Jürgen Müller

Funktionentheorie

Skriptum zur Vorlesung
Wintersemester 2014
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Dank an Elke Gawronski für die Mithilfe bei der Erstellung

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische und holomorphe Funktionen

Bemerkung und Definition 1.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *analytisch* an der Stelle $z_0 \in \Omega$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (a_ν) in $\mathbb{C}$ so existieren, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))$$

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar auf $U_R(z_0)$ und es gilt

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$$

(siehe Analysis). Weiter heißt f *analytisch in* Ω, falls f analytisch an jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ ist. Man sieht leicht, dass Summen und Produkte analytischer Funktionen wieder analytisch sind (im Fall des Produktes folgt dies aus Aussagen über das Cauchy-Produkt von Reihen).

Beispiel 1.2 1. Polynome, exp, sin und cos sind analytisch in $\mathbb{C}$ ([Ü]).
2. Wir betrachten für festes $a \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{a - z} .$$

Hier ist für alle $z_0 \neq a$ und alle z mit $|z - z_0| < |a - z_0|$

$$f(z) = \frac{1}{a - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{a - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{a - z_0}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(a - z_0)^{\nu+1}} (z - z_0)^\nu .$$

Damit ist f analytisch $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Bemerkung und Definition 1.3 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$Z(f) := \{z_0 \in \Omega : f(z_0) = 0\}$$

für die Nullstellenmenge von f. Ist f beliebig oft differenzierbar an der Stelle z_0, so setzen wir

$$n_f(z_0) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z_0) \neq 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

(mit $\min \emptyset := \infty$). Dann gilt $n_f(z_0) > 0$ genau dann, wenn $z_0 \in Z(f)$ ist, und in diesem Fall heißt $n_f(z_0)$ Ordnung der Nullstelle.
Ist f analytisch an der Stelle $z_0 \in \Omega$, so gilt $n = n_f(z_0) < \infty$ genau dann, wenn eine an z_0 analytische Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ existiert mit $g(z_0) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \qquad (z \in \Omega) .$$

(Denn: Zunächst gilt $n = n_f(z_0) < \infty$ genau dann, wenn

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = (z - z_0)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu+n} (z - z_0)^\mu$$

für $|z-z_0|$ genügend klein mit $a_n \neq 0$ (beachte: $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ für alle k).
Ist also einerseits $n = n_f(z_0) < \infty$ so setzen wir

$$g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^{-n} f(z) & \text{für } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ a_n & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Dann ist g wie gefordert. Ist andererseits g wie gefordert mit $g(z) = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} b_\mu (z-z_0)^\mu$, so ist

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} b_{\nu-n}(z-z_0)^\nu$$

für $|z-z_0|$ genügend klein mit $f^{(n)}(z_0)/n! = b_0 = g(z_0) \neq 0$.)
Insbesondere sieht man damit (da g stetig an z_0 ist), dass bei analytischen Funktionen Nullstellen z_0 endlicher Ordnung stets isoliert sind, d. h. es existiert eine Umgebung von z_0, in der keine weiteren Nullstellen liegen.

Bemerkung und Definition 1.4 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Wir schreiben $M' = M'_X$ für die Menge der Häufungspunkte von M (in X). Man sieht leicht ([Ü]), dass die Menge M' stets abgeschlossen in X ist.

Satz 1.5 *Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt: Entweder ist $f \equiv 0$ oder $(Z(f))'_G = \emptyset$, d. h. $Z(f)$ hat keinen Häufungspunkt in G.*

Beweis. Wir setzen $A := (Z(f))'_G$. Da f stetig ist, gilt $A \subset Z(f)$. Ist $A \neq \emptyset$ und $z_0 \in A$, so ist $n_f(z_0) = \infty$ nach B./D. 1.3 und damit schon $f(z) \equiv 0$ auf einer Umgebung von z_0. Also ist $z_0 \in A^0$ und folglich A offen. Außerdem ist A auch abgeschlossen (in $G = (G, d_{|\cdot|})$) als Menge von Häufungspunkten. Da G zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$. Damit ist auch $Z(f) = G$, also $f \equiv 0$. □

Als Konsequenz erhalten wir unmittelbar folgendes wichtige Ergebnis, das zeigt, dass analytische Funktionen auf Gebieten schon vollständig durch ihre Werte auf einer Menge mit Häufungspunkt in G festgelegt sind!

Satz 1.6 *(Identitätssatz für analytische Funktionen)*
Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Existiert eine Menge M in G mit Häufungspunkt in G und so, dass

$$f(z) = g(z)$$

für alle $z \in M$ gilt, so ist $f \equiv g$ in G.

Beweis. Mit f und g ist offenbar auch $f-g$ analytisch in G. Aus $M \subset Z(f-g)$ ergibt sich die Behauptung sofort mit S. 1.5. □

Der folgende Satz liefert eine Klasse analytischer Funktionen.

Satz 1.7 *Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es seien $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{K}$ stetig. Ferner sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \psi([a,b])$. Wir definieren $f : \Omega \to \mathbb{C}$ durch*

$$f(z) := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{\psi(t) - z}\, dt \qquad (z \in \Omega)\,.$$

Dann ist f analytisch in Ω, und es gilt

$$f^{(k)}(z) = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t) - z)^{k+1}}\, dt \qquad (z \in \Omega,\ k \in \mathbb{N})\,.$$

Beweis. Es sei $z_0 \in \Omega$ und $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(z_0, \psi([a,b]))$ (dann ist $R > 0$, da $\psi([a,b])$ kompakt ist). Aus

$$\left|\frac{z - z_0}{\psi(t) - z_0}\right| \le \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

für alle $z \in U_R(z_0)$ und alle $t \in [a,b]$ folgt, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\psi(t) - z_0)^{\nu+1}} = \frac{1}{\psi(t) - z}$$

(vgl. B. 1.2) für jedes feste $z \in U_R(z_0)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert (Weierstraßsches Majorantenkriterium). Also erhalten wir durch Vertauschung von Summation und Integration

$$f(z) = \int_a^b \varphi(t) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\psi(t) - z_0)^{\nu+1}}\, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z - z_0)^\nu \cdot \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t) - z_0)^{\nu+1}}\, dt\,,$$

d.h. mit

$$a_k := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t) - z_0)^{k+1}}\, dt \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

gilt für alle $z \in U_R(z_0)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu\,.$$

Folglich ist f analytisch an der Stelle z_0. Außerdem erhalten wir für $z = z_0$

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t) - z_0)^{k+1}}\, dt \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, gilt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.8 Der Beweis zu S. 1.7 zeigt, dass die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

für alle z mit $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ gilt.

Beispiel 1.9 Es sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$, wobei

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}.$$

Weiter sei $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt $Cg : \Omega \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(Cg)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z}\, dt\ ,$$

Cauchy Transformierte von g. Nach S. 1.7 ist Cg analytisch in Ω und es gilt für $z \in \Omega$

$$(Cg)^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^{k+1}}\, dt\ .$$

Ist speziell $g \equiv 1$, so ist

$$(C1)'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^2}\, dt = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{e^{it} - z} \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0\ .$$

Also ist $(C1)' \equiv 0$ in Ω. Da

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

ein Gebiet ist, gilt damit $C1 \equiv (C1)(0) = 1$ in $\mathbb{D}$ ([Ü]).

Definition 1.10 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *holomorph* in Ω, falls f' auf Ω existiert und stetig ist. Wir setzen

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph in } \Omega\}\ .$$

Wir wollen nun zeigen, dass jede holomorphe Funktion schon analytisch ist, also insbesondere beliebig oft differenzierbar - eine Art mathematisches Wunder!
Entscheidend dafür wird die Cauchysche Integralformel sein, die wir nun in einer ersten Version für Kreise herleiten. Wir setzen

$$A := \{f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} : f \text{ stetig und } f|_{\mathbb{D}} \text{ holomorph}\}.$$

Satz 1.11 *(Cauchysche Integralformel – kurz CIF – für den Einheitskreis)*
Es sei $g \in A$. Dann gilt $(Cg)|_{\mathbb{D}} = g|_{\mathbb{D}}$, d. h.

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z}\, dt \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{D}$ fest. Wir definieren $\varphi : [0,1] \times [0, 2\pi]$ durch

$$\varphi(\lambda, t) := g(z + \lambda(e^{it} - z)) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} \qquad (\lambda \in [0,1],\, t \in [0, 2\pi])$$

und $\Phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda, t)\, dt \qquad (\lambda \in [0,1]).$$

Nach S. B.1 und B. B.2 ist Φ stetig auf $[0,1]$ und es gilt für $\lambda \in (0,1)$

$$\Phi'(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, dt = \int_0^{2\pi} g'\big(z + \lambda(e^{it} - z)\big)\, e^{it} dt = \frac{1}{i\lambda}\, g\big(z + \lambda(e^{it} - z)\big)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Damit ist $\Phi \equiv \text{const}$ auf $[0,1]$ und folglich

$$2\pi(Cg)(z) = \int_0^{2\pi} g(e^{it})\, \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt = \Phi(1) = \Phi(0) = g(z) \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z}\, dt \overset{B.1.9}{=} g(z) 2\pi.$$

$\square$

Bemerkung 1.12 Man beachte: S. 1.11 zeigt insbesondere, dass die Funktionswerte in $\mathbb{D}$ per Integration aus den Randwerten berechnet werden können. Wählt man speziell $z = 0$, so ergibt sich die wichtige *Mittelwertformel*

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) dt\,.$$

Also: Der Funktionswert im Kreismittelpunkt ergibt sich als „Integralmittel" der Funktionswerte am Rand des Kreises.
Mit B. 1.8 und B. 1.9 ergibt sich weiter, dass $g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt mit

$$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-ikt}\, dt.$$

Als Anwendung ergibt sich insbesondere die Analytizität holomorpher Funktionen.

Satz 1.13 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Dann gilt für alle $z_0 \in \Omega$ (mit $\mathrm{dist}(z_0, \emptyset) := \infty$)*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^\nu \qquad (|z - z_0| < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega))\,.$$

Insbesondere ist f analytisch in Ω.

Beweis. Es seien $z_0 \in \Omega$ und $R < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Wir definieren $g \in A$ durch

$$g(w) := f(z_0 + Rw) \qquad (|w| \leq 1).$$

Dann ist $f^{(\nu)}(z_0) = g^\nu(0)/R^\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Mit B. 1.12 ergibt sich

$$f(z) = g\left(\frac{z - z_0}{R}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \frac{(z - z_0)^\nu}{R^\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^\nu$$

für alle $z \in U_R(z_0)$. Da $R < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$ beliebig war, gilt die Darstellung in $|z - z_0| < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω. □

Bemerkung 1.14 Für alle $z_0 \in \Omega$ und $R < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$ ergibt sich aus der CIF für $f \in H(\Omega)$ und $z \in U_R(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) \frac{Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z}\, dt\,.$$

und insbesondere die Mittelwertformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt\,. \tag{1.1}$$

Die obigen Ergebnisse zeigen, dass holomorphe Funktionen sich in drastischer Weise von reell differenzierbaren Funktionen unterscheiden. Wir wollen den Unterschied etwas genauer beleuchten.

Bemerkung 1.15 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}\,(= \mathbb{R}^2)$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ist f (komplex) differenzierbar an der Stelle $z_0 \in \Omega$, so existiert für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung $\partial_{\mathbf{v}} f(z_0)$ und es gilt

$$\partial_{\mathbf{v}} f(z_0) = f'(z_0) \cdot \mathbf{v}\,.$$

(Denn: Jeweils nach Definition gilt

$$\partial_{\mathbf{v}} f(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\mathbf{v}) - f(z_0)}{t} = \mathbf{v} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\mathbf{v}) - f(z_0)}{\mathbf{v}t} = \mathbf{v} \cdot f'(z_0).)$$

Also gilt insbesondere $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$ sowie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i f'(z_0)$ und damit auch

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \tag{1.2}$$

(sog. Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung).
Ist umgekehrt f reell differenzierbar an z_0 und gilt (1.2), so ist f auch komplex differenzierbar an z_0 und es gilt $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.
(Denn: Da f reell differenzierbar an z_0 ist, existiert eine Funktion $\varepsilon : \Omega - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(h) \to 0\,(h \to 0)$ und so, dass mit $h = t + is = (t, s)^T$

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= f(z_0) + \operatorname{grad}^T f(z_0) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot (1, i) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) h + |h|\,\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Nach der Zerlegungsformel ist f (komplex) differenzierbar an z_0 mit $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.)

Satz 1.16 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent*

a) f ist holomorph in Ω.

b) $f \in C^1(\Omega)$, und es gilt (1.2) für alle $z_0 \in \Omega$.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b): Ist f holomorph in Ω, so ist f' stetig auf Ω und damit sind nach B. 1.15 auch die partiellen Ableitungen stetig auf Ω (und es gilt (1.2)).

b) $\Rightarrow$ a): Ist $f \in C^1(\Omega)$, so sind die partiellen Ableitungen stetig auf Ω. Dann ist f insbesondere reell differenzierbar auf Ω. Nach B. 1.15 ist f komplex differenzierbar an z_0. Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig auf Ω ist, ist f holomorph. □

Bemerkung 1.17 Definiert man $\overline{\partial} : C^1(\Omega) \to C(\Omega)$ durch

$$\overline{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

so zeigt S. 1.16, dass $f \in C^1(\Omega)$ genau dann holomorph ist, wenn $\overline{\partial} f \equiv 0$ ist, mit anderen Worten, $H(\Omega)$ ist der Kern des Differenzialoperators $\overline{\partial}$.

2 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Bemerkung und Definition 2.1 Eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f heißt *ganze Funktion*. Insbesondere sind Polynome und exp, sin, cos ganze Funktionen.
Ist f ganz und ist $B \subset \mathbb{C}$ beschränkt, so $f|_B$ beschränkt (Denn: ist $B \subset U_R[0]$, wobei $U_R[z_0] := \{z : |z - z_0| \leq R\}$, so ist $f(U_R[0])$ kompakt, also auch beschränkt, und $f(B) \subset f(U_R[0])$).

Eine erste Folgerung aus der CIF ist

Satz 2.2 *(Liouville)*
Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest. Für $R > 0$ definieren wir $g \in A$ durch

$$g(w) := f(z_0 + Rw) \qquad (|w| \leq 1).$$

Dann ist $g'(0)/R = f'(z_0)$ und mit B. 1.12 folgt

$$|f'(z_0)| = \frac{|g'(0)|}{R} \leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |g(e^{it})|\, dt \leq \frac{M}{R} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Also ist $f'(z_0) = 0$, d. h. $f' \equiv 0$. Da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, ist f konstant. □

Beispiel 2.3 Ist $f(z) = \cos z$, so gilt für $y \in \mathbb{R}$

$$|\cos(iy)| = \cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh(y) \to \infty \qquad (y \to \pm\infty)\,.$$

Bemerkung 2.4 Als kleine Anwendung des Satzes von Liouville ergibt sich ein kurzer Beweis zum Fundamentalsatz der Algebra. Der wesentliche Teil des Beweises besteht bekanntlich darin, zu zeigen, dass jedes nichtkonstante Polynom P eine Nullstelle besitzt. Wir zeigen also:

Ist P nicht konstant, so P hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Denn: Angenommen, nicht, d.h. $1/P$ ist eine ganze Funktion. Dann existiert nach dem Satz von Liouville eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|1/P(z_n)| \to \infty$, also $P(z_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Nach B./D. 2.1 gilt notwendig auch $|z_n| \to \infty$. Dies widerspricht aber $|P(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$.

