_a|_K \in P(K) = R_{\{\infty\}}(K) \subset R_A(K)$ für $|a| > \max_{z \in K} |z|$, da

$$g_a(z) = \frac{1}{a - z} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1 - z/a} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\nu+1}}\, z^\nu$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf K gilt. Also ist auch in diesem Fall $V \neq \varnothing$.
2. Es sei $b \in V$, das heißt, es ist $g_b \in R_A(K)$. Ist $\delta := \operatorname{dist}(b, K)$, so gilt für $a \in U_{\delta/2}(b)$

$$g_a(z) = \frac{1}{b - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b-a}{b-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b - a)^\nu \frac{1}{(b - z)^{\nu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b - a)^\nu g_b^{\nu+1}(z)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf K (beachte: $\left|\frac{b-a}{b-z}\right| \leq 1/2$). Da $R_A(K)$ eine Algebra ist ([Ü]), ist mit $g_b|_K$ auch $(g_b|_K)^n$ in $R_A(K)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist auch $g_a|_K \in R_A(K)$. □

Der Satz von Runge in der obigen Form gibt Auskunft über die gleichmäßige Approximierbarkeit auf kompakten Mengen K für Funktionen f, die holomorph auf einer offenen Umgebung von K sind. Eine natürlichere Fragestellung im Falle holomorpher Funktionen ist die nach lokal gleichmäßiger Approximierbarkeit, etwa durch Polynome oder rationale Funktionen auf offenen Mengen Ω.

Satz 7.7 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(K_m) = \big(K_m(\Omega)\big)$ die Standardausschöpfung von Ω. Dann enthält jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$ eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.*

Beweis. Es sei G eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$. Es reicht zu zeigen, dass $G \setminus \Omega$ nichtleer ist, denn dann ist für $\zeta \in G \setminus \Omega$ aufgrund der Definition von Komponenten (Bemerkung A.10) die Komponente L von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ mit $\zeta \in L$ schon in G enthalten.
Ist G die Komponente, die ∞ enthält, so ist $\infty \in G \setminus \Omega$. Ist G eine weitere Komponente (falls existent), so ist $G \subset B_m(0)$ nach Definition von K_m. Ist $z \in G$, so existiert, wieder nach Definition von K_m, ein $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ mit $|z - \zeta| < 1/m$. Dann gilt $z \in U_{1/m}(\zeta) \subset \mathbb{C} \setminus K_m$. Da $U_{1/m}(\zeta)$ zusammenhängend ist, ergibt sich $U_{1/m}(\zeta) \subset G$, also insbesondere $\zeta \in G$. □

Satz 7.8 (**Satz von Runge für offene Mengen**)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

1. *Trifft $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, so existiert zu jedem $f \in H(\Omega)$ eine Folge (r_n) rationaler Funktionen mit Polen nur in A und $r_n \to f$ in $H(\Omega)$.*

2. *Ist $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ zusammenhängend, so existiert zu jedem $f \in H(\Omega)$ eine Polynomfolge (p_n) mit $p_n \to f$ in $H(\Omega)$.*

Beweis. Es reicht, die erste Aussage zu zeigen (dann folgt die zweite wieder mit $A := \{\infty\}$). Dazu sei (K_m) die Standardausschöpfung von Ω. Sind $m \in \mathbb{N}$ und G eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$, so existiert nach Satz 7.7 eine Komponente L_m von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ mit $L \subset G$. Damit ist $\varnothing \neq A \cap L \subset A \cap G$. Nach Satz 7.6 existiert eine Funktion $r_m \in \operatorname{span}\{g_a^\nu : a \in A, \nu \in \mathbb{N}_0\}$ (also ist r_m rational mit Polen nur in A) und

$$\|f - r_m\|_{\infty, K_m} < 1/m.$$

Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist $K \subset K_m$ für m genügend groß, also $\|f - r_m\|_{\infty,K} < 1/m$ für m genügend groß. □

Satz 7.9 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *$\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ ist zusammenhängend.*

b) *Für alle $f \in H(\Omega)$ existiert eine Polynomfolge (p_n) mit $p_n \to f$ in $H(\Omega)$.*

c) *Für jeden Zyklus γ in Ω und jede Funktion $f \in H(\Omega)$ gilt $\int_\gamma f = 0$.*

d) *Jeder Zyklus in Ω ist Ω-nullhomolog.*

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) ist Satz 7.8.2.
b) $\Rightarrow$ c): Für Polynome p gilt stets $\int_\gamma p = 0$ (p hat eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$). Sind p_n Polynome mit $p_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so folgt durch Vertauschung von Integral und Grenzwert auch $\int_\gamma f = 0$.
c) $\Rightarrow$ d) folgt aus dem Cauchytheorem.
d) $\Rightarrow$ a): Angenommen, $M := \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ ist nicht zusammenhängend. Dann existieren zwei disjunkte, in M abgeschlossene und nichtleere Mengen K, L mit $M = L \cup K$. Da M abgeschlossen in $\mathbb{C}_\infty$ ist, sind auch K, L abgeschlossen in $\mathbb{C}_\infty$. Ohne Einschränkung sei $\infty \in L$. Ist $U := \mathbb{C} \setminus L$, so ist U offen in $\mathbb{C}$ und $K \subset U$ kompakt. Nach Satz 7.5 existiert ein Zyklus γ in $U \setminus K = \Omega$ mit $\operatorname{ind}(\gamma, \cdot)|_K = 1$. Damit ist γ nicht Ω-nullhomolog. Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung 7.10 Hat $\Omega \subset \mathbb{C}$ keine Löcher, so ist jeder Zyklus in Ω auch Ω-nullhomolog. Also gelten dann alle Aussagen aus Satz 7.9. Insbesondere ist $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ zusammenhängend.[27]

Im Rest des Abschnitts beschäftigen wir uns mit Anwendungen der Rungesätze. Eine eher spielerische liegt in der Konstruktion von Funktionenfolgen mit ungewöhnlichen Eigenschaften. Ein typisches Beispiel ist

Satz 7.11 *Es existiert eine Polynomfolge (p_n) mit $p_n \to 0$ $(n \to \infty)$ punktweise auf $\mathbb{C}$ und so, dass*
$$\sup_U |p_n| \to \infty \qquad (n \to \infty)$$
für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ mit $U \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ seien
$$L_n := B_n(0) \cap \big(\{\operatorname{Im} z \leq 0\} \cup \{\operatorname{Im} z \geq 2/n\}\big)$$
und
$$M_n := B_n(0) \cap \{\operatorname{Im} z = 1/n\}$$
sowie $K_n := L_n \cup M_n$. Dann ist $K_n \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ zusammenhängend.
Ist $U_n \supset M_n$ offen mit $L_n \cap \overline{U_n} = \varnothing$ und $\Omega_n := U_n \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{U_n})$, so ist $K_n \subset \Omega_n$ sowie
$$f_n := n 1_{U_n}|_{\Omega_n} \in H(\Omega_n).$$
Also existiert nach Satz 7.6.2 ein Polynom p_n mit
$$\max_{K_n} |f_n - p_n| < \frac{1}{n}.$$

[27] Wie bereits früher angedeutet kann man zeigen, dass umgekehrt offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$, für die $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ zusammenhängend ist, keine Löcher haben. Dies klingt zwar sehr einleuchtend, ist aber nicht so leicht zu beweisen; siehe etwa Kapitel 13 in R. Remmert, Funktionentheorie II, Springer, Berlin, 1991.

Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist $z \in L_n$ für n genügend groß. Aus $f_n(z) = 0$ für n genügend groß ergibt sich $p_n(z) \to 0$ $(n \to \infty)$. Ist U offen mit $U \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$, so ist $U \cap M_n \neq \varnothing$ für n genügend groß. Wählt man $z_n \in U \cap M_n$, so gilt

$$\sup_U |p_n| \geq \left|p_n(z_n)\right| \geq \left|f_n(z_n)\right| - \left|f_n(z_n) - p_n(z_n)\right| \geq n - \frac{1}{n} \to \infty$$

für $n \to \infty$. □

Definition 7.12 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\varphi_a \in \operatorname{span}\{h \mapsto h^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ für $a \in \Omega$. Ist $\{a \in \Omega : \varphi_a \neq 0\}$ diskret in Ω, so heißt $(\varphi_a)_{a\in\Omega}$ eine **Hauptteilverteilung** in Ω.

Es stellt sich die Frage, ob zu jeder Hauptteilverteilung in Ω eine in Ω meromorphe Funktion so existiert, dass für alle $a \in \Omega$ die Laurent-Entwicklung um a den Hauptteil φ_a hat, also dass f an a einen Pol oder eine eine hebbare Singularität hat mit

$$\sum_{\nu=n(f,a)}^{-1} c_\nu(f,a)(z-a)^\nu = \varphi_a(z-a)$$

auf einer Umgebung von a. Ist $A := \{a \in \Omega : \varphi_a \neq 0\}$ endlich, so ist dies klar (die rationale Funktion $z \mapsto \sum_{a\in A} \varphi_a(z-a)$ ist geeignet). Mithilfe der Rungesätze kann man zeigen, dass die Frage ganz allgemein positiv beantwortet werden kann.

Satz 7.13 (**Mittag-Leffler**)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann existiert zu jeder Hauptteilverteilung $(\varphi_a)_{a\in\Omega}$ eine Funktion $f \in M(\Omega)$ mit Hauptteilen φ_a an a für alle $a \in \Omega$.

Beweis. Es sei wieder $(K_m)_m$ die Standardausschöpfung von Ω. Für $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir mit $K_0 := \varnothing$ und $A := \{a \in \Omega : \varphi_a \neq 0\}$

$$A_m := A \cap (K_{m+1} \setminus K_m)$$

und (mit $\sum_\varnothing := 0$)

$$q_m(z) := \sum_{a\in A_m} \varphi_a(z-a) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus A_m)$$

(man beachte: A_m ist endlich, da A diskret in Ω ist). Dann ist $q_m \in H(\mathbb{C} \setminus A_m)$. Da nach Satz 7.7 jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$ einen Punkt aus $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ enthält, gilt

$$q_m|_{K_m} \in R_{\mathbb{C}_\infty\setminus\Omega}(K_m)$$

nach Satz 7.6. Also existiert eine rationale Funktion $r_m \in H(\Omega)$ so, dass

$$\|q_m|_{K_m} - r_m\|_{\infty,K_m} < \frac{1}{1+m^2}$$

(dabei sei $r_m = 0$, falls $K_m = \varnothing$). Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} (q_\nu - r_\nu)$ gleichmäßig auf K_m. Daher ist durch