Eines der zentralen Themen der reellen Analysis ist die Frage nach Extremstellen von Funktionen (mit Werten in $\mathbb{R}$). Da wir keine Ordnung in $\mathbb{C}$ haben, macht eine solche Fragestellung für komplexwertige Funktionen keinen Sinn. Wir können jedoch nach Extremstellen von $|f|$ suchen. Bei holomorphen Funktionen bleibt diese meist erfolglos. Es gilt nämlich

Satz 2.5 *(Maximumprinzip; negative Formulierung)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Hat $|f|$ ein lokales Maximum, so ist $f \equiv \text{const}$.

Beweis. Es sei z_0 ein lokales Maximum von $|f|$, d.h. es existiert ein $r > 0$ mit

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{für alle } z \in U_r(z_0)\,.$$

Angenommen, es existiert ein $z_1 \in U_r(z_0)$ mit $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Ist $\rho = |z_1 - z_0|$, so gilt auf Grund der Stetigkeit von $t \mapsto |f(z_0 + \rho e^{it})|$ auf $[0, 2\pi]$ und $|f(z_0 + \rho e^{it})| \leq |f(z_0)|$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt < |f(z_0)|\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = |f(z_0)|\,,$$

also mit der Mittelwertformel (1.1)

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt < |f(z_0)|\,.$$

Widerspruch! Damit ist $|f| \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$.
Hieraus folgt, dass auch $f \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$ ist ([Ü]). Nach dem Identitätssatz (S. 1.6) ist damit $f \equiv \text{const}$ auf G. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Satz 2.6 *(Maximumprinzip; positive Formulierung)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und es sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig auf $\overline{G}$ und holomorph in G. Dann existiert ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|\,.$$

Beweis. Da G beschränkt ist, ist $\overline{G} = G \cup \partial G$ kompakt. Also existiert ein $z_0 \in \overline{G}$ mit $|f(z_0)| = \max\limits_{z \in \overline{G}} |f(z)|$ (beachte: $|f|$ stetig auf $\overline{G}$). Ist $f \equiv \text{const}$, so ist die Behauptung klar. Ist $f \not\equiv \text{const}$, so ist $z_0 \notin G$ nach S. 2.5, also $z_0 \in \partial G$. □

Bemerkung und Definition 2.7 Es seien $A \subset \mathbb{C}$ und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $r \geq 0$ und $\{z : |z| = r\} \subset A$, so setzen wir

$$M(r, f) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Ist f holomorph in $U_R(0)$, so gilt mit dem Maximumprinzip (positive Form) für alle $0 \leq r < R$

$$M(r, f) = \max_{U_r[0]} |f(z)|$$

und damit ist insbesondere $M(r, f)$ monoton wachsend. Aus der negativen Form folgt, dass $M(r, f)$ streng monoton wächst, falls $f \not\equiv \text{const}$ ist. Ist f ganz und nicht konstant, so gilt nach dem Satz von Liouville $M(r, f) \to \infty$ für $r \to \infty$.

Beispiel 2.8 Wir betrachten wieder $f(z) = \cos z$. Ist $|z| = r$, so folgt

$$|\cos z| = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu}}{(2\nu)!}\right| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu}}{(2\nu)!} = \cosh(r) = \cos(ir) \ .$$

Also ist $M(r, f) = \cosh(r)$.

Bemerkung 2.9 Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, so gilt natürlich für alle Nullstellen z_0 von f

$$|f(z_0)| = 0 \leq |f(z)| \qquad (z \in G)\,,$$

d.h. Nullstellen sind Minima von $|f|$. Ist aber $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ (d.h. $Z(f) = \emptyset$), so hat f im Falle $f \not\equiv \text{const}$ auch kein lokales Minimum in G (Minimumprinzip; negative Formulierung).
Außerdem existiert dann im Falle, dass G beschränkt ist, stets ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \min_{z \in \overline{G}} |f(z)|$$

(Minimumprinzip; positive Formulierung).
Beides ergibt sich unmittelbar durch Anwendung obiger Maximumprinzipien auf $1/f$.

Definition 2.10 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sind $f_n, f : X \to Y$, so sagt man, die Folge (f_n) sei *lokal gleichmäßig konvergent gegen f (auf X), falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf U.*

Bemerkung 2.11 Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig konvergent (siehe Analysis).

Wir untersuchen nun Folgen holomorpher Funktionen. Ist $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt mit B. 1.9 (beachte: es ist $|e^{it} - z| \geq 1 - r$ für $|z| = r < 1$)

$$M(r, (Cg)^{(k)}) \leq \frac{k!}{(1-r)^{k+1}} M(1, g) \tag{2.1}$$

für alle $0 \leq r < 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$ (Cauchysche Ungleichung). Damit beweisen wir

Satz 2.12 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und es seien $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Ferner gelte $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω. Dann ist auch f holomorph in Ω, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \qquad (n \to \infty)$$

lokal gleichmäßig auf Ω.

Beweis. Ist $z_0 \in \Omega$, so existiert ein $R > 0$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $U_R[z_0]$. Wir betrachten $g_n, g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ mit

$$g_n(z) = f_n(z_0 + Rz), \quad g(z) = f(z_0 + Rz).$$

Dann gilt $g_n \to g$ gleichmäßig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Nach Voraussetzung ist $g_n \in A$. Außerdem ist g stetig auf $\mathbb{S}$. Aus

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt = (Cg)(z) \quad (n \to \infty)$$

folgt $g|_{\mathbb{D}} = (Cg)|_{\mathbb{D}}$. Also ist g analytisch in $\mathbb{D}$ und damit ist auch f holomorph in $U_R(z_0)$. Weiter ergibt sich mit (2.1) für $0 < r < 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$M(r, g^{(k)} - g_n^{(k)}) \le \frac{k!}{(1-r)^{k+1}} M(1, g - g_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also gilt $g_n^{(k)} \to g^{(k)}$ gleichmäßig auf $U_r[0]$ und folglich auch $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ gleichmäßig auf $U_{rR}[z_0]$. □

Beispiel 2.13 Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta : G \to \mathbb{C}$ ist für $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ definiert durch

$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z} \qquad \left(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{e^{z \cdot \ln \nu}} \right).$$

Dabei konvergiert die Teilsummenfolge $s_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^z}$ lokal gleichmäßig auf G ([Ü]). Da die Teilsummen holomorph in G (genauer sogar Einschränkungen ganzer Funktionen) sind, ist ζ holomorph in G nach S. 2.12.

3 Stammfunktionen und Cauchyscher Integralsatz

Wir wenden uns nun der Frage nach der Existenz von Stammfunktionen im Komplexen zu. Ist f stetig auf einer offenen Menge Ω in $\mathbb{C}$ und existiert eine Stammfunktion F auf Ω, d. h. eine Funktion F mit $F' = f$ auf Ω, so ist F holomorph in Ω und damit auch f. Umgekehrt gilt

Satz 3.1 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann existiert eine Stammfunktion F zu f in G.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei G sternförmig bzgl. 0. Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_0^1 z \cdot f(zt)dt \qquad (z \in G).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}(zf(zt)) = f(zt) + zf'(zt)t \qquad (z \in G,\, t \in [0,1]).$$

Da f holomorph in G ist, ist die rechte Seite stetig auf $G \times [0,1]$. Nach B. B.2 ist F differenzierbar auf G mit

$$\begin{aligned} F'(z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}(zf(zt))\,dt = \int_0^1 f(zt)\,dt + \int_0^1 t \cdot zf'(zt)\,dt \\ &= \int_0^1 f(zt)\,dt + t \cdot f(zt)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(zt)\,dt = f(z). \end{aligned}$$

□

Als erste Anwendung wollen wir uns mit der Frage der Existenz von Logarithmen und allgemeinen Potenzen in $\mathbb{C}$ beschäftigen. Im ersten Teil der Analysis hatten wir die reelle Logarithmusfunktion als Umkehrung der (reellen) Exponentialfunktion definiert. Schon die Tatsache, dass die Exponentialfunktion im Komplexen nicht mehr injektiv ist, deutet an, dass die Situation hier komplizierter wird. Es gilt jedenfalls

Satz 3.2 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$ mit $Z(g) = \emptyset$. Dann gilt*

1. *Ist G sternförmig, so existiert eine Funktion $f \in H(G)$ mit $e^f = g$.*
2. *Sind $f, \tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt $e^{f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}$ für alle $z \in G$ genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit*
$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

Beweis. 1. Da G sternförmig ist, existiert nach S. 3.1 eine Funktion $f \in H(G)$ mit $f' = g'/g$. Dabei kann f so gewählt werden, dass für ein vorgegebenes $z_0 \in G$ und $g(z_0) = r_0 e^{i\varphi_0}$ zusätzlich $f(z_0) = \ln(r_0) + i\varphi_0$ gilt (ggfs. addiere man zu f eine geeignete Konstante). Es folgt

$$(ge^{-f})' = g'e^{-f} + ge^{-f}(-f') \equiv 0 \quad \text{in } G.$$

Also existiert eine Konstante c mit

$$g(z) = ce^{f(z)} \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Aus $e^{f(z_0)} = g(z_0)$ ergibt sich $c = 1$ und damit die Behauptung.
2. Sind $f, \tilde{f} \in C(G)$ mit $e^{\tilde{f}} = e^f$, so gilt

$$e^{\tilde{f}(z)-f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}/e^{f(z)} \equiv 1 \text{ in } G.$$

Damit ist

$$\varphi(z) = \frac{\tilde{f}(z) - f(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

für alle $z \in G$. Da G zusammenhängend und φ stetig auf G ist, ist $\varphi(z) \equiv \text{const}$ auf G nach S. A.5, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

Die Umkehrung ist klar. □

Bemerkung und Definition 3.3 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$ mit $Z(g) = \emptyset$. Jede Funktion $f \in H(G)$ mit $e^f = g$ in G heißt ein *Zweig des Logarithmus* von g in G. Ist f ein solcher Zweig, so ist auch $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ein Zweig. Nach S. 3.2.2 sind durch diese (abzählbar unendlich vielen) Funktionen alle Zweige gegeben. Weiter heißt für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ die Funktion $e^{f/m}$ ein *Zweig der m-ten Wurzel* von g in G (man beachte: es gilt $(e^{f/m})^m = e^f = g$).

Beispiel 3.4 Es sei

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\,.$$

und $g(z) = z$. Dann ist $\mathbb{C}_-$ sternförmig (etwa bzgl. 1). Nach S. 3.2.1 existiert eine Funktion $f \in H(\mathbb{C}_-)$ mit

$$e^{f(z)} = z \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_-.$$

(also ein Zweig des Logarithmus von z). Der Beweis zu S. 3.2 zeigt, dass $f'(z) = 1/z$ auf $\mathbb{C}_-$ gilt. Weiter kann f mit $f(1) = 0$ gewählt werden.
Ist $z \in \mathbb{C}_-$, so existieren eindeutig bestimmte $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ (Polarkoordinaten) mit $z = re^{i\varphi}$. Die Abbildung $p : \mathbb{C}_- \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ mit

$$p(z) = (r, \varphi) \qquad (z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-)$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ (siehe Analysis). Damit ist auch $\tilde{f} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) = \ln r + i\varphi \qquad (z \in \mathbb{C}_-)$$

stetig. Weiter gilt natürlich auch

$$e^{\tilde{f}(z)} = e^{\ln r + i\varphi} = re^{i\varphi} = z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Da $\tilde{f}(1) = 0 = f(1)$ gilt, ist $f(z) \equiv \tilde{f}(z)$ in $\mathbb{C}_-$. Für $z = r > 0$ haben wir insbesondere $f(r) = \ln r$, d.h. dieser Zweig setzt den „reellen Logarithmus“ ln holomorph auf $\mathbb{C}_-$ fort. Wir nennen f den Hauptzweig des Logarithmus (von z) in $\mathbb{C}_-$ und schreiben dafür auch

$$f(z) =: \log z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Nach S. 3.2.2 sind alle weiteren Zweige von der Form

$$z \mapsto \log z + 2k\pi i = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so setzen wir damit

$$z^\alpha := e^{\alpha \cdot \log z} \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Ist speziell $\alpha = 1/m$ für ein $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, so schreiben wir auch $\sqrt[m]{z}$ anstelle von $z^{1/m}$, und im Fall $m = 2$ auch kurz $\sqrt{z}$. Die Funktion $z \mapsto \sqrt[m]{z}$ heißt *Hauptzweig der m-ten Wurzel* von z in $\mathbb{C}_-$ (für $m = 2$ kurz *Hauptzweig der Wurzel*) von z in $\mathbb{C}_-$.

Wie sieht es mit der Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)$$

für $z, w \in \mathbb{C}_-$ aus?
Ist $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\vartheta}$ mit $\varphi, \vartheta \in (-\pi, \pi)$ und $\varphi + \vartheta \in (-\pi, \pi)$, so ist $zw = r\rho e^{i(\varphi+\vartheta)}$. Es gilt also

$$\log(zw) = \ln(r\rho) + i(\varphi + \vartheta) = \ln r + i\varphi + \ln\rho + i\vartheta = \log z + \log w\,.$$

Ist jedoch etwa $\varphi + \vartheta > \pi$, so ist $zw = r\rho e^{i(\varphi+\vartheta-2\pi)}$, also

$$\log(zw) = \ln(r\rho) + i(\varphi + \vartheta - 2\pi) = \log z + \log w - 2\pi i\,.$$

Es kommt also ein „Korrekturterm“ $2\pi i$ hinzu. Im Falle $\varphi + \vartheta = \pi$ ist $\log(zw)$ nicht einmal definiert.
Die Beispiele zeigen, dass Vorsicht im Umgang mit komplexen Logarithmen angebracht ist!

Bemerkung 3.5 Für $z \in \mathbb{C}_-$ und $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^{\alpha_1+\alpha_2} = z^{\alpha_1} z^{\alpha_2}\,.$$

Weiter ist $z \mapsto z^\alpha$ holomorph in $\mathbb{C}_-$ mit

$$(z^\alpha)' = \alpha \cdot z^{\alpha-1}\,.$$

Wir wollen nun das lokale Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion etwas genauer beleuchten. Das Maximumprinzip wird sich dabei auch noch einmal als Konsequenz eines allgemeineren Resultats ergeben.