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \big(q_\nu(z) - r_\nu(z)\big) \qquad (z \in \Omega \setminus A)$$

eine Funktion $f \in H(\Omega \setminus A)$ definiert (beachte: die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig auf $\Omega \setminus A$). Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist dabei $f = g_m + \sum\limits_{\nu=0}^{m-1} q_\nu$ mit

$$g_m := \sum_{\nu=m}^{\infty} (q_\nu - r_\nu) - \sum_{\nu=0}^{m-1} r_\nu \in H(\Omega \setminus \bigcup_{\nu=m}^{\infty} A_\nu).$$

Da $K_m \subset \Omega \setminus \bigcup_{\nu=m}^{\infty} A_\nu$ ist, hat f in K_m genau die vorgeschriebenen Pole mit entsprechenden Hauptteilen. Da m beliebig war, folgt die Behauptung. □

Ist (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to -\infty$, so gilt $\exp(z + a_n) \to 0$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ für $n \to \infty$. Definiert man für $a \in \mathbb{C}$ den **Translationsoperator** $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ durch

$$(T_a f)(z) := f(z + a) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

so gilt also

$$T_{a_n} \exp \to 0 \quad (n \to \infty)$$

in $H(\mathbb{C})$. Als weitere Anwendung der Rungesätze für polynomiale Approximation zeigen wir, dass bei vielen ganzen Funktionen das Verhalten unter Translationen wesentlich komplizierter ist.

Bemerkung 7.14 Wir betrachten den Raum $(H(\Omega), d_{\text{loc}})$ (Bemerkung 3.8) und setzen für $f \in H(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ und $K \subset \Omega$ kompakt

$$V_\varepsilon(f, K) := \{g \in H(\Omega) : \|f - g\|_{\infty,K} < \varepsilon\} \;= f + V_\varepsilon(0, K).$$

Sind $f \in H(\Omega)$ und $U \subset H(\Omega)$, so gilt damit ([Ü]): U ist eine Umgebung von f genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ und eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ existieren mit $V_\varepsilon(f, K) \subset U$.
Ist $\Omega = \mathbb{C}$, so ist $H(\mathbb{C})$ separabel, da die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ eine dichte Teilmenge in $H(\mathbb{C})$ bilden. Da Konvergenz in $H(\mathbb{C})$ lokal gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{C}$ entspricht, ist $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ für jedes $a \in \mathbb{C}$ stetig.

Satz 7.15 *Es sei (a_n) eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann existiert eine dichte G_δ-Menge von Funktionen $f \in H(\mathbb{C})$ so, dass die Menge der Translationen $T_{a_n} f$ dicht in $H(\mathbb{C})$ ist.*

Beweis. Wir beweisen a) aus dem Universalitätskriterium für die Folge (T_{a_n}). Die dazu äquivalente Bedingung b) und die Tatsache, dass D eine G_δ-Menge ist, ergeben dann die Behauptung.

Es seien also $\varnothing \neq U, V \subset H(\mathbb{C})$ offen. Dann existieren $g, h \in H(\mathbb{C})$ und $\varepsilon, R > 0$ mit $V_\varepsilon(g, B_R(0)) \subset U$ sowie $V_\varepsilon(h, B_R(0)) \subset V$. Mit $B := B_R(0)$ reicht es, zu zeigen: Es existiert ein n mit

$$T_{a_n}(V_\varepsilon(g,B)) \cap V_\varepsilon(h,B) \neq \varnothing.$$

Ist n mit $R_n := |a_n|/2 > R$, so ist $K := B \cup B_R(a_n) \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ zusammenhängend. Definiert man

$$\varphi(z) := \begin{cases} g(z), & z \in U_{R_n}(0) \\ h(z-a_n) = (T_{-a_n}h)(z), & z \in U_{R_n}(a_n) \end{cases},$$

so ist φ holomorph in $U_{R_n}(0) \cup U_{R_n}(a_n)$ (da $U_{R_n}(0) \cap U_{R_n}(a_n) = \varnothing$). Nach Satz 7.6.2 existiert ein Polynom p mit

$$\|\varphi - p\|_{\infty,K} < \varepsilon.$$

Also ist sowohl $\|g-p\|_{\infty,B} < \varepsilon$, d. h. $p \in V_\varepsilon(g,B)$, als auch

$$\|h - T_{a_n}p\|_{\infty,B)} = \|T_{-a_n}h - p\|_{\infty,B_R(a_n)} < \varepsilon\ ,$$

d. h. $T_{a_n}p \in V_\varepsilon(h,B)$. □

8 Gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen

Wir untersuchen nun wieder gleichmäßige Approximation auf kompakten Mengen K in $\mathbb{C}$. Wir setzen

$$R(K) := R_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(K).$$

Nach dem Rungesatz 7.6 gilt $f \in R(K)$ für alle f, die auf einer offenen Obermenge von K holomorph sind. Ist $f \in R(K)$, so gilt insbesondere $f|_{K^\circ} \in H(K^\circ)$. Mit

$$A(K) := \{f \in C(K) : f|_{K^\circ} \text{ holomorph}\}$$

ist also $P(K) \subset R(K) \subset A(K)$. Im Fall $K^\circ = \varnothing$ ist $A(K) = C(K)$. B. 7.1 zeigt, dass $P(\mathbb{S}) \neq C(\mathbb{S})$ gilt. Wir zeigen, dass auch kompakte Mengen K existieren mit $R(K) \neq A(K)$. Die entsprechenden Kompakta nennt man auch Schweizer Käse[28].