Satz 3.6 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ferner sei $z_0 \in \Omega$ und $w_0 := f(z_0)$, wobei z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von $f - w_0$ ist. Dann existieren eine offene Umgebung U von z_0 und eine in U holomorphe Funktion φ mit $\varphi(z_0) = 0$ sowie $\varphi'(z_0) \neq 0$ und so, dass*

$$f(z) = w_0 + \varphi^m(z) \qquad (z \in U)\,.$$

Beweis. Es seien $U := U_r(z_0)$ und $g \in H(U)$ so, dass $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ (existieren nach B./D. 1.3). Dann existiert nach S. 3.2 ein $h \in H(U)$ mit $e^h = g$. Ist $\varphi : U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) = (z - z_0)e^{h(z)/m} \qquad (z \in U)\,,$$

so gilt

$$\varphi^m(z) = (z - z_0)^m e^{h(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0 \qquad (z \in U)\,.$$

Dabei ist $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) \neq 0$. □

Bemerkung 3.7 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ist $z_0 \in \Omega$ mit $f'(z_0) \neq 0$ (d. h. ist z_0 eine einfache Nullstelle von $f - w_0$, wobei $w_0 := f(z_0)$), so existieren nach dem Hauptsatz über Umkehrfunktionen offene Umgebungen U von z_0 in Ω und V von $w_0 = f(z_0)$ in $f(\Omega)$ so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist mit $f'(z) \neq 0$ in U ([Ü]). Außerdem ist dann $g := (f_{|U})^{-1} : V \to U$ holomorph mit

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \qquad (w \in V)$$

(Umkehrregel).

Als unmittelbare Konsequenz aus den vorhergehenden Ergebnissen erhalten wir

Satz 3.8 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$. Dann gilt*

1. *f ist offen, d. h. Bilder offener Mengen sind offen.*
2. *(Gebietstreue) $f(G)$ ist ein Gebiet.*

Beweis. 1. Es seien $M \subset G$ offen und $w_0 \in f(M)$. Zu $z_0 \in M$ mit $f(z_0) = w_0$ seien $U \subset M$ und φ wie in S. 3.6 (man beachte: jede Nullstelle von $f - w_0$ hat endliche Ordnung nach dem Identitätssatz). Nach B. 3.7 kann dabei U so (klein) gewählt werden, dass $\varphi : U \to U_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$ bijektiv ist. Da das Polynom P mit $P(w) = w_0 + w^m$ die Kreisscheibe $U_\delta(0)$ **auf** $U_{\delta^m}(w_0)$ abbildet (Existenz komplexer Wurzeln; siehe Analysis) ist

$$U_{\delta^m}(w_0) = (P \circ \varphi)(U) = w_0 + \varphi^m(U) = f(U) \subset f(M) \; .$$

Also ist $f(M)$ offen.
2. Da f insbesondere stetig auf dem Gebiet G ist, ist nach S. A.4 und 1. auch $f(G)$ ein Gebiet. □

Bemerkung 3.9 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, $f \not\equiv \text{const}$. Für alle $z_0 \in G$ und alle $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset G$ ist nach S. 3.8 die Menge $f(U_r(z_0))$ offen. Also existiert insbesondere ein $w \in f(U_r(z_0))$ mit $|w| > |f(z_0)|$. Damit hat $|f|$ kein lokales Maximum an z_0. Dies zeigt, dass S. 3.8 das Maximumprinzip umfasst.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Konzept komplexer Wegintegrale.

Definition 3.10 1. Einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ nennen wir kurz *C^1-Weg*. Ist γ ein C^1-Weg und ist $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig auf γ^*, so ist $(f \circ \gamma)\gamma'$ stetig auf $[\alpha, \beta]$. Wir definieren das *(Weg-)Integral von f längs γ* durch

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(\zeta)d\zeta := \int f d\gamma := \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)\gamma' = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \; .$$

Außerdem setzen wir

$$\int f|d\gamma| := \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)|\gamma'| = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt$$

sowie $L(\gamma) := \int |d\gamma|$. Dabei heißt $L(\gamma)$ die *Länge* von γ.
2. Für einen C^1-Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sei der C^1-Weg $-\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$-\gamma(t) := \gamma(\beta + \alpha - t) \qquad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Dann ist $-\gamma^* := (-\gamma)^* = \gamma^*$ und für alle $f \in C(\gamma^*)$

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f \quad \text{sowie} \quad \int f|d(-\gamma)| = \int f|d\gamma|.$$

Bemerkung 3.11 1. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $\gamma = \gamma_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{C}$ definert durch

$$\gamma_{a,b}(t) := a + t(b-a) \quad (t \in [0,1]).$$

Dann schreiben wir auch

$$\int_a^b f := \int_\gamma f\ .$$

Für $f \in C(\gamma^*)$ gilt

$$\int_a^b f = (b-a) \int_0^1 f(a + t(b-a))dt.$$

Ist F wie im Beweis zu S. 3.1, so ist damit $F(z) = \int_0^z f$ für $z \in G$.

2. Für $\gamma = \gamma_{z_0,R} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$, und für f stetig auf $K_R(z_0) = \gamma^*$ ist

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) iRe^{it} dt \quad \text{und} \quad \int f|d\gamma| = \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) R\, dt,$$

also insbesondere auch $L(\gamma) = 2\pi R$. Wir schreiben in diesem Fall meist

$$\int_{|\zeta - z_0| = R} \quad \text{bzw.} \quad \int_{K_R(z_0)} \quad \text{statt} \quad \int_\gamma\ .$$

Damit gilt für alle $R > 0$

$$\int_{K_R(z_0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^{-1}\, iRe^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Ist allgemeiner f holomorph auf einer offenen Menge Ω, so liest sich für $z_0 \in \Omega$ und $R < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$ die Causchysche Integralformel (siehe B. 1.14) kurz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in U_R(z_0))\ .$$

Es ist sinnvoll, die Definition von Pfadintegralen geeignet zu erweitern.

Bemerkung und Definition 3.12 1. Es seien I eine endliche Menge und $\gamma_\iota : [\alpha_\iota, \beta_\iota] \to \mathbb{C}$ C^1-Wege ($\iota \in I$) mit Anfangspunkten a_ι und Endpunkten b_ι. Das Tupel $\gamma := (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ heißt dann ein *Kette* und $\gamma^* := \bigcup_{\iota \in I} \gamma_\iota^*$ die *Spur* von γ. Falls eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to I$ so existiert, dass für $j = 1, \ldots, n-1$ die Endpunkte $b_{\sigma(j)}$ von $\gamma_{\sigma(j)}$ mit den Anfangspunkten $a_{\sigma(j+1)}$ von $\gamma_{\sigma(j+1)}$ übereinstimmen, so sprechen wir von einem *Pfad*. Der Pfad γ heißt dann *geschlossen*, falls zusätzlich $a_{\sigma(1)} = b_{\sigma(n)}$ gilt. Weiter heißt

$a_{\sigma(1)}$ Anfangspunkt und $b_{\sigma(n)}$ Endpunkt von γ (man kann zeigen, dass die Definition für nichtgeschlossene Pfade unabängig von der Wahl von σ ist). Schließlich setzen wir noch $-\gamma := (-\gamma_\iota)_{\iota\in I}$.
2. Ist γ eine Kette, so definieren wir für $f \in C(\gamma^*)$

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta := \sum_{\iota\in I}\int_{\gamma_\iota} f$$

und

$$\int f\,|d\gamma| := \sum_{\iota\in I}\int f\,|d\gamma_\iota|, \qquad L(\gamma) := \int |d\gamma|.$$

Unmittelbar aus der jeweiligen Definition ergibt sich (mit $\|g\|_\infty := \|g\|_{\infty,M} := \sup_{\zeta\in M}|g(\zeta)|$ für g stetig auf $M \subset \mathbb{C}$) eine einfache, aber oft sehr nützliche Abschätzung für das Integral von f längs γ:

$$\Big|\int_\gamma f\Big| \le \int |f|\,|d\gamma| \le \|f\|_\infty \cdot L(\gamma)\,.$$

Der folgende Satz zeigt, dass bei Existenz einer Stammfunktion Integrale wegunabhängig sind.

Satz 3.13 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Genau dann existiert eine Stammfunktion F zu f in G, wenn für alle geschlossenen Pfade γ in G*

$$\int_\gamma f = 0$$

ist. In diesem Fall gilt für Pfade in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b

$$\int_\gamma f = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis. 1. Ist F eine Stammfunktion zu f und ist $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota\in I}$ ein Pfad in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b, so gilt mit dem HDI und mit σ wie in B./D. 3.12

$$\int_\gamma f = \sum_{\iota\in I}\int_{\alpha_\iota}^{\beta_\iota}(f\circ\gamma_\iota)\gamma_\iota' = \sum_\iota \int_{\alpha_\iota}^{\beta_\iota}(F\circ\gamma_\iota)' = \sum_{j=1}^n F(b_{\sigma(j)}) - F(a_{\sigma(j)}) = F(b) - F(a).$$

Insbesondere verschwindet das Integral, wenn γ geschlossen ist.
2. Es sei $z_* \in G$ fest. Wie in B. A.11 sieht man, dass G auch pfadzusammenhängend ist. Durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f \qquad (z \in G),$$

wobei γ_z einen beliebigen Pfad in G mit Anfangspunkt z_* und Endpunkt z bezeichnet, ist eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ (wohl-)definiert.
(Wichtig: Der Wert ist unabhängig von der Wahl des Pfades γ_z, denn ist $\widetilde{\gamma}_z$ ein weiterer solcher Pfad, so ist $\gamma := (\gamma_z, -\widetilde{\gamma}_z)$ ein geschlossener Pfad, also gilt

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_z} f - \int_{\widetilde{\gamma}_z} f.)$$

Wir zeigen: $F' = f$ auf G.
Denn: Ist $z_0 \in G$ und $U_R(z_0) \subset G$, so gilt für $z \in U_R(z_0)$ mit $\gamma := (\gamma_{z_0}, \gamma_{z_0,z}, -\gamma_z)$

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_{z_0}} f + \int_{z_0}^{z} f - \int_{\gamma_z} f = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f - F(z).$$

Also folgt $F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z} f$ und damit

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^{z} \big(f(\zeta) - f(z_0)\big)\, d\zeta\right| \le \big\|f - f(z_0)\big\|_{\infty, \gamma^*_{z_0,z}} \to 0 \quad (z \to z_0).$$

□

Beispiel 3.14 Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ ein beliebiger Pfad in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Dann gilt für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$

$$\int_\gamma (\zeta - z_0)^m d\zeta = \frac{1}{m+1}\big((b - z_0)^{m+1} - (a - z_0)\big)^{m+1}\big).$$

Also: Der Wert des Integrals hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten von γ ab!
Insbesondere gilt für jeden geschlossenen Pfad γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$$\int_\gamma (\zeta - z_0)^m d\zeta = 0\,.$$

Andererseits ist nach B. 3.11

$$\int_{K_R(z_0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2\pi i,$$

d. h. für $m = -1$ verschwindet das Integral über geschlossene Pfade im Allgemeinen **nicht**.
S. 3.13 zeigt damit auch, dass $z \mapsto 1/(z - z_0)$ in $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ keine Stammfunktion haben kann!

Satz 3.15 *(Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann ist

$$\int_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in G.

Beweis. Nach S. 3.1 existiert ein F mit $F' = f$ in G. Also folgt die Behauptung aus S. 3.13 $\square$

Bemerkung 3.16 Es seien $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und $f(z) = 1/(z - z_0)$. Wieder zeigt B. 3.11, dass die Aussage von S. 3.15 nicht für G und damit nicht für alle Gebiete gilt.

4 Fourier- und Laurent-Reihen

Im ersten Abschnitt haben wir uns mit Taylor-Reihen bzw. Potenzreihen beschäftigt. Ist $g \in A$, so gilt nach B. 1.12

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (z \in \mathbb{D})$$

wobei die Taylor-Koeffizienten a_k die Darstellung

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-ikt}\, dt$$

haben. Ist dabei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, so konvergiert die Reihe auch gleichmäßig auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}$ mit $g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ auf $\mathbb{S}$ ([Ü]).

Wir wollen nun Reihenentwicklungen dieser Bauart untersuchen, die den wesentlichen Vorteil haben, dass keine Ableitungen benötigt werden.

Bemerkung 4.1 Es sei $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Wir schreiben im Weiteren für $f \in C(\mathbb{S})$ kurz

$$\int f\, dm := \frac{1}{2\pi} \int f |d\gamma| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt \left(= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dt \right).$$

Damit sind durch

$$\langle f, g \rangle := \int f \overline{g}\, dm \qquad (f, g \in C(\mathbb{S}))$$

ein Skalarprodukt auf $C(\mathbb{S})$ und durch

$$\|f\|_2 := \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} \qquad (f \in C(\mathbb{S}))$$

eine Norm auf $C(\mathbb{S})$ definiert.

Ist ferner $e_k : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$e_k(z) := z^k \qquad (z \in \mathbb{S}),$$

so gilt dabei

$$\langle e_j, e_k \rangle = \int e_j\, \overline{e_k}\, dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i(j-k)} e^{i(j-k)t}\Big|_0^{2\pi} = 0 & , \ k \neq j \\ 1 & , \ k = j \end{cases}.$$

Damit ist $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem (ONS) in $C(\mathbb{S})$. Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu := \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu z^\nu \qquad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{S}\,,$$

so gilt $f \in C(\mathbb{S})$ und $a_k = \langle f, e_k \rangle$ für alle k.

(Denn: Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist

$$\langle f, e_k\rangle = \int (\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e_\nu)\,\overline{e_k}\,dm = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \int e_\nu \overline{e_k}\,dm = a_k.)$$

Definition 4.2 Es sei $f \in C(\mathbb{S})$. Dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f}(k) := \langle f, e_k\rangle = \int f\overline{e_k}\,dm = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{is})e^{-iks}ds$$

k-ter *Fourier-Koeffizient* von f. Außerdem heißt die Abbildung $C(\mathbb{S}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *Fourier-Transformation*. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt weiter $s_n f$ mit

$$(s_n f)(z) := \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu)z^\nu = \sum_{\nu=-n}^{n} \langle f, e_\nu\rangle e_\nu(z) \qquad (z \in \mathbb{S})$$

n-te *Fourier-Teilsumme* von f und $(s_n f)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *Fourier-Reihe* von f.