Bemerkung 8.1 Es sei $(a_j, r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{D} \times (0, \infty)$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j^2 < 1$ und so, dass die abgeschlossenen Kreise $B_j := B_{r_j}(a_j) \subset \mathbb{D}$ paarweise disjunkt sind. Dann ist mit $U_j := U_{r_j}(a_j)$

$$K := K((a_j, r_j)_j) := \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$$

kompakt und jeder Kreis U_j eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Ist zusätzlich $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ dicht in $\overline{\mathbb{D}}$, so gilt $K^\circ = \varnothing$ (Schweizer Käse ohne innere Punkte).
Solche K existieren und können zudem so gewählt werden, dass $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j < 1$ gilt: Es sei dazu $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$. Wir setzen $a_1 := 0$, $r_1 := 1/3$ und definieren a_j, r_j für $j > 1$ induktiv: Sind $a_1, \ldots, a_j \in \mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ und $r_1, \ldots, r_j$ mit $0 < r_j \le 1/3^j$ und $B_1 \ldots, B_j \subset \mathbb{D}$ paarweise disjunkt, so ist $\lambda_2(\bigcup_{k=1}^j B_k) \le \pi \sum\limits_{k=1}^{j} 1/9^k < \pi$, also $\mathbb{D} \setminus \bigcup_{k=1}^j B_k \neq \varnothing$. Wir setzen $n_{j+1} := \min\left\{n \in \mathbb{N} : w_n \notin \bigcup_{k=1}^j B_k\right\}$ und $a_{j+1} := w_{n_{j+1}}$. Wählen wir dazu $0 < r_{j+1} \le 1/3^{j+1}$ mit $B_{r_{j+1}}(a_{j+1}) \subset \mathbb{D}$ und $B_{r_{j+1}}(a_{j+1}) \cap \bigcup_{k=1}^j B_k = \varnothing$, so hat das durch die Folge $(a_j, r_j)_j$ definierte Kompaktum K die obigen Eigenschaften mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j \le 1/2$.[29]

Satz 8.2 *Es sei* $K = K((a_j, r_j)_j)$ *mit* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j < \infty$. *Ist* $f \in R(K)$, *so gilt*

$$\int_{k_1(0)} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{k_{r_j}(a_j)} f$$

und $\left|\int_{k_1(0)} f\right| \le 2\pi \max_k |f| \sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j$.

[28] eingeführt 1938 von A. Roth, einer Mathematikerin aus der Schweiz

[29] Es gilt $\lambda_2(K) = \pi(1 - \sum\limits_{j=0}^{\infty} r_j^2) > 0$. Genauer können zu jedem $\delta > 0$ die r_j so gewählt werden, dass $\lambda_2(K) > \pi(1 - \delta)$ gilt. Also kann die Fläche beliebig nahe an der Fläche des Einheitskreises liegen, obwohl K keine inneren Punkte hat.

Beweis. Es sei q rational mit Polen nur in $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Wir schreiben kurz $\gamma_j := k_{r_j}(a_j)$. Ist N so groß, dass alle Pole in $(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cup \bigcup\limits_{j=1}^{N} U_j$ liegen, so folgt mit dem Residuensatz für $n \geq N$

$$\int_{k_1(0)} q = 2\pi i \sum_{w \in P(q) \cap \mathbb{D}} \operatorname{res}(q, w) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} q.$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine rationale Funktion $q = q_\varepsilon$ mit Polen nur in $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ und $\|f - q\|_{\infty,K} < \varepsilon$. Für n genügend groß ergibt sich

$$\begin{aligned}\Big| \int_{k_1(0)} f \; - \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f \Big| &= \Big| \int_{k_1(0)} (f - q) - \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} (f - q) \Big| \\ &\leq \|f - q\|_{\infty,K} \cdot \Big(2\pi + 2\pi \sum_{j=1}^{n} r_j \Big) < 2\pi \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} r_j \Big) \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\int_{k_1(0)} f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma_j} f$. Damit ergibt sich auch

$$\Big| \int_{k_1(0)} f \Big| = \Big| \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma_j} f \Big| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \int_{\gamma_j} f \Big| \leq 2\pi \max_K |f| \sum_{j=1}^{\infty} r_j.$$

□

Bemerkung 8.3 Sind $K = K((a_j, r_j)_j)$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j < 1$ und $f(z) := \overline{z}$ für $z \in K$, so ist $f \in C(K)$ mit $|f| \leq 1$ und

$$\int_{k_1(0)} f = \int_{k_1(0)} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i\,,$$

also $f \notin R(K)$ nach Satz 8.2. Im Falle $K^\circ = \varnothing$ ist damit insbesondere

$$R(K) \neq C(K) = A(K).$$

Man kann zeigen:[30] Es gibt Schweizer Käse mit $K^\circ \neq \varnothing$ und so, dass $R(K) \neq A(K)$.

Wir wollen unter Verwendung weitergehender Hilfsmittel der (reellen) Analysis zeigen, dass $R(K) = C(K)$ für alle K mit $\lambda_2(K) = 0$ gilt (man beachte: in diesem Fall ist $C(K) = A(K)$).

Bemerkung 8.4 1. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann heißt

$$X' := \{\varphi : X \to \mathbb{K} : \varphi \text{ linear und stetig}\}$$

[30] Siehe etwa D. Gaier, Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, Basel 1980

der Dualraum von X. Aus dem Satz von Hahn-Banach ergibt sich unmittelbar folgende, für die Approximationstheorie zentrale Aussage:[31] Sind $L \subset X$ ein Unterraum und $x \in X$, so gilt $x \in \overline{L}$ genau dann, wenn für jedes $\varphi \in X'$ mit $\varphi \perp L$ (d. h. $\varphi|_L = 0$) auch $\varphi \perp x$ (d. h. $\varphi(x) = 0$) gilt.
2. Um die Aussage aus 1. zu nutzen, ist es für uns wichtig, Informationen über den Dualraum von $C(K)$ für kompakte $K \subset \mathbb{C}$ zu haben. Sind ν ein endliches Maß auf der Borel σ-Algebra $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{C})$ mit Träger in K und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ messbar mit $|h| = 1$, so ist durch

$$\mu(f) := \int f_0 h \, d\nu \quad (f \in C(K)),$$

wobei f_0 die durch 0 auf $\mathbb{C}$ fortgesetzte Funktion f bezeichnet, ein stetiges Funktional $\mu : C(K) \to \mathbb{C}$ gegeben. Wir schreiben dann auch $\mu = h\nu$ und

$$\int f \, d\mu := \int f(z) \, d\mu(z) := \mu(f).$$

Man kann zeigen: Jedes Funktional in $C(K)'$ ist von dieser Form.[32] Dies ist die wesentliche Aussage des Rieszschen Darstellungssatzes für $C(K)$.[33]

Bemerkung und Definition 8.5 Es seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mu \in C(K)'$. Dann ist die **Cauchy-Transformierte** $\widehat{\mu} : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ von μ definiert durch

$$\widehat{\mu}(w) := \int \frac{d\mu(z)}{z - w} \qquad (w \in \mathbb{C} \setminus K)$$

Man kann zeigen (im Wesentlichen mit geometrischer Reihe): $\widehat{\mu}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus K$ mit

$$\widehat{\mu}^{(k)}(w) = k! \int \frac{d\mu(z)}{(z - w)^{k+1}} \qquad (w \in \mathbb{C} \setminus K).$$

und $\widehat{\mu}(w) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^{-k}$ mit $c_{-k} = \int z^{k-1} \, d\mu(z)$ in $V_{R,\infty}(0)$ für $R = \max_K |\zeta|$.
Daraus ergibt sich leicht ([Ü]), dass für $\mu \in C(K)'$ folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\widehat{\mu} = 0$.

b) $\mu \perp R(K)$.

c) Trifft $B \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, so ist $\mu \perp R_B(K)$.

Dies zeigt insbesondere, dass $R_B(K) = R(K)$ für alle B wie in c) gilt.

Wir verwenden verschiedene Ergebnisse der reellen Analysis, die in der folgenden Bemerkung gesammelt sind:

[31] Siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Funktionalanalysis/Funktionalanalysis_WS1819.pdf, Satz 3.4

[32] Die Abbildung $\mathscr{B} \ni A \mapsto \mu(A) := \int 1_A h \, d\nu$ ist σ-additiv. Man spricht daher auch von einem komplexen Maß.

[33] Ein Beweis findet sich etwa in W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

Bemerkung 8.6 Für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ schreiben wir $C_c^k(\Omega)$ für den Raum aller $f \in C^k(\Omega)$ mit kompaktem Träger. Außerdem schreiben wir kurz $C_c^k := C_c^k(\mathbb{C})$ und $C_c := C_c^0(\mathbb{C})$.
1. Sind $f \in C_c$ und g (messbar und) lokal integrierbar auf $\mathbb{C}$, so existiert das Faltungsprodukt

$$(f * g)(z) := \int f(w)g(z-w)d\lambda_2(w)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und es ist $f*g \in C(\mathbb{C})$ mit $f*g = g*f$. Ist sogar $f \in C_c^1$, so ist $f*g \in C^1(\mathbb{C})$ mit

$$\overline{\partial}(f*g) = (\overline{\partial} f) * g$$

(Stichwort: Differenzierbarkeit von Parameterintegralen).
2. Aus

$$\int\limits_{B_R(a)} \frac{d\lambda_2(w)}{|a-w|} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{R} \frac{rdrd\theta}{r} = 2\pi R \qquad (R>0)$$

folgt, dass $1/(a-\cdot)$ lokal integrierbar ist. Insbesondere existiert für $f \in C_c$ das Faltungsprodukt $f*(1/\cdot)$.
3. Ist ν ein endliches Maß auf $\mathscr{B}$ mit kompaktem Träger, so ist die Funktion $N : \mathbb{C} \to [0,\infty]$, definiert durch