Beispiel 4.3 1. Ist $g \in A$, so ist $\widehat{g}(k) = g^{(k)}(0)/k!$ für $k \in \mathbb{N}_0$, d. h. für $k \geq 0$ stimmen die Fourier-Koeffizienten und die Taylor-Koeffizienten überein. Außerdem ist in diesem Fall $\widehat{g}(-k) = 0$ für $k > 0$ (folgt aus der Mittelwertformel aus B. 1.12 mit $z \mapsto g(z)z^k$ anstelle von g).
2. Wir betrachten $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(e^{it}) := \frac{\pi}{2} - |t| \qquad (t \in (-\pi, \pi])\,,$$

Dann gilt für $k \neq 0$

$$2\pi\widehat{f}(k) = -\int_{-\pi}^{\pi} |s|\cos(-ks)\,ds - \underbrace{i\int_{-\pi}^{\pi} |s|\sin(-ks)\,ds}_{=0} = -2\int_0^{\pi} s\cos(ks)\,ds = \frac{2}{k^2}(1-(-1)^k)\,,$$

also

$$\widehat{f}(k) = \frac{2}{\pi k^2} \quad (k \text{ ungerade})\,, \qquad \widehat{f}(k) = 0 \quad (k \text{ gerade}, k \neq 0)\,.$$

Außerdem ist

$$\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|dt = 0\,.$$

Folglich gilt für $z = e^{it} \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu)z^\nu &= \frac{2}{\pi}\sum_{\nu \text{ ungerade}} \frac{z^\nu}{\nu^2} = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{z^\nu + z^{-\nu}}{\nu^2}\\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\mathrm{Re}(z^\nu)}{\nu^2} = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\cos(\nu t)}{\nu^2}\,.\end{aligned}$$

Dabei ist die Konvergenz (auch für die mit den Absolutbeträgen gebildete Reihe) nach den Weierstraßschen Majorantenkriterium gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.

Bemerkung 4.4 Wir wollen im Weiteren zeigen, dass die Fourier-Transformation

$$C(\mathbb{S}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

injektiv ist, d. h. die Funktion f ist durch die Folge der Fourier-Koeffizienten vollständig festgelegt. Dazu beweisen wir, dass

$$||f - s_n f||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{4.1}$$

für alle $f \in C(\mathbb{S})$ gilt, d. h. $(s_n f)$ konvergiert „im quadratischen Mittel" gegen f.
Wir schreiben

$$T_n := \operatorname{linspan}\{e_k : k \in \{-n, \dots, n\}\}$$

für die Menge der *trigonometrischen Polynome* vom Grad $\leq n$. Da $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS ist, ergibt sich aus der Linearen Algebra

$$\|f - s_n f\|_2 = \min_{P \in T_n} ||f - P||_2 =: \operatorname{dist}(f, T_n)\ .$$

Also: $s_n f \in T_n$ ist die beste Approximation an f bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm. Insbesondere ist $P = s_n P$ für alle $P \in T_n$.
Damit reicht es für (4.1) zu zeigen, dass eine Folge (P_n) mit $P_n \in T_n$ und $||f - P_n||_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ existiert. Da für alle $f \in C(\mathbb{S})$

$$||f||_2 = \Big(\int |f|^2\, dm\Big)^{1/2} \leq ||f||_\infty$$

ist, reicht es dafür wiederum zu zeigen, dass $P_n \in T_n$ existieren mit

$$||f - P_n||_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

mit anderen Worten, die Menge der trigonometrischen Polynome $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ ist dicht in Raum $(C(\mathbb{S}), ||\cdot||_\infty)$.

Bemerkung und Definition 4.5 Es seien $f, g \in C(\mathbb{S})$. Wir definieren die *Faltung* $f * g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ von f und g durch

$$(f * g)(z) := \int f(z\overline{\zeta})g(\zeta)\, dm(\zeta) \qquad (z \in \mathbb{S}).$$

Dann ist $f * g$ stetig auf $\mathbb{S}$, und es gilt

$$f * g = g * f.$$

([Ü]). Ist dabei speziell $P \in T_n$, so gilt $P = s_n P$ und damit

$$(f * P)(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{P}(\nu) z^\nu \int \overline{\zeta}^\nu f(\zeta)\, dm(\zeta) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{P}(\nu)\widehat{f}(\nu) z^\nu \qquad (z \in \mathbb{S})\ .$$

Also ist auch $f * P \in T_n$ und es gilt

$$\widehat{f * P} = \widehat{f} \cdot \widehat{P}.$$

Wir setzen für $A \subset \mathbb{S}$ so, dass $t \mapsto 1_A(e^{it})$ eine Regelfunktion auf $[0, 2\pi]$ ist (hierbei ist 1_A die Indikatorfunktion von A),

$$\int_A f\, dm := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) 1_A(e^{it})\, dt.$$

Satz 4.6 *(gute Kerne)*
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $Q_n \in T_n$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $Q_n \geq 0$ *auf* $\mathbb{S}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $\int Q_n\, dm = 1$ $(n \in \mathbb{N})$,

(iii) *Für alle* $\delta > 0$ *gilt* $\int_{\mathbb{S} \setminus U_\delta(1)} Q_n\, dm \to 0$ $(n \to \infty)$.

Dann gilt für alle $f \in C(\mathbb{S})$

$$f * Q_n \to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } \mathbb{S}.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig auf der kompakten Menge $\mathbb{S}$ ist, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$\sup_{z \in \mathbb{S},\, \zeta \in \mathbb{S} \cap U_\delta(1)} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)| < \varepsilon$$

(beachte: $|z\overline{\zeta} - z| = |\zeta - 1|$). Mit (ii) und (i) ergibt sich für $z \in \mathbb{S}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|(f * Q_n)(z) - f(z)| = \left| \int (f(z\overline{\zeta}) - f(z))\, Q_n(\zeta)\, dm(\zeta) \right| \leq \int |f(z\overline{\zeta}) - f(z)| Q_n(\zeta)\, dm(\zeta)$$

also wieder mit (ii)

$$\|f * Q_n - f\|_\infty \leq \int_{\mathbb{S} \cap U_\delta(1)} \varepsilon Q_n\, dm + \int_{\mathbb{S} \setminus U_\delta(1)} 2||f||_\infty Q_n\, dm \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{S} \setminus U_\delta(1)} Q_n\, dm$$

Aus (iii) folgt für n genügend groß

$$||f - f * Q_n||_\infty \leq 2\varepsilon.$$

□

Bemerkung 4.7 Es stellt sich natürlich die Frage nach der Existenz von Folgen wie in S. 4.6. Ein Beispiel ist

$$F_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) z^\nu \qquad (z \in \mathbb{S}, n \in \mathbb{N})$$

(F_n heißt n-ter *Fejér-Kern*). Es gilt dafür: $F_n \in T_n$ und

$$\int F_n\, dm = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) \underbrace{\int e_\nu\, dm}_{=\delta_{0,\nu}} = 1,$$

also ist jedenfalls (ii) erfüllt. Weiter ist für $z \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 &= \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{j=0}^{n} z^j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} \overline{z}^j\Big) = \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{j,k=0}^{n} z^{j-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=-n}^{n}(n+1-|\nu|)z^\nu = F_n(z),\end{aligned}$$

also $F_n \geq 0$ und für $z \in \mathbb{S} \setminus U_\delta(1)$

$$F_n(z) = \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 = \frac{1}{n+1}\Big|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\Big|^2 \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{4}{\delta^2} \to 0.$$

Damit gilt $F_n \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{S} \setminus U_\delta(1)$. Also ist insbesondere auch (iii) erfüllt. Nach S. 4.6 gilt also für alle $f \in C(\mathbb{S})$

$$f * F_n \to f \qquad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{S}.$$

Da die $f * F_n$ trigonometrische Polynome von Grad $\leq n$ sind, ergibt sich insbesondere (siehe B. 4.4) für alle $f \in C(\mathbb{S})$

$$||f - s_n f||_2 \leq ||f - f * F_n||_2 \leq ||f - f * F_n||_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Dies bedeutet jedoch noch nicht, dass stets auch $s_n f(z) \to f(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}$ gilt. Tatsächlich gilt dies auch nicht für alle $f \in C(\mathbb{S})$ (was wir jedoch nicht zeigen werden).

Als Folgerung aus B. 4.7 erhalten wir

Satz 4.8 *Es sei $f \in C(\mathbb{S})$. Dann gilt*

1. $||f||_2^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\nu)|^2$ *(Parsevalsche Gleichung).*

2. *Aus $\widehat{f} = 0$ folgt $f \equiv 0$, d. h. die Fourier-Transformation ist injektiv.*

3. *Konvergiert $(s_n f)$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$, so gilt $s_n f \to f$, d. h.*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) z^\nu \quad (z \in \mathbb{S}).$$

Beweis.
1. Es gilt $s_n f \in T_n$ und $f - s_n f \in T_n^\perp$ ($\to$ Lineare Algebra). Also ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras
$$||f||_2^2 \;=\; ||f - s_n f||_2^2 + ||s_n f||_2^2\,.$$
Nach B. 4.7 gilt $||f - s_n f||_2^2 \to 0\,(n \to \infty)$, d.h. $||s_n f||_2^2 \to ||f||_2^2\,(n \to \infty)$. Außerdem ist (wieder mit Pythagoras)
$$||s_n f||_2^2 \;=\; ||\sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) e_\nu||_2^2 \;=\; \sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2 \underbrace{\|e_\nu\|_2^2}_{=1} = \sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2\,.$$
Damit ergibt sich 1.
2. Ist $\widehat{f}(\nu) = 0\,(\nu \in \mathbb{Z})$, so ist $||f||_2^2 = 0$ nach 1., also $f \equiv 0$.
3. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ mit
$$g(z) := \lim_{n\to\infty} s_n f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) z^\nu$$
stetig auf $\mathbb{S}$. Außerdem gilt nach B. 4.1 dann $\widehat{g} = \widehat{f}$. Nach 2. ist $f = g$. □

Satz 4.9 *(Fejér)*
Es sei $f \in C(\mathbb{S})$. Dann gilt $\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu f \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.

Beweis. Es sei F_n der n-te Fejér-Kern. Dann gilt
$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu f(z) &= \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \widehat{f}(\mu) z^\mu \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=-n}^{n} \widehat{f}(\mu) z^\mu \underbrace{\sum_{\nu=|\mu|}^{n} 1}_{=n+1-|\mu|} = \sum_{\mu=-n}^{n}\Big(1 - \frac{|\mu|}{n+1}\Big)\widehat{f}(\mu) z^\mu \\
&= f * F_n(z),
\end{aligned}$$
d.h. $f * F_n$ ist das arithmetische Mittel der Fourier-Teilsummen $s_0 f, \dots, s_n f$. Also folgt die Behauptung mit B. 4.7. □

Wir kehren zurück zu holomorphen Funktionen, jetzt auf Kreisringen: Ist K eine kompakte Menge in $\mathbb{C}$, so setzen wir
$$A(K) := \{g \in C(K) : g|_{K^0} \text{ holomorph}\}.$$
Weiter sei für $0 \le r \le R < \infty$
$$K_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r \le |z| \le R\}$$

der abgeschlossene Kreisring um 0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R. Wir berachten Funktionen $g \in A(K_{r,R})$ mit $r \leq 1 \leq R$.

Satz 4.10 *Sind $r \leq 1 \leq R$ und ist $g \in A(K_{r,R})$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$*

$$|\widehat{g}(-k)| \leq r^k M(r,g) \quad \textit{und} \quad |\widehat{g}(k)| \leq R^{-k} M(R,g).$$

Beweis. Der gleiche Beweis wie zu S. 1.11 zeigt, dass für $h \in A(K_{r,R})$ die Funktion $\Phi : [r,R] \to \mathbb{C}$ mit

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{2\pi} h(\lambda e^{it})\, dt \qquad (\lambda \in [r,R])$$

konstant auf $[r,R]$ ist. Damit ergibt sich für $h(z) = g(z)z^k$

$$|\widehat{g}(-k)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{ikt}\, dt\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} g(re^{it})r^k e^{ikt}\, dt\Big| \leq r^k M(r,g)$$

und entsprechend mit $h(z) = g(z)/z^k$ (wobei hier o. E. $r > 0$)

$$|\widehat{g}(k)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{-ikt}\, dt\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} g(Re^{it})R^{-k} e^{-ikt}\, dt\Big| \leq R^{-k} M(R,g).$$

□

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich

Satz 4.11 *Für $r < 1 < R$ und $g \in A(K_{r,R})$ gilt*

$$g(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\nu) z^\nu$$

lokal gleichmäßig auf dem Inneren von $K_{r,R}$. Im Fall $r = 0$ ist dabei $\widehat{g}(-k) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir schreiben kurz $a_k := \widehat{g}(k)$. Nach S. 4.10 hat die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ Konvergenzradius $\geq R$ und die Potenzreihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu} w^\mu$ Konvergenzradius $\geq 1/r$. Außerdem ist $a_{-\mu} = 0$ im Falle $r = 0$ (wieder mit S. 4.10). Da Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig konvergieren, konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ lokal gleichmäßig auf $U_R(0)$ und $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu} z^{-\mu}$ lokal gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Also konvergiert

$$h(z) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu} z^{-\mu}$$

lokal gleichmäßig auf dem Inneren V von $K_{r,R}$ und damit insbesondere gleichmäßig auf $\mathbb{S}$ ([Ü]). Aus S. 4.8.3 folgt $h|_{\mathbb{S}} = g|_{\mathbb{S}}$. Da h nach S. 2.12 holomorph auf V ist, ergibt sich mit dem Identitätssatz auch $h = g$ auf V. □

Sind $0 \le r < R \le \infty$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, so setzen wir

$$V_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Wir zeigen, dass jede in einem offenen Kreisring $V_{r,R}(z_0)$ holomorphe Funktion durch eine Reihe in den Potenzen $(z - z_0)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ dargestellt werden kann.

Satz 4.12 *(Laurent-Entwicklung)*
Es seien $0 \le r < R \le \infty$ sowie $z_0 \in \mathbb{C}$, und es sei $f \in H(V_{r,R}(z_0))$. Dann existiert genau eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ so, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

lokal gleichmäßig auf $V_{r,R}(z_0)$. Dabei gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

für beliebiges $r < \rho < R$.

Beweis. 1. Es sei $\rho \in (r, R)$ fest. Wir betrachten r', R' mit $r < r' < \rho < R' < R$ und defineren $g \in A(K_{r'/\rho, R'/\rho})$ durch

$$g(w) := f(z_0 + \rho w) \qquad (w \in K_{r'/\rho, R'/\rho}).$$

Dann gilt nach S. 4.11

$$f(z) = g\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{g}(\nu)}{\rho^\nu} (z - z_0)^\nu$$

lokal gleichmäßig auf $V_{r',R'}(z_0)$. Außderdem ist (siehe B. 3.11.2)

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \rho^{-k} e^{-ikt} dt = \rho^{-k} \widehat{g}(k).$$

Da die Konvergenz lokal gleichmäßig auf jedem Kreisring $V_{r',R'}(z_0)$ ist, liegt auch lokal gleichmäßige Konvergenz auf $V_{r,R}(z_0)$ vor.

2. Ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z - z_0)^\nu$ lokal gleichmäßig in $V_{r,R}(z_0)$, so gilt für $\rho \in (r, R)$ und $k \in \mathbb{Z}$ nach B. 3.14

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} (\zeta - z_0)^{\nu - k - 1} d\zeta = b_k\,.$$

Also gibt es nur eine Folge (a_k) wie in 1. □

Bemerkung und Definition 4.13 Unter den Bedingungen des vorhergehenden Satzes heißen a_k der *k-te Laurent-Koeffizient* von f und $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *Laurent-Reihe* von f bzgl. $V_{r,R}(z_0)$. Ferner heißen die (Potenz-)Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *Regulärteil* (oder auch *Nebenteil*) und die Reihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu}(z-z_0)^{-\mu}$ *Hauptteil* der Laurent-Reihe. Dabei konvergiert (vgl. Beweis zu S. 4.11) der Hauptteil lokal gleichmäßig auf $|z-z_0| > r$ und der Regulärteil auf $|z-z_0| < R$.

Beispiel 4.14 1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \qquad (z \neq 1).$$

Dann ist durch

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \sum_{\mu=1}^{\infty} z^{-\mu} \qquad (|z| > 1)$$

der Hauptteil der Laurent-Entwicklung in $V_{1,\infty}(0)$ gegeben. Der Regulärteil ist dabei $\equiv 0$.
2. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} \qquad (z \neq 1, 2).$$

Dann ist durch

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} z^{-\mu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} z^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}} \qquad (1 < |z| < 2)$$

die Laurent-Entwicklung in $V_{1,2}(0)$ gegeben. Der erste Summand ist der Hauptteil und der zweite der Regulärteil.

5 Isolierte Singularitäten

Oft ist man interessiert am Verhalten holomorpher Funktionen bei Annäherung an Randpunkte des Definitionsbereiches. Der einfachste Fall eines solchen Randpunktes ist der eines isolierten Punktes, mit dem wir uns jetzt genauer befassen.

Bemerkung und Definition 5.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann heißt a eine *isolierte Singularität* von f. Ist dabei $R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$, so hat f in $V_{0,R}(a) = U_R(a) \setminus \{a\}$ (genau) eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu}(z-a)^{-\mu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

gemäß S. 4.12. Dabei heißt a

1. *hebbare Singularität*, falls $a_{-\mu} = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$.

2. *Pol der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$, falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_{-\mu} = 0$ für alle $\mu > p$.

3. *wesentliche Singularität*, falls $a_{-\mu} \neq 0$ für ∞ viele $\mu \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.2 1. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Hier gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+1)!} \qquad \text{lokal gleichmäßig in } V_{0,\infty}(0)\,,$$

also ist $a_{-\mu} = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Damit hat f an 0 eine hebbare Singularität.
2. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := e^z / z^p \qquad (z \neq 0)\,.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-p} = \sum_{\nu=-p}^{\infty} \frac{1}{(\nu+p)!} z^\nu$$

lokal gleichmäßig auf $V_{0,\infty}(0)$, also $a_{-p} = 1$ und $a_{-\mu} = 0$ für $\mu > p$. Damit hat f an 0 einen Pol der Ordung p.
3. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Dann ist

$$f(z) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} z^{-\mu} \quad \text{lokal gleichmäßig in } V_{0,\infty}(0)\,,$$

also ist hier $a_{-\mu} = 1/\mu! \neq 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Folglich hat f an 0 eine wesentliche Singularität.

Wir wollen nun für alle drei Typen isolierter Singularitäten Charakterisierungen herleiten.

Satz 5.3 *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind äquivalent

a) f hat an a eine hebbare Singularität.

b) f ist durch $f(a) := a_0$ zu einer auf Ω holomorphen Funktion f fortsetzbar (die wir auch f nennen).

c) Es existiert eine Umgebung U von a so, dass f in $U \setminus \{a\}$ beschränkt ist.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist a eine hebbare Singularität von f, so ist

$$\tilde{f}(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

holomorph auf $U_R(a)$ mit $R = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$, und es gilt

$$\tilde{f}(z) = f(z) \qquad (z \in V_{0,R}(a)) \,.$$

b) $\Rightarrow$ c) ist klar
c) $\Rightarrow$ a): Es sei $M \geq 0$ so, dass $|f(z)| \leq M$ für $z \in U \setminus \{a\}$. Nach S. 4.12 ist für $k \in \mathbb{N}$ und $\rho > 0$ genügend klein

$$|a_{-k}| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{K_\rho(a)} f(\zeta)(\zeta-a)^{k-1} d\zeta\Big| \leq \frac{1}{2\pi} M\rho^{k-1} L(K_\rho(a)) \leq M\rho^k.$$

Aus $M\rho^k \to 0$ für $\rho \to 0^+$ folgt $a_{-k} = 0$. $\square$

Für Pole der Ordnung p gilt folgende Charakterisierung.

Satz 5.4 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind äquivalent:*

a) f hat an a einen Pol der Ordnung p.

b) Es existiert eine Funktion $g \in H(\Omega)$ mit $g(a) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \Omega \setminus \{a\}).$$

c) $1/f$ ist (definiert und) holomorph auf einer offenen Umgebung U von a mit Nullstelle der Ordnung p an der Stelle a.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wir setzen $g(z) := (z-a)^p f(z)$ für $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad V_{0,R}(a)$$

mit $a_{-p} \neq 0$, so ist

$$g(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}(z-a)^\nu,$$

in $V_{0,r}(a)$, also g holomorph fortsetzbar nach Ω durch $g(a) := a_{-p} \neq 0$. Dabei ist offensichtlich

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \quad (z \in \Omega \setminus \{a\})\,.$$

b) $\Rightarrow$ c): Es sei U eine offene Umgebung von a so, dass $g(z) \neq 0$ in U. Dann ist

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \, \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Also ist $1/f$ (definiert und) holomorph auf U und hat nach B./D. 1.3 eine Nullstelle der Ordnung p an a.
c) $\Rightarrow$ a): Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \cdot g_0(z) \qquad (z \in U \setminus \{a\})$$

mit einer Funktion $g_0 \in H(U)$ mit $g_0(a) \neq 0$. Dann ist auch $g_0(z) \neq 0$ auf einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von a. Also ist

$$f(z) = \frac{1/g_0(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \tilde{U} \setminus \{a\})\,.$$

Da $1/g_0$ holomorph in $\tilde{U}$ ist, hat $1/g_0$ eine Potenzreihendarstellung

$$1/g_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad U_\delta(a)$$

für ein $\delta > 0$. Damit ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^{\nu-p} = \sum_{\nu=-p}^{\infty} b_{\nu+p}(z-a)^\nu\,,$$

mit lokal gleichmäßiger Konvergenz in $V_{0,\delta}(a)$ und es gilt $a_{-p} = b_0 = 1/g_0(a) \neq 0$. $\square$

Als Folgerung erhalten wir

Satz 5.5 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann hat f an a genau dann einen Pol (irgendeiner Ordnung), wenn gilt*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty\,.$$

Beweis. Hat f an a einen Pol, etwa der Ordnung p, so gilt mit g wie in S. 5.4 (da $g(a) \neq 0$)

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z-a|^p} \to \infty \qquad (z \to a)\,.$$

Gilt umgekehrt

$$|f(z)| \to \infty \qquad (z \to a)\,,$$

so existiert eine offene Umgebung U von a mit $f(z) \neq 0$ in $U \setminus \{a\}$ und

$$\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0\,,$$

also ist $1/f$ nach S. 5.3 holomorph fortsetzbar an der Stelle a mit Nullstelle, etwa der Ordnung p. Dann hat f nach S. 5.4 einen Pol der Ordnung p. $\square$

Beispiel 5.6 Es gilt

$$Z(\sin) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad Z(\cos) = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

und alle Nullstellen sind von der Ordnung 1. Damit hat auch tan an den Stellen $k\pi$ Nullstellen der Ordnung 1 und cot an den Stellen $(k+1/2)\pi$. Nach S. 5.4 hat $\cot = 1/\tan$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $k\pi$ und $\tan = 1/\cot$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $(k+1/2)\pi$.
Nach S. 5.5 gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \to k\pi} |\cot z| = \lim_{z \to (k+\frac{1}{2})\pi} |\tan z| = \infty\,.$$

Bemerkung und Definition 5.7 (Riemannsche Zahlenkugel)
Es sei

$$S^2 := \left\{s = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \left\|s - (0,0,\frac{1}{2})\right\|_2 = \frac{1}{2}\right\}.$$

Dann ist durch

$$\varphi(z) := \varphi(x+iy) := \frac{1}{|z|^2+1}\,(x, y, |z|^2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ definiert ([Ü]). Setzt man

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad \varphi(\infty) := (0,0,1),$$

so ist $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \dfrac{\xi}{1-\zeta} + i\dfrac{\eta}{1-\zeta}, & \text{falls } \zeta \neq 1 \\ \infty, & \text{falls } \zeta = 1 \end{cases}\,.$$

(so genannte stereographische Projektion). Weiter wird durch

$$\chi(z,w) := \|\varphi(z) - \varphi(w)\|_2 \qquad (z,w \in \mathbb{C}_\infty)$$

$(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ zu einem kompakten metrischen Raum (Man beachte: Die Abbildung $\varphi : (\mathbb{C}_\infty, \chi) \to (S^2, d_{||\cdot||_2})$ ist eine Isometrie. Damit überträgt sich die Kompaktheit von S^2 auf $\mathbb{C}_\infty$).
Dabei gilt $\chi(z,\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$ für $z \neq \infty$ ([Ü]), also ergibt sich für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$

$$\chi(z_n, \infty) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(d. h. $z_n \to \infty$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$) genau dann, wenn $|z_n| \to \infty\, (n \to \infty)$.
Da $\varphi : (\mathbb{C}, d_{|\cdot|}) \to (S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, d_{||\cdot||_2})$ ein Homöomorphismus ist, gilt für $z \in \mathbb{C}$ zudem $|z_n - z| \to 0$ genau dann, wenn $\chi(z_n, z) \to 0$. Außerdem ist $M \subset \mathbb{C}$ genau dann offen in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, wenn M offen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist.
Ist also $a \in \mathbb{C}$ und ist $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Umgebung U von a mit Pol an der Stelle a, so kann f durch $f(a) := \infty$ zu einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ fortgesetzt werden. (Man beachte: Nach S. 5.5 gilt

$$f(z) \to \infty \qquad (z \to a)$$

in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$).

Bemerkung und Definition 5.8 1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ heißt *meromorph* in Ω, falls

$$P(f) := \{z \in \Omega : f(z) = \infty\} = f^{-1}(\{\infty\})$$

keinen Häufungspunkt in Ω hat, $f \in H(\Omega \setminus P(f))$ gilt und f an allen Stellen $z \in P(f)$ Pole hat (d. h. f ist stetig auf ganz Ω). Wir schreiben

$$M(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty : f \text{ meromorph in } \Omega\}.$$

Ist $A \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω und ist $f \in H(\Omega \setminus A)$ mit Polen an allen $a \in A$, so kann man f durch $f(a) := \infty$ $(a \in A)$ (eindeutig) zu einer auf Ω meromorphen Funktion fortsetzen. Daher spricht man auch in diesem Fall von einer in Ω meromorphen Funktion.
2. Setzt man $1/\infty := 0$ und $1/0 := \infty$, so ist die Abbildung $z \mapsto 1/z$ eine Isometrie auf $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ([Ü]) und damit insbesondere stetig. Hieraus ergibt sich (wieder [Ü]): Ist G ein Gebiet, so gilt

$$f \in M(G) \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad 1/f \in M(G) \setminus \{0\}$$

mit $P(f) = Z(1/f)$ und $Z(f) = P(1/f)$.

Beispiel 5.9 1. Die Funktionen cot und tan sind meromorph in $\mathbb{C}$ (vgl. B. 5.6). Man beachte dabei: $P(\tan) = \{(k+1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und $P(\cot) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ haben keine Häufungspunkte in $\mathbb{C}$.

2. Es sei $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ definiert durch

$$f(z) = \sin(1/z) \qquad \big(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\big)$$

Dann ist $1/f$ meromorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polstellenmenge

$$P(1/f) = Z(f) = \{1/(k\pi) : k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0\}.$$

Bleibt noch, das Verhalten in der Nähe von wesentlichen Singularitäten zu charakterisieren. Bitte schön:

Satz 5.10 *(Casorati-Weierstrass)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind äquivalent:

a) f hat an a eine wesentliche Singularität.

b) Für alle offenen Umgebungen U von a in Ω ist $f(U \setminus \{a\})$ (offen und) dicht in $\mathbb{C}$.

c) Zu jedem $w \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge (z_n) in $\Omega \setminus \{a\}$ mit $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Nach S. 3.8 ist $f(U \setminus \{a\})$ offen. Angenommen, es existiert eine offene Umgebung U von a mit

$$\overline{f(U \setminus \{a\})} \neq \mathbb{C}\,.$$

Dann existieren ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$ so, dass $|f(z) - w| \geq \delta$ für alle $z \in U \setminus \{a\}$ gilt. Wir definieren $g : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Dann ist $g \in H(U \setminus \{a\})$ mit $|g(z)| \leq 1/\delta$ für alle $z \in U, z \neq a$. Also hat g an a eine hebbare Singularität nach S. 5.3 (wir schreiben auch für die Fortsetzung wieder g). Dann ist $1/g \in M(U)$ und damit auch $f = w + 1/g \in M(U)$ (mit $w + \infty := \infty$). Damit hat f an a eine hebbare Singularität oder einen Pol. Widerspruch!
b) $\Rightarrow$ c): Ist $w \in \mathbb{C}$, so existiert zu jeden $n \in \mathbb{N}$ ein z_n mit $0 < |z_n - a| < 1/n$ und $|f(z_n) - w| < 1/n$. Damit gilt $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.
c) $\Rightarrow$ a): Gilt die Bedingung c), so ist f unbeschränkt in jeder Umgebung von a, und es gilt sicher nicht $|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$. Folglich hat f an a weder eine hebbare Singularität noch einen Pol (S. 5.3 bzw. S. 5.5). Also hat f an a eine wesentliche Singularität. $\square$

Beispiel 5.11 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Für die Folge $(-1/n)$ gilt $f(-1/n) = e^{-n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Ist $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ und $w = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so gilt für die Folge

$$z_n = \big(\ln r + i(\varphi + 2n\pi)\big)^{-1}$$

$z_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$f(z_n) = e^{\ln r + i(\varphi+2n\pi)} = re^{i\varphi} = w\,.$$

Also gilt hier sogar $f(z_n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und damit natürlich insbesondere $f(z_n) \to w$ $(n \to \infty)$). Es ist also hier tatsächlich

$$f(U \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für alle Umgebungen U von 0, d.h. in jeder (noch so kleinen) Umgebung von 0 wird jeder Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (unendlich oft) als Funktionswert angenommen!