$$N(w) := \int \frac{d\nu(z)}{|z-w|},$$

lokal integrierbar auf $\mathbb{C}$ und insbesondere für λ_2-fast alle $w \in \mathbb{C}$ endlich.[34] Sind $K \subset \mathbb{C}$ kompakt $\mu = h\nu \in C(K)'$, so ist damit

$$\widehat{\mu}(w) := \int \frac{d\mu(z)}{z-w} = \int \frac{h(z)}{z-w}\, d\nu(z)$$

für λ_2-fast alle $w \in \mathbb{C}$ definiert und $\widehat{\mu}$ ist lokal integrierbar auf $\mathbb{C}$ (wobei $\widehat{\mu}$ etwa durch 0 auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt sei.)
4. Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und ist $f \in C(K)$, so existiert eine Funktion $F \in C_c$ mit $F|_K = f$ (Erweiterungssatz von Tietze).[35] Weiterhin ist C_c^∞ dicht in $(C_c, \|\cdot\|_\infty)$[36] und damit auch dicht in $C(K)$.

Satz 8.7 (Pompeiu-Formel) *Für $f \in C_c^1$ ist*

$$\pi f = (\overline{\partial} f) * (1/\cdot) = \overline{\partial}(f * (1/\cdot)).$$

Beweis. Für $a \in \mathbb{C}$ sei $f_a \in C^1(\mathbb{C}\setminus\{a\})$ definiert durch $f_a(w) := f(w)/(a-w)$. Dann gilt mit der Produktregel wegen der Holomorphie von $1/(a-\,\cdot)$

$$\overline{\partial} f_a = \overline{\partial} f/(a-\,\cdot).$$

[34] Siehe etwa J.B. Conway, Functions of a Complex Variable II, Springer, New York, 1995, Section 18.5.
[35] Siehe wieder etwa W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
[36] Siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Fourier_und_Laplace/Fourier_Laplace_SoSe2019.pdf, Satz 3.18

Da f kompakten Träger hat, ergibt sich aus dem Greenschen Satz[37] für $\varepsilon > 0$ genügend klein

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+\varepsilon e^{it})\,dt &= \frac{1}{2i}\int_{k_\varepsilon(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta = \frac{-1}{2i}\int_{k_\varepsilon(a)} f_a \\ &= \int_{V_{\varepsilon,\infty}(a)} \overline{\partial} f_a \,d\lambda_2 = \int_{V_{\varepsilon,\infty}(a)} \frac{\overline{\partial} f(w)}{a-w}\,d\lambda_2(w).\end{aligned}$$

Aus der lokalen Integrierbarkeit von $1/(a-\cdot)$ folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass die rechte Seite für $\varepsilon \to 0$ gegen $(\overline{\partial} f) * (1/\cdot)$ konvergiert. Die linke konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen $\pi f(a)$. Zudem gilt $(\overline{\partial} f) * (1/\cdot) = \overline{\partial}(f * (1/\cdot))$ nach Bemerkung 8.6.1. □

Satz 8.8 *Es seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mu \in C(K)'$. Dann gilt*

1. *Für alle $f \in C_c^1$ ist*
$$\pi \int f\,d\mu = \int \overline{\partial} f \cdot \widehat{\mu}\,d\lambda_2.$$
2. *Ist $\widehat{\mu} = 0$ λ_2-fast überall, so ist $\mu = 0$.*

Beweis. 1. Es sei $f \in C_c^1$. Dann gilt mit der Pompeiu-Formel und dem Satz von Fubini

$$\pi \int f\,d\mu = \int\int \frac{(\overline{\partial} f)(w)}{z-w}\,d\lambda_2(w) d\mu(z) = \int \overline{\partial} f(w) \int \frac{d\mu(z)}{z-w}\,d\lambda_2(w) = \int \overline{\partial} f \cdot \widehat{\mu}\,d\lambda_2\,.$$

2. Es sei $\widehat{\mu}(w) = 0$ für λ_2-fast alle $w \in \mathbb{C}$. Dann ist $\mu \perp C_c^1$ nach 1. Da C_c^1 nach Bemerkung 8.6.4 dicht in $C(K)$ ist, gilt $\mu \perp C(K)$, also $\mu = 0$. □

Ist $R(K) = C(K)$, so ist natürlich notwendig $K^\circ = \varnothing$, also $K = \partial K$. Hinreichend ist, dass $\partial K = K$ verschwindendes zweidimensionales Maß hat. Genauer gilt

Satz 8.9 (Hartogs-Rosenthal) *Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt mit $\lambda_2(K) = 0$.*

1. *Trifft $B \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, so ist $C(K) = R_B(K)$.*
2. *Ist $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ zusammenhängend, so ist $C(K) = P(K)$.*

Beweis. Es sei $\mu \in C(K)'$ mit $\mu \perp R_B(K)$. Nach Bemerkung 8.5 ist dann $\widehat{\mu}|_{\mathbb{C}\setminus K} = 0$. Wegen $\lambda_2(K) = 0$ ist also $\widehat{\mu} = 0$ λ_2-fast überall und damit $\mu = 0$ nach Satz 8.8. Mit Bemerkung 8.4 ergibt sich $R_B(K) = C(K)$. Die zweite Aussage folgt wieder als Spezialfall $B = \{\infty\}$ aus der ersten. □

---

[37] Sind γ_1, γ_2 geschlossene Pfade und $\Gamma_j := \gamma_j^*$ Jordankurven mit $\operatorname{ind}(\gamma_j, \operatorname{Int}(\Gamma_j)) = 1$ und $\Gamma_2 \subset \operatorname{Int}(\Gamma_1)$, so gilt $2i\int_G \overline{\partial} g\,d\lambda_2 = \int_{\gamma_1} g - \int_{\gamma_2} g$ für $G := \operatorname{Int}(\Gamma_1) \cap \operatorname{Ext}(\Gamma_2)$ und $g \in C^1(\Omega)$ mit $G \Subset \Omega$; vgl. T.W. Gamelin, Complex Analysis, Springer, New York, 2001, Seite 127.

Bemerkung 8.10 Wie man unter Verwendung des Maximumprinzips leicht sieht, folgt aus $P(K) = A(K)$, dass $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ zusammenhänged ist ([Ü]). Es stellt sich heraus, dass die Bedingung auch hinreichend ist. Dies ist die Aussage des Satzes von Mergelian.[38] Aus dem Beweis (oder durch eine leichte Zusatzüberlegung) ergibt sich auch, dass $R(K) = A(K)$ jedenfalls dann erfüllt ist, wenn $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ nur endlich viele Komponenten hat.[39]

[38]Siehe – einmal mehr – etwa W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[39]Eine abschließende Antwort auf die Frage, für welche Kompakta $R(K) = A(K)$ gilt, gibt der Satz von Vitushkin; siehe etwa T.W. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.

A Anhang

Wir stellen einige Begriffe und Ergebnisse aus der Topologie zusammen, die für die Funktionentheorie eine wichtige Rolle spielen.

Bemerkung und Definition A.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. (X, d) heißt **zusammenhängend**, falls gilt: Sind $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \varnothing$, so ist $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$. Andernfalls heißt X **unzusammenhängend**.

2. $M \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls (M, d_M) zusammenhängend (oder $M = \varnothing$) ist.

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn X und $\varnothing$ die einzigen in (X, d) sowohl offen als auch abgeschlossenen Mengen sind. Weiter sieht man leicht ([Ü]), dass eine Teilmenge von M genau dann offen in (M, d_M) ist, wenn sie von der Form $U \cap M$ für eine in (X, d) offene Menge U ist. Also ergibt sich aus obiger Definition, dass $M \subset X$ genau dann unzusammenhängend ist, wenn offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \varnothing$, $V \cap M \neq \varnothing$ und $U \cap V \cap M = \varnothing$. Man kann leicht zeigen ([Ü]), dass dies äquivalent dazu ist, dass M zerlegt werden kann in zwei nichtleere Mengen A, B mit $\overline{A} \cap B = \varnothing$ und $\overline{B} \cap A = \varnothing$.

Bemerkung A.2 Sind X, Y metrische Räume, ist X zusammenhängend und ist $f : X \to Y$ lokal konstant, so ist f konstant.

> Denn: Es sei $c \in f(X)$. Dann ist $A := \{x : f(x) = c\}$ nichtleer, abgeschlossen (da f stetig ist) und offen (da f lokal konstant ist). Also ist $A = X$.

Satz A.3 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < c < b$ und $a, b \in M, c \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, c)$ und $V := (c, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \varnothing, \quad V \cap M \neq \varnothing \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \varnothing\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
$\Leftarrow$: Angenommen, M ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen U, V in $\mathbb{R}$ mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \varnothing$, $V \cap M \neq \varnothing$ und $U \cap V \cap M = \varnothing$.
Es seien $a \in U \cap M$, $b \in V \cap M$. Dann ist $a \neq b$ (und dann ohne Einschränkung $a < b$). Da M ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subset M$. Wir setzen $\xi := \sup(U \cap [a, b])$. Da U offen ist, gilt $\xi > a$. Angenommen, es ist $\xi \in V$. Da V offen ist, existiert dann ein $a < c < \xi$ mit $(c, \xi] \subset V$. Nach Definition des Supremums ist $(c, \xi] \cap U \neq \varnothing$ und damit auch $U \cap V \cap M \neq \varnothing$. Widerspruch. Damit gilt $\xi \notin V$. Da $M \subset U \cup V$ ist, folgt $\xi \in U$. Da U offen und $\xi < b$ ist, widerspricht

dies der Definition von ξ. □

Der folgende Satz zeigt, dass sich der Zusammenhang einer Menge unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz A.4 *Es seien (X, d), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $B \subset f(X)$ offen und abgeschlossen. Dann existieren eine in (Y, d_Y) offene Menge U und eine in (Y, d_Y) abgeschlossene Menge A mit $B = U \cap f(X) = A \cap f(X)$. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $f^{-1}(B) = f^{-1}(U) = f^{-1}(A)$ offen und abgeschlossen in (X, d) ist. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(B) = \varnothing$ oder $f^{-1}(B) = X$. Im ersten Fall ist $B = \varnothing$ und im zweiten gilt $f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, also $B = f(X)$. Damit ist $f(X)$ zusammenhängend. □

Als Konsequenz aus Satz A.3 und Satz A.4 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz A.5 *Es sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ ein Intervall.*

Beweis. Nach Satz A.4 ist $f(X)$ zusammenhängend, also nach Satz A.3 ein Intervall. □

Bemerkung A.6 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Sind A_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$, so ist $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.