Bemerkung 5.12 Eine ganze Funktion f heißt *transzendent*, falls f kein Polynom ist. Durch Übertragung des Satzes von Casorati-Weierstrass sieht man: Ist f transzendent, so existiert zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to w\,(n \to \infty)$. (Denn: Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann hat $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f\big(\frac{1}{z}\big) \qquad (z \neq 0)\,,$$

die Laurent-Entwicklung

$$g(z) = a_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu z^{-\mu} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Da $a_\mu \neq 0$ für ∞ viele μ gilt (beachte: f ist kein Polynom), hat g an 0 eine wesentliche Singularität nach B./D. 5.1. Also existiert nach S. 5.10 zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (ζ_n) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\zeta_n \to 0$ und $g(\zeta_n) \to w\,(n \to \infty)$. Die Folge (z_n) mit $z_n = 1/\zeta_n$ erfüllt dann $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to w\,(n \to \infty)$.)

6 Cauchy Theorem und Residuensatz

In den vorherigen Abschnitten haben wir die Cauchysche Integralformel für Kreise und den Cauchyschen Integralsatz auf sternförmigen Gebieten kennengelernt. Wir wollen nun eine gemeinsame Verallgemeinerung herleiten.

Bemerkung und Definition 6.1 Es seien $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota\in I}$ eine Kette und $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt die Funktion $C_\gamma f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(C_\gamma f)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \left(= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\iota\in I}\int\limits_{\alpha_\iota}^{\beta_\iota} \frac{f(\gamma_\iota(t))}{\gamma_\iota(t) - z}\gamma_\iota'(t)\, dt\right) \qquad (z \notin \gamma^*)$$

Cauchy-Integral von f bzgl. γ. Im Fall $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ ergibt sich dabei die Cauchy Transformierte aus B. 1.9. Nach S. 1.7 ist $C_\gamma f \in H(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$. Außerdem gilt für $z \notin \gamma^*$

$$|(C_\gamma f)(z)| \le \frac{1}{2\pi}||f||_{\infty,\gamma^*} L(\gamma)\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \gamma^*)} \to 0 \qquad (|z| \to \infty)\ .$$

Bemerkung 6.2 Ist $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$, so gilt für alle f, die holomorph auf einer Umgebung von $U_R[z_0]$ sind,

$$(C_{K_R(z_0)} f)(z) := (C_\gamma f)(z) = \begin{cases} f(z), & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases}.$$

nach der Cauchyschen Integralformel für Kreise (B. 3.11) und dem Cauchyschen Integralsatz (S. 3.15) (man beachte: für $|z - z_0| > R$ ist dann auch $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ holomorph auf einer (o. E. sternförmigen) Umgebung von $U_R[z_0]$).

Definition 6.3 Eine Kette $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota\in I}$ nennen wir einen *Zyklus*, falls eine Zerlegung $(I_\kappa)_{\kappa\in M}$ von I so existiert, dass $(\gamma_\iota)_{\iota\in I_\kappa}$ für alle $\kappa \in M$ ein geschlossener Pfad ist. Weiter heißt für Zyklen γ

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) := (C_\gamma 1)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*)$$

Index (oder auch *Windungszahl*) von z bzgl. γ.

Beispiel 6.4 Ist γ wie in B. 6.2, so gilt

$$\operatorname{ind}_{K_R(z_0)}(z) := \operatorname{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases}.$$

Der folgende Satz zeigt, dass allgemeiner der Index lokal konstant und ganzzahlig ist. Man beachte dabei, dass für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{C}$ die offene Menge $\mathbb{C} \setminus K$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente hat.

Satz 6.5 *Es sei γ ein Zyklus. Dann ist* $\mathrm{ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus \gamma^*) = W(\mathrm{ind}_\gamma) \subset \mathbb{Z}$. *Außerdem gilt* $\mathrm{ind}_\gamma \equiv \mathrm{const}$ *auf jeder Komponente von* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ *und* $\mathrm{ind}_\gamma \equiv 0$ *auf der unbeschränkten Komponente von* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Beweis.
1. Es sei zunächst $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein C^1-Weg. Dann ist

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*).$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ definieren wir $\varphi = \varphi_z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(t) := \exp\Big(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \Big) \qquad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\ ,$$

also

$$\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t) = 0$$

für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Weiter ist

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma - z} \right)' = \frac{\varphi'(\gamma - z) - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2}$$

auf $[\alpha, \beta]$. Also existiert eine Konstante c mit

$$\varphi(t) = c(\gamma(t) - z) \qquad (t \in [\alpha, \beta])\ .$$

Aus $\varphi(\alpha) = 1$ ergibt sich $c = 1/(\gamma(\alpha) - z)$, also

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(\alpha) - z} \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

2. Wir zeigen, dass $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ganzzahlig ist. Es reicht, die Behauptung für geschlossene Pfade $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ zu beweisen. Dazu sei $\varphi_\iota = \varphi_{\iota,z}$ wie in 1. mit γ_ι statt γ. Da γ ein geschlossener Pfad ist, gilt mit 1.

$$\exp(2\pi i\, \mathrm{ind}_\gamma(z)) = \prod_{\iota \in I} \exp\Big(\int_{\gamma_\iota} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \Big) = \prod_{\iota \in I} \varphi_\iota(\beta_\iota) = \prod_{\iota \in I} \frac{\gamma_\iota(\beta_\iota) - z}{\gamma_\iota(\alpha_\iota) - z} = 1$$

und damit $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.
3. Es sei G eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Da G zusammenhängend und $\operatorname{ind}_\gamma$ stetig und ganzzahlig auf G ist, ist $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv \text{const}$ in G nach S. A.5. Außerdem gilt nach B./D. 6.1

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) \to 0 \qquad (|z| \to \infty)\,.$$

Also ist $|\operatorname{ind}_\gamma(z)| < 1$ für $|z|$ genügend groß. Da $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv \text{const}$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ist, ist $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ dort. □

Definition 6.6 Es sei γ ein Zyklus. Dann heißt

$$\operatorname{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \operatorname{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$

Inneres von γ und

$$\operatorname{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \operatorname{ind}_\gamma(z) = 0\}$$

Äußeres von γ. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein Zyklus in Ω, so heißt γ *nullhomolog* in Ω, falls $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ ist, d. h. falls $\Omega^c \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$.

Satz 6.7 *(Cauchy Theorem)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist γ ein Zyklus in Ω, so sind folgende Aussagen äquivalent:

a) γ ist nullhomolog in Ω.

b) Für alle $f \in H(\Omega)$ ist $f \cdot \operatorname{ind}_\gamma|_{\Omega\setminus\gamma^*} = C_\gamma f|_{\Omega\setminus\gamma^*}$ d. h. für $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ gilt

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = (C_\gamma f)(z)$$

(Cauchysche Integralformel).

c) Für alle $f \in H(\Omega)$ ist

$$\int\limits_\gamma f = 0.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) Es seien Φ wie in S. B.3. Für $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ ist

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z) = (C_\gamma f)(z) - f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z).$$

Also reicht es, $\Phi \equiv 0$ zu zeigen.
Zunächst ist $C_\gamma f$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ nach B./D. 6.1 mit $\Phi(z) = (C_\gamma f)(z)$ für alle $z \in \Omega \cap \operatorname{Ext}(\gamma)$. Weiter ist nach Voraussetzung $\partial\Omega \subset \Omega^c \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$. Damit ist durch

$$F(z) := \begin{cases} \Phi(z), & z \in \Omega \\[1em] (C_\gamma f)(z), & z \in \Omega^c \end{cases}$$

eine ganze Funktion F definiert. Aus $F(z) = (C_\gamma f)(z)$ für $z \in \mathrm{Ext}(\gamma)$ ergibt sich zudem (wieder mit B./D. 6.1)

$$F(z) = (C_\gamma f)(z) \to 0 \qquad (|z| \to \infty).$$

Mit dem Satz von Liouville folgt, dass F konstant ist und damit auch $F \equiv 0$ in $\mathbb{C}$. Also gilt für alle $z \in \Omega$

$$\Phi(z) = F(z) = 0.$$

b) $\Rightarrow$ c) Es sei $z_0 \in \Omega \setminus \gamma^*$. Dann gilt mit b), angewandt auf $f_0 : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f_0(z) = (z - z_0)f(z)$:

$$0 = 2\pi i f_0(z_0) \cdot \mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \int_\gamma \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \int_\gamma f\,.$$

c) $\Rightarrow$ a) Folgt aus $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z} \in H(\Omega)$ für alle $z \notin \Omega$. □

Bemerkung und Definition 6.8 1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Beschränkte (nichtleere) Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ heißen *Löcher* von Ω. Ist γ ein beliebiger Zyklus in Ω so, dass kein Loch von Ω in $\mathrm{Int}(\gamma)$ liegt, so ist γ nullhomolog in Ω.
(Denn: ind_γ ist stetig und ganzzahlig auf $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, also insbesondere auf Ω^c. Da ind_γ konstant auf jeder Komponente A von Ω^c ist, liegt eine Komponente entweder ganz in $\mathrm{Int}(\gamma)$ oder ganz in $\mathrm{Ext}(\gamma)$. Also liegen alle beschränkten Komponenten (falls existent) in $\mathrm{Ext}(\gamma)$. Aus $\mathrm{ind}_\gamma(z) \to 0$ für $z \to \infty$ folgt $\mathrm{ind}_\gamma \equiv 0$ auch auf allen unbeschränkten Komponenten.)
2. Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, falls G keine Löcher hat. Dann ist nach Definition jeder geschlossene Pfad in G auch nullhomolog in G.

Satz 6.9 *Es seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(G)$.*

1. *Für alle geschlossenen Pfade γ in G gilt $\mathrm{ind}_\gamma \cdot f|_{G\setminus\gamma^*} = C_\gamma f|_{G\setminus\gamma^*}$ (Cauchysche Integralformel) und $\int_\gamma f = 0$ (Cauchyscher Integralsatz).*

2. *Die Funktion f hat eine Stammfunktion in G.*

Beweis. Da jeder geschlossene Pfad in G nullhomolog in G ist, ergibt sich 1. aus dem Cauchy Theorem. Mit S. 3.13 folgt damit auch 2. □

Wir wollen nun den Residuensatz beweisen, ein Ergebnis, das man wiederum als Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel und des Cauchyschen Integralsatzes auffassen kann. Im Weiteren werden wir den Satz u. a. nutzen, um gewisse (z. T. reelle) Integrale bequem zu berechnen. Zunächst zum Begriff des Residuums.

Definition 6.10 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in \Omega$. Ist $R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ und ist $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, so heißt der (-1)-te Laurent-Koeffizient a_{-1} der Laurent-Entwicklung von f in $V_{0,R}(a)$ *Residuum* von f an der Stelle a. Wir schreiben

$$\operatorname{res}_f(a) := a_{-1}\Big(= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = \rho} f(\zeta) d\zeta \;\text{ für } 0 < \rho < R\Big).$$

Beispiel 6.11 (vgl. B. 5.2)
1. Hat f an a eine hebbare Singularität, so gilt $\operatorname{res}_f(a) = 0$.
2. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $f(z) = e^z/z^p$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Dann gilt

$$\operatorname{res}_f(0) = \frac{1}{(p-1)!}.$$

3. Für

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} z^{-\mu} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

gilt $\operatorname{res}_f(0) = 1$.

Satz 6.12 *(Residuensatz)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein nullhomologer Zyklus in Ω. Ist f holomorph in $\Omega \setminus A$ für eine Menge $A \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω und ist $\gamma^* \cap A = \emptyset$, so gilt

$$\int\limits_\gamma f = 2\pi i \sum_{w \in A \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{res}_f(w)\,. \tag{6.1}$$

Beweis. Es sei $A_\gamma := A \cap \operatorname{Int}(\gamma)$. Dann ist A_γ endlich ([Ü]; man beachte: $\operatorname{Int}(\gamma) \cup \gamma^* \subset \Omega$ ist kompakt). Wir setzen $\Omega_\gamma := (\Omega \setminus A) \cup A_\gamma$. Nach Voraussetzung und nach Definition von A_γ ist γ auch nullhomolog in Ω_γ. O. E. können wir $A_\gamma \neq \emptyset$ annehmen (für $A_\gamma = \emptyset$ ergibt sich die Behauptung aus dem Cauchy Theorem).
Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(w) \subset \operatorname{Int}(\gamma)$ für alle $w \in A_\gamma$ und

$$|w - \tilde{w}| > 2\delta$$

für alle $w, \tilde{w} \in A_\gamma$, $w \neq \tilde{w}$ gilt. Dann hat f für alle $w \in A_\gamma$ nach S. 4.12 eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(w)(z - w)^\nu$$

in $V(w) := V_{0,\delta}(w)$. Der Hauptteil

$$h_w(z) := \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu}(w)(z - w)^{-\mu}$$

konvergiert lokal gleichmäßig auf $V_{0,\infty}(w) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$ (vgl. D./B. 4.13) und ist damit holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ nach S. 2.12. Weiter folgt für $w \in A_\gamma$

$$\int_\gamma h_w(\zeta)d\zeta = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{-\mu}(w) \int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - w)^\mu} = a_{-1}(w) \cdot 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(w) = 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{res}_f(w)\,.$$

(Man beachte dabei: Für $\mu > 1$ ist $\int_\gamma (\zeta - w)^{-\mu} d\zeta = 0$ nach B. 3.14.)

Die Funktion $g : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$

$$g(z) := f(z) - \sum_{w \in A_\gamma} h_w(z) \qquad (z \in \Omega \setminus A)$$

ist holomorph in $\Omega \setminus A$, und für $w \in A_\gamma$ gilt in $V(w)$

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(w)(z - w)^\nu - \sum_{\tilde{w} \in A_\gamma,\, w \neq \tilde{w}} h_{\tilde{w}}(z)\,.$$

Da die rechte Seite holomorph in $U_\delta(w)$ ist, hat g an w eine hebbare Singularität. Also ist g holomorph fortsetzbar nach Ω_γ. Da γ nullhomolog in Ω_γ ist, ergibt sich

$$\int_\gamma g = 0$$

aus dem Cauchy Theorem. Folglich ist

$$0 = \int_\gamma f - \sum_{w \in A_\gamma} \int_\gamma h_w = \int_\gamma f - 2\pi i \sum_{w \in A_\gamma} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{res}_f(w)\,.$$

□

Bemerkung 6.13 1. Sind G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(G \setminus A)$ für eine Menge $A \subset G$ ohne Häufungspunkt in G, so gilt (6.1) nach B. 6.8 für alle geschlossenen Pfade γ in $G \setminus A$.

2. Im Falle $A = \emptyset$ ergibt (6.1) wieder $\int_\gamma f = 0$ für alle in Ω nullhomologen Zyklen γ und alle $f \in H(\Omega)$. Auch die Cauchysche Integralformel ergibt sich als Spezialfall von (6.1) (angewandt auf $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ mit $A = \{z\}$; [Ü]).