> Denn: Wir setzen $A := \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \neq \varnothing$ sowie $A \cap V \neq \varnothing$. Ist $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. Ohne Einschränkung sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $A_\alpha \cap V \neq \varnothing$. Aus $x \in A_\alpha \cap U$ folgt auch $A_\alpha \cap U \neq \varnothing$. Da A_α zusammenhängend ist, folgt $A_\alpha \cap U \cap V \neq \varnothing$. Damit ist auch $A \cap U \cap V \neq \varnothing$.

Bemerkung und Definition A.7 Eine Menge $G \subset \mathbb{K}$ heißt **Gebiet**, falls G offen, nichtleer und zusammenhängend ist. Nach Satz A.3 ist $G \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Gebiet, wenn G ein offenes Intervall ist. Da Strecken $[u, v] \subset \mathbb{C}$ nach den Sätzen A.3 und A.4 zusammenhängend sind, sind sternförmige offene Mengen $X \subset \mathbb{C}$ nach Bemerkung A.6 zusammenhängend, also Gebiete (falls nichtleer).

Bemerkung und Definition A.8 Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Dann heißt M **pfadzusammenhängend**, falls zu allen Punkten $x, y \in M$ ein Pfad γ in M existiert mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

Satz A.9 *Es sei $M \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. *Ist M pfadzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*

2. *Ist M offen und zusammenhängend, so ist M auch pfadzusammenhängend.*

Beweis. 1. Es sei $a \in M$ fest. Dann existiert zu jedem $z \in M$ ein Pfad $\gamma(z)$ in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt z. Damit ist $M = \bigcup\limits_{z \in M} \gamma(z)^*$. Da $\gamma(z)^*$ zusammenhängend ist und $a \in \bigcap\limits_{z \in M} \gamma(z)^*$ gilt, ist M nach Bemerkung A.6 zusammenhängend.
2. Es seien $a \in M$ fest und A die Menge aller $z \in M$ so, dass ein Pfad $\gamma(z)$ in M existiert mit Endpunkt z und Anfangspunkt a. Ist $z \in A$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subset M$. Ist $w \in U_\delta(z)$, so ist $(\gamma(z), s_z^w)$ ein Pfad in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt w. Also ist A offen in M. Die gleiche Überlegung liefert auch die Abgeschlossenheit von A in M. Da $A \neq \emptyset$ ist (beachte: $a \in A$), folgt $A = M$. □

Bemerkung und Definition A.10 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
1. Für $x \in X$ heißt

$$G(x) = G_X(x) := \bigcup \{A \subset X : x \in A \text{ und } A \text{ zusammenhängend}\}$$

Zusammenhangskomponente oder kurz **Komponente** von X bezüglich x. Nach Bemerkung A.6 ist $G(x)$ zusammenhängend. Außerdem gilt für $x, y \in X$ entweder $G(x) = G(y)$ oder $G(x) \cap G(y) = \varnothing$. Also ist $(G(x))_{x \in X}$ eine Zerlegung von X in maximale zusammenhängende Teilmengen. Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so ist auch $G_X(x)$ offen für alle $x \in X$ ([Ü]). Also ist jede Komponente von X offen und damit ein Gebiet.
2. Ist $a \in X$, so heißt X **(schwach) lokal zusammenhängend** an a, falls für jede Umgebung U von a eine zusammenhängende Umgebung $M \subset U$ von a existiert. Gilt dies für alle $a \in X$, so heißt X **lokal zusammenhängend**. Da Komponenten offener Mengen in X stets offen sind ([Ü]), sieht man, dass für lokal zusammenhängende X die Umgebungen M stets offen gewählt werden können.

Satz A.11 *Es seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt und lokal zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ kompakt und lokal zusammenhängend.*

Beweis. Da Bilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen kompakt sind, ist $f(X)$ kompakt. Es sei $y \in f(X)$. Dann ist $K := f^{-1}(\{y\}) \subset X$ abgeschlossen, also kompakt. Ist V eine offene Umgebung von y, so ist $f^{-1}(V) \subset X$ offen mit $K \subset f^{-1}(V)$. Wir setzen

$$\mathcal{U} := \{M \subset f^{-1}(V) : M \text{ offen und zusammenhängend}, K \cap M \neq \varnothing\}$$

und $U := \bigcup_{M \in \mathcal{U}} U$. Nach Voraussetzung ist $K \subset U$ und wegen $y \in f(M)$ für alle $M \in \mathcal{U}$ ist $f(U) = \bigcup_{M \in \mathcal{U}} f(M)$ zusammenhängend. Außerdem ist $y \notin f(X \setminus U)$, also

$$y \in f(X) \setminus f(X \setminus U).$$

Da U offen in X ist, ist $X \setminus U$ kompakt, also auch $f(X \setminus U) \subset f(X)$ kompakt. Damit ist $f(X) \setminus f(X \setminus U)$ eine in $f(X)$ offene Umgebung von y. Wegen $f(X) \setminus f(U) \subset f(X \setminus U)$ ist

$$f(W) \supset f(X) \setminus f(X \setminus U),$$

also $f(U) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$ eine zusammenhängende Umgebung von y. □

Bemerkung A.12 Nach Satz A.11 sind Kurven in $\mathbb{C}$ stets lokal zusammenhängend.

Index