7 Anwendungen des Residuensatzes

Um den Residuensatz anwenden zu können, ist es wichtig, Techniken zur Berechnung von Residuen zur Verfügung zu haben. Für Pole gilt:

Satz 7.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.*

1. *Hat f an a einen Pol der Ordnung p, so ist*

$$\mathrm{res}_f(a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \left((\cdot - a)^p f \right)^{(p-1)}(z) .$$

2. *Existieren eine offene Umgebung U von a und Funktionen $g, h \in H(U)$ mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und $f = g/h$ in $U \setminus \{a\}$, so gilt*

$$\mathrm{res}_f(a) = \frac{g(a)}{h'(a)} .$$

Beweis. 1. Es gilt für $z \in V_{0,R}(a)$, wobei $R := \mathrm{dist}(a, \partial\Omega)$,

$$(z-a)^p f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}(z-a)^\nu =: \varphi(z) .$$

Dabei ist die rechte Seite φ holomorph in $U_R(a)$. Also ist $a_{\nu-p} = \varphi^{(\nu)}(a)/\nu!$ und damit insbesondere

$$\mathrm{res}_f(a) = a_{-1} = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \varphi^{(p-1)}(z) .$$

2. Ist $g(a) \neq 0$, so hat nach Voraussetzung h/g eine Nullstelle der Ordnung 1 an a, also hat f einen Pol der Ordnung 1 an a. Nach 1. ist

$$\mathrm{res}_f(a) = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to a} g(z) \lim_{z \to a} \frac{1}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)} .$$

Ist $g(a) = 0$, so hat g/h eine hebbare Singularität an a, da h eine Nullstelle der Ordnung 1 an a hat ([Ü]). Also ist dann $\mathrm{res}_f(a) = 0$ (B. 6.11.1). □

Beispiel 7.2 1. Es sei $f(z) = \cot z = \cos z / \sin z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$. Dann gilt mit $g(z) = \cos z, h(z) = \sin z$ nach S. 7.1.2

$$g(k\pi) = (-1)^k, \qquad h(k\pi) = 0, \qquad h'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

und damit

$$\mathrm{res}_f(k\pi) = \frac{g(k\pi)}{h'(k\pi)} = 1 \qquad (k \in \mathbb{Z}) .$$

2. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$. Dann gilt mit $g(z) = 1$, $h(z) = 1 + z^2$ nach S. 7.1.2

$$\mathrm{res}_f(\pm i) = \pm \frac{1}{2i}\,.$$

Dies sieht man auch leicht direkt mittels Partialbruchzerlegung: Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\Big)\,,$$

also

$$\mathrm{res}_f(i) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - i| = 1} f(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - i| = 1} \frac{d\zeta}{\zeta - i} = \frac{1}{2i}$$

(und entsprechend für $-i$).

3. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ $(z \neq \pm i)$. Dann hat f an $\pm i$ Pole der Ordnung 2. Es gilt nach S. 7.1.1

$$\mathrm{res}_f(i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\big((z-i)^2 f(z)\big) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{(z+i)^2}\Big) = \lim_{z \to i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}\,.$$

Wir werden nun zeigen, dass man den Residuensatz insbesondere dafür nutzen kann, uneigentliche Integrale der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ zu berechnen. Allgemeiner betrachten wir sogenannte Cauchy-Hauptwerte solcher Integrale.

Bemerkung und Definition 7.3 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Existiert der Grenzwert $c := \lim\limits_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$, so heißt c der *Cauchy-Hauptwert* des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Man schreibt dann auch

$$C - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f := C - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := c.$$

Aus den jeweiligen Definitionen folgt: Existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f$, so gilt $C - \int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{\infty} f$.

Vorbereitend für den folgenden Satz betrachten wir geeignete geschlossene Pfade.

Bemerkung 7.4 Für $R > 0$ seien $\sigma_R(t) := t$ $(t \in [-R, R])$, $\tau_R^+ := Re^{it}$ $(t \in [0, \pi])$ und $\tau_R^-(t) := Re^{it}$ $(t \in [-\pi, 0])$. Dann sind $\gamma_R^+ := (\tau_R^+, \sigma_R)$ und $\gamma_R^- := (\tau_R^-, -\sigma_R)$ geschlossene Pfade in $\mathbb{C}$ und für f stetig auf $K_R(0) \cup [-R, R]$ gilt

$$\int\limits_{\gamma_R^+} f + \int\limits_{\gamma_R^-} f = \int\limits_{(\tau_R^+, \sigma_R, \tau_R^-, -\sigma_R)} f = \int\limits_{(\tau_R^+, \tau_R^-)} f = \int\limits_{K_R(0)} f$$

Insbesondere ist für $z \in U_R(0)$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ (da $z \in \mathrm{Ext}(\gamma_R^-)$)

$$\mathrm{ind}_{\gamma_R^+}(z) = \mathrm{ind}_{K_R(0)}(z) - \mathrm{ind}_{\gamma_R^-}(z) = 1\,.$$

Satz 7.5 *Es sei* $E := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$*, und es sei* $A \subset E^0$ *endlich. Ferner sei* $f \in H(\Omega \setminus A)$ *für eine offene Menge* $\Omega \supset E$*.*

1. *Existiert*

$$g := \lim_{R\to\infty} \int_{\tau_R^+} f \, ,$$

so existiert $C - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *und es gilt*

$$C - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \; = \; 2\pi i\Big(\sum_{w\in A} \mathrm{res}_f(w)\Big) - g\, .$$

2. *Existiert ein* $\alpha > 1$ *mit* $|f(z)| = O(1/|z|^\alpha)$ *für* $|z| \to \infty$*,* $z \in E$*, so ist* f *absolut integrierbar auf* $\mathbb{R}$ *mit*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \; = \; 2\pi i \sum_{w\in A} \mathrm{res}_f(w)\, .$$

Beweis.
1. Es sei $R_0 > 0$ so, dass $A \subset U_{R_0}(0)$. Für $R \geq R_0$ betrachten wir den geschlossenen Pfad γ_R^+ aus B. 7.4. Aus dem Residuensatz und B. 7.4 folgt (beachte: $\Omega^c \subset \mathrm{Ext}(\gamma_R^+)$)

$$\int_{\gamma_R^+} f = 2\pi i \sum_{w\in A} \mathrm{res}_f(w) \qquad \text{für alle } R \geq R_0.$$

Also erhalten wir

$$\int_{-R}^{R} f = \int_{\gamma_R^+} f - \int_{\tau_R^+} f \to 2\pi i\Big(\sum_{w\in A} \mathrm{res}_f(w)\Big) \; - g$$

für $R \to \infty$.
2. Nach Voraussetzung existieren Konstanten $M, R_0 > 0$ mit $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$ für $|z| \geq R_0$, $z \in E$ (und wieder $A \subset U_{R_0}(0)$). Aus der Existenz des Integrals $\int\limits_1^\infty dx/x^\alpha$ folgt die absolute Integrierbarkeit von f auf $\mathbb{R}$ (man beachte dabei: f ist stetig auf $\mathbb{R}$). Insbesondere existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$ und stimmt mit dem Cauchy-Hauptwert überein. Außerdem gilt für $R \geq R_0$ (vgl. B. 3.11.2 und B. 3.12.2)

$$\Big|\int_{\tau_R^+} f\Big| \leq \int |f| \; |d\tau_R^+| = \int_0^\pi |f(Re^{it})|Rdt \leq \pi M R^{1-\alpha} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Also ist die Voraussetzung aus 1. mit $g = 0$ erfüllt. Damit ergibt sich 2. aus 1. □

Bemerkung 7.6 Insbesondere lässt sich S. 7.5.2 bei Integranden der Form

$$e^{icx}\,\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \cos(cx)\,\frac{P(x)}{Q(x)} \;+\; i\,\sin(cx)\,\frac{P(x)}{Q(x)}$$

anwenden, wobei $c \geq 0$ ist und P und Q (reelle) Polynome sind mit $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ und $Q(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
(Denn: Es sei

$$A := Z(Q) \cap E^0$$

die Menge der Nullstellen von Q in der oberen Halbebene E^0.
Wir betrachten $\Omega := (\mathbb{C} \setminus Z(Q)) \cup A$ und $f \in H(\Omega \setminus A)$, definiert durch

$$f(z) := e^{icz}\,\frac{P(z)}{Q(z)} \qquad (z \notin Z(Q)).$$

Dann gilt

$$|f(z)| = \underbrace{e^{-c\,\mathrm{Im}\,z}}_{\leq 1}\,\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \;\leq\; \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = O\Big(\frac{1}{|z|^2}\Big) \quad (|z| \to \infty,\, z \in E).$$

Also sind die Voraussetzungen von S. 7.5.2 erfüllt.)

Beispiel 7.7 Für $c \geq 0$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^{icz}}{1 + z^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})\,.$$

Dann ist f wie in B. 7.6. Also gilt nach S. 7.5.2 (man beachte, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(cx)/(1 + x^2)\,dx = 0$$

gilt, da der Integrand ungerade ist)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx)}{1 + x^2}\,dx \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{icx}}{1 + x^2}\,dx \;=\; 2\pi i\,\mathrm{res}_f(i)\,.$$

Weiter ist (etwa nach S. 7.1.2)

$$\mathrm{res}_f(i) = \frac{e^{icz}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-c}}{2i}\,,$$

also

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx)}{1 + x^2}\,dx = \pi e^{-c}\,.$$

Eine weitere interessante Klasse von Integralen, die mittels des Residuensatzes oft leicht berechnet werden können, sind Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t)dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^{2\pi} f(\sin t)dt\,,$$

wobei f eine rationale Funktion ist. Wir definieren für $z \neq 0$

$$j(z) := \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\,, \qquad k(z) := \frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big).$$

Dann ist $\cos t = j(e^{it})$ und $\sin t = k(e^{it})$ für $t \in [0, 2\pi]$. Also ergibt sich, falls f stetig auf $[-1, 1]$ ist,

$$\int_{|\zeta|=1} f(j(\zeta))\frac{d\zeta}{i\zeta} = \int_0^{2\pi} f(\cos t)dt \tag{7.1}$$

bzw.

$$\int_{|\zeta|=1} f(k(\zeta))\frac{d\zeta}{i\zeta} = \int_0^{2\pi} f(\sin t)dt \tag{7.2}$$

Dies beweist schon im Wesentlichen folgenden

Satz 7.8 *Es sei f eine rationale Funktion.*

1. *Hat $f^*(z) := f(j(z))/z$ keine Pole auf $\mathbb{S}$, so gilt*

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t)dt = 2\pi \sum_{w \in P(f^*)\cap\mathbb{D}} \mathrm{res}_{f^*}(w)\,.$$

2. *Hat $f^{**}(z) := f(k(z))/z$ keine Pole auf $\mathbb{S}$, so gilt*

$$\int_0^{2\pi} f(\sin t)dt = 2\pi \sum_{w \in P(f^{**})\cap\mathbb{D}} \mathrm{res}_{f^{**}}(w)\,.$$

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus (7.1) bzw. (7.2) und dem Residuensatz, angewandt (mit $\Omega = \mathbb{C}$) auf f^* bzw. f^{**} sowie $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). □

Beispiel 7.9 1. Für $0 < \rho < 1$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}\,.$$

Ist

$$f(u) = \frac{1}{1 - 2\rho u + \rho^2}$$

und

$$f^*(z) = \frac{1}{z} f\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \rho(z + 1/z) + \rho^2} = \frac{1}{(z-\rho)(1-\rho z)} ,$$

so hat f^* die beiden einfachen Pole $\rho < 1$ und $1/\rho > 1$. Also gilt nach S. 7.8 und S. 7.1.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} = 2\pi \cdot \operatorname{res}_{f^*}(\rho) = 2\pi \cdot \frac{1}{1 - \rho z}\Big|_{z=\rho} = \frac{2\pi}{1-\rho^2} .$$

Für die Funktion

$$P(\rho, t) := \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} \quad (0 < \rho < 1, 0 \le t \le 2\pi)$$

folgt also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, t) dt = 1$$

für alle ρ. Diese Funktion, der sogenannte Poisson-Kern, spielt eine wichtige Rolle in der Theorie harmonischer Funktionen.

2. Für $p \in \mathbb{N}$ und $c > 1$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(c + \cos t)^p} .$$

Hier ist

$$f(u) = \frac{1}{(c+u)^p} ,$$

also

$$f^*(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(c + (z + 1/z)/2)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z^2 + 2cz + 1)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z - w_1)^p (z - w_2)^p}$$

mit $w_1 = -c + \sqrt{c^2 - 1} \in (-1, 0)$ und $w_2 = -c - \sqrt{c^2 - 1} < -1$.
Also ergibt sich aus S. 7.8 und S. 7.1.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(c + \cos t)^p} = 2\pi \cdot \operatorname{res}_{f^*}(w_1) = \frac{2\pi}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \Big(\frac{2^p z^{p-1}}{(z - w_2)^p}\Big)\Big|_{z=w_1} .$$

Für $p = 1$ erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{c + \cos t} = 2\pi \cdot \frac{2}{w_1 - w_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}} ,$$

und für $p = 2$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(c+\cos t)^2} &= 2\pi \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{4z}{(z-w_2)^2}\right)\Big|_{z=w_1} \\
&= 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{-w_1-w_2}{(w_1-w_2)^3} = \frac{2\pi c}{\sqrt{c^2-1}^3}\,.
\end{aligned}$$

Wir kommen zum Schluss dieses Abschnittes zu zwei interessanten funktionentheoretischen Anwendungen des Residuensatzes.

Satz 7.10 *(Argumentprinzip)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein nullhomologer Zyklus in G. Ist $f \not\equiv 0$ meromorph in G und ist $\gamma^* \cap A(f) = \emptyset$, wobei $A(f) := Z(f) \cup P(f)$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in A(f)\cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ind}_\gamma(w)\cdot n_f(w)$$

mit $n_f(w) := -p$, falls w eine Polstelle der Ordnung p ist.

Beweis. 1. Ist a eine Nullstelle von f der Ordnung $n := n_f(a)$, so existiert eine in einer offenen Umgebung U von a holomorphe Funktion g mit $g(z) \neq 0$ in U und

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \qquad (z \in U)\,.$$

Also folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{in } U \setminus \{a\}\,,$$

d.h. f'/f hat an a einen Pol der Ordnung 1, und es gilt

$$\mathrm{res}_{f'/f}(a) = n\,.$$

Ist a ein Pol der Ordnung p von f, so hat $h := 1/f$ eine Nullstelle der Ordnung p an a. Also ist $\mathrm{res}_{h'/h}(a) = p$. Weiter gilt auf $\Omega \setminus A(f)$

$$h'/h = -f'/f\,,$$

also $\mathrm{res}_{f'/f}(a) = -p$.
2. Ist γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $\gamma^* \cap A(f) = \emptyset$, so gilt nach dem Residuensatz und 1. (man beachte: $A(f)$ hat keine Häufungspunkte in G)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in A(f)\cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ind}_\gamma(w)\cdot n_f(w)\,.$$

□

Bemerkung und Definition 7.11 Wir nennen einen geschlossenen Pfad γ *einfach geschlossen*, falls $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$. Es seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \not\equiv 0$ holomorph in G. Für einfach geschlossene Pfade γ in $G \setminus Z(f)$ ergibt sich aus dem Argumentprinzip

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in Z(f) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_f(w) =: N_{f,\gamma} \,. \tag{7.3}$$

d.h. das Integral auf der linken Seite „zählt“ die Nullstellen von f in $\mathrm{Int}(\gamma)$ (inkl. Vielfachheiten).

Als Folgerung aus dem Argument-Prinzip (bzw. (7.3)) erhalten wir

Satz 7.12 *(Rouché)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es seien $f, g \in H(G)$. Ferner sei γ ein einfach geschlossener Pfad in G so, dass

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \gamma^* \,.$$

Dann hat (neben f) auch g keine Nullstellen auf γ^* und es gilt $N_{f,\gamma} = N_{g,\gamma}$, d. h. f und g haben die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\mathrm{Int}(\gamma)$ (inkl. Vielfachheiten).

Beweis. Für $t \in [0,1]$ betrachten wir die Funktionen $\varphi_t \in H(G)$ mit

$$\varphi_t := f + t(g - f) = f - th$$

mit $h := f - g$. Für $z \in \gamma^*$ gilt

$$|\varphi_t(z)| \geq |f(z)| - t|h(z)| \geq |f(z)| - |h(z)| > 0 \,,$$

so dass φ_t auf γ^* keine Nullstellen hat. Dies gilt also insbesondere für $g = \varphi_1$.
Nach (7.3) gilt für $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi_t'(\zeta)}{\varphi_t(\zeta)} d\zeta \;=\; \sum_{w \in Z(\varphi_t) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_{\varphi_t}(w) \;=:\; N(t) \,.$$

Die Funktion $N : [0,1] \to \mathbb{N}_0$ ist stetig.
(Denn: Sind $t_1, t_2 \in [0,1]$, so gilt

$$\big|2\pi i\big(N(t_2) - N(t_1)\big)\big| = \Big| \int_\gamma \frac{(t_2 - t_1)(f'h - fh')}{(f - t_1 h)(f - t_2 h)} \Big| \leq |t_2 - t_1| \, \Big\| \frac{fh' - f'h}{(|f| - |h|)^2} \Big\|_{\infty, \gamma^*} L(\gamma) \,.$$

Dies zeigt die (Lipschitz-)Stetigkeit von N.)
Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, ist $N(t) \equiv \mathrm{const}$ auf $[0,1]$, also insbesondere

$$N_{g,\gamma} = N(1) = N(0) = N_{f,\gamma} \,.$$

□

Wir geben einige typische Anwendungsbeispiele zum Satz von Rouché.

Beispiel 7.13 1. Wir beweisen noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra. Also: Es sei $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{w \in Z(P)} n_P(w) = n$, d.h. P hat n Nullstellen inkl. Vielfachheiten.
(Denn: Ist $Q(z) := a_n z^n$, so gilt für R genügend groß

$$|P(z) - Q(z)| \;=\; \Big|\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu\Big| \;<\; |a_n z^n| \;=\; |Q(z)| \qquad (|z| = R)\,.$$

Also ergibt sich aus S. 7.12 (mit $\gamma(t) = Re^{it}$)

$$\sum_{w \in Z(P) \cap U_R(0)} n_P(w) \;=\; \sum_{w \in Z(Q) \cap U_R(0)} n_Q(w) \;=\; n_Q(0) = n\,.)$$

2. Wir betrachten die (transzendente) Gleichung

$$e^z \;=\; 1 + 2z\,.$$

Wir suchen alle Lösungen in $\mathbb{D}$. Offensichtlich ist $z = 0$ eine Lösung. Mit $f(z) = 2z$ und $g(z) = 1 + 2z - e^z$ gilt für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| \;=\; |e^z - 1| \;<\; 2 = |f(z)|$$

(beachte: für $|z| \le 1$ gilt

$$|e^z - 1| \;\le\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \;=\; e^{|z|} - 1 \;\le\; e - 1 < 2\,)\,.$$

Also haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{D}$, nämlich eine. Folglich ist $z = 0$ die einzige Lösung der Gleichung in $\mathbb{D}$.

Wir studieren zum Abschluss einige Auswirkungen des Satzes von Rouché auf Funktionenfolgen.

Satz 7.14 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es seien $f_n \in H(G)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G. Ist γ ein einfach geschlossener Pfad in $G \setminus Z(f)$, so ist $N_{f_n,\gamma} = N_{f,\gamma}$ für n genügend groß.*

Beweis. Da f stetig auf der kompakten Menge γ^* ist, gilt

$$\delta := \min_{z \in \gamma^*} |f(z)| > 0$$

und da (f_n) gleichmäßig auf γ^* gegen f konvergiert, existiert ein $n_0 = n_0(\delta) > 0$ so, dass

$$\max_{z \in \gamma^*} |f(z) - f_n(z)| < \delta$$

für alle $n \ge n_0$ gilt. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Rouché (S. 7.12). $\square$

Beispiel 7.15 Es sei
$$f(z) = e^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C}) .$$
Dann gilt für die n-ten Teilsummen $s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} z^\nu/\nu!$ nach S. 7.14, angewandt mit $\gamma(t) = Re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$: Für alle $R > 0$ existiert ein $n_0(R)$ so, dass s_n für alle $n \geq n_0(R)$ in $|z| < R$ keine Nullstelle hat (d.h. die Nullstellen, die nach dem Fundamentalsatz der Algebra ja existieren, rücken mit wachsendem n immer weiter „Richtung ∞").

Bemerkung 7.16 Als Folgerung aus S. 7.14 erhalten wir insbesondere: Ist G ein Gebiet und sind $f_n, f \in H(G)$ mit $f_n \to f \not\equiv 0$ lokal gleichmäßig auf G, so existiert zu jedem $z_0 \in G$ ein $r_0 > 0$ so, dass für alle $0 < r < r_0$ die Funktionen f_n für n genügend groß (abhängig von r) in $U_r(z_0)$ genau $n_f(z_0)$ Nullstellen (inkl. Vielfachheiten) haben.
(Denn: Nach S. 1.5 existiert ein $r_0 > 0$ so, dass $f(z) \neq 0$ in $U_{r_0}[z_0] \setminus \{z_0\}$. Damit folgt die Behauptung aus S. 7.14, angewandt auf $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ für $0 < r < r_0$).

Satz 7.17 *(Hurwitz)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G.

1. *Ist $Z(f_n) = \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist entweder $f \equiv 0$ in G oder es ist $Z(f) = \emptyset$.*
2. *Ist f_n injektiv für $n \in \mathbb{N}$, so ist entweder $f \equiv const$ oder f injektiv.*

Beweis.
1. Ist $f \not\equiv 0$, so ist $n_f(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in G$ nach B. 7.16.
2. Es sei f nicht konstant. Wir betrachten $w_0 \in f(G)$ und $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = w_0$, d. h. $z_0 \in Z(f - w_0)$. Zu zeigen ist $f(z_1) \neq w_0$ für alle $z_1 \in G$, $z_1 \neq z_0$.
Es sei also $z_1 \neq z_0$. Sind $U_j = U_\delta(z_j) \subset G$ $(j = 0, 1)$ mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, so existiert nach B. 7.16 ein n_0 mit $Z(f_n - w_0|_{U_0}) \neq \emptyset$ für $n \geq n_0$. Da f_n injektiv ist, folgt $Z(f_n - w_0|_{U_1}) = \emptyset$ für $n \geq n_0$. Nach 1. ist dann auch $Z(f - w_0|_{U_1}) = \emptyset$, also insbesondere $f(z_1) \neq w_0$. □

8 Konforme Abbildungen

In den vorherigen Abschnitten haben wir an verschiedenen Stellen durch Anwendung der affin-linearen Abbildung $w \mapsto z_0 + Rw$ Resultate vom Einheitskreis $\mathbb{D}$ auf beliebige Kreise $U_R(z_0)$ übertragen. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass man mithilfe von bijektiven holomorphen Abbildungen sogar beliebige einfach zusammenhängende (echte) Teilgebiete von $\mathbb{C}$ „konform“ zum Einheitskreis deformieren kann.
Zunächst betrachten wir dazu (noch einmal) das lokale Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen.

Bemerkung 8.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ferner sei $z_0 \in \Omega$.
Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist f lokal umkehrbar an z_0, d. h. es existiert eine offene Umgebung U von z_0 so, dass $f|_U$ injektiv ist (vgl. B. 3.7). Außerdem ist dann $V = f(U)$ offen (S. 3.8) und die auf V definierte Umkehrfunktion ist holomorph mit nichtverschwindender Ableitung.

Umgekehrt gilt: Ist $f|_U$ injektiv für eine Umgebung U von z_0, so ist schon $f'(z_0) \neq 0$.

(Denn: Nach S. 3.6 kann man U so wählen, dass $f(z) = w_0 + \varphi^m(z) = 0$, wobei und $m \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in H(U)$ mit $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) \neq 0$. Angenommen, $f'(z_0) = 0$. Dann ist $m \geq 2$. Da $\varphi(U)$ eine Umgebung von 0 ist (S. 3.8), existiert ein $w \in \varphi(U)$ mit $we^{2\pi i/m} \in \varphi(U)$. Sind $z_1, z_2 \in U$ mit $\varphi(z_1) = w, \varphi(z_2) = we^{2\pi i/m}$, so ist $f(z_1) = f(z_2)$. Widerspruch.)

Bemerkung und Definition 8.2 Es seien G und D Gebiete in $\mathbb{C}$.
1. Eine bijektive, holomorphe Funktion $\varphi : G \to D$ nennt man auch eine *konforme* Abbildung von G auf D. Nach B. 8.1 ist dann $Z(\varphi') = \emptyset$ und $\varphi^{-1} : D \to G$ ist ebenfalls konform.
2. Die Gebiete G, D heißen *konform äquivalent*, falls eine konforme Abbildung $\varphi : G \to D$ existiert. Nach 1. und der Kettenregel ist durch

$$G \sim D :\Leftrightarrow G, D \text{ konform äquivalent}$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete in $\mathbb{C}$ definiert.

Beispiel 8.3 1. (Drehungen) Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ sei $\varphi(z) = \varphi_\vartheta(z) = e^{i\vartheta}z$ $(z \in \mathbb{D})$. Dann ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(0) = 0$.
2. Es seien $G = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$ und $D = \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Dann ist $\varphi := \exp|_G : G \to D$ konform mit $\varphi^{-1} = \log$ (vgl. B. 3.4).
3. Es seien $G = \mathbb{D}^* := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und $D := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Dann ist durch

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (z \in G)$$

eine konforme Abbildung $\varphi : G \to D$ definiert (die sogenannte Joukowski-Abbildung; [Ü]).

Bemerkung und Definition 8.4 Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

mit $\det M = ad - bc \neq 0$. Wir setzen $\alpha/\infty := 0$, $\alpha/0 := \infty$ und $\alpha \cdot \infty := \infty$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann heißt die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit

$$\varphi(z) := \varphi_M(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty, & \text{falls } z = -d/c \\ a/c, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

eine *Möbius-Transformation*. Jede Möbius-Transformation $\varphi : (\mathbb{C}_\infty, \chi) \to (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist ein Homöomorphismus und es gilt

$$\varphi_M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{a - cw} \; (= \varphi_{M^{-1}}(w)) \qquad (w \in \mathbb{C}_\infty)$$

(nachrechnen; man beachte dabei auch: $\varphi_{\lambda M} = \varphi_M$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Weiter ist $\varphi|_{\mathbb{C}}$ meromorph mit Pol der Ordnung 1 an $-d/c$.

Spezielle Klassen von Möbius-Transformationen ergeben wichtige konforme Abbildungen auf die Einheitskreisscheibe:

Satz 8.5 1. *Für $\alpha \in \mathbb{D}$ ist durch*

$$\varphi(z) := \varphi_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definiert mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ und $\varphi_\alpha^{-1}(w) = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha} w}$ $(w \in \mathbb{D})$, d. h. $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$.

2. *Für $\beta \in \mathbb{H} := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ ist durch*

$$\varphi(z) := \varphi_\beta(z) := \frac{z - \beta}{z - \overline{\beta}} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\beta : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ definiert mit $\varphi_\beta(\beta) = 0$ und $\varphi_\beta^{-1}(w) = \frac{\beta - \overline{\beta} w}{1 - w}$ $(w \in \mathbb{D})$.

Beweis. Wir betrachten φ wieder als Möbiustransformation, definiert auf $\mathbb{C}_\infty$.
1. Es gilt für $|z| = 1$

$$|z - \alpha| = \underbrace{|z|}_{=1} |1 - \alpha \overline{z}| = |1 - \overline{\alpha} z|,$$

also $\big|\varphi(z)\big| = 1$, d. h. $\varphi(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$. Weiter ist nach B./D. 8.4

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{w + \alpha}{1 + \overline{\alpha} w} \qquad (w \in \mathbb{D}),$$

also von der gleichen Form. Damit ist auch $\varphi^{-1}(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$ und folglich $\varphi(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$. Hieraus folgt wiederum $\varphi(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S}) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S}$. Aus $\varphi(\alpha) = 0 \in \mathbb{D}$ und der Gebietstreue von φ (beachte: φ ist als Homöomorphismus eine offene Abbildung) ergibt sich dann $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $\varphi(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und damit auch $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
2. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x-\beta| = |x-\overline{\beta}|$, d. h. $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$. Außerdem ist $\varphi(\infty) = 1$, also $\varphi(\mathbb{R}_\infty) \subset \mathbb{S}$ (wobei $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Da $\varphi\big(\mathbb{R}_\infty\big)$ zusammenhängend ist und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 1$ gilt, folgt $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$. Aus $\varphi(\beta) = 0 \in \mathbb{D}$ ergibt sich wie in 1. damit auch $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. $\square$

Beispiel 8.6 (Cayley-Transformation) Durch

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

ist eine konforme Abbildung von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{D}$ definiert. Dabei gilt $\varphi(i) = 0$ und

$$\varphi^{-1}(w) = i \cdot \frac{1+w}{1-w} \qquad (w \in \mathbb{D}).$$

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorph, so ist f nach dem Satz von Liouville bereits konstant. Damit existiert insbesondere keine konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{D}$, d. h. $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sind nicht konform äquivalent. Wesentliches Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes, der besagt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ konform äquivalent zum Einheitskreis $\mathbb{D}$ ist. Der Satz zeigt, dass der Einheitskreis nicht nur als ein Beispiel, sondern – in diesem Sinne – als ein Modell eines beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiets angesehen werden kann.
Wir beweisen dazu zunächst verschiedene Hilfsresultate, die auch für sich genommen von Interesse sind. Einfach und gleichzeitig sehr nützlich ist das sogenannte Schwarzsche Lemma.

Satz 8.7 *(Schwarz)*
Es sei $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Dann ist $M(r, f) \leq r$ für $0 < r < 1$ und $|f'(0)| \leq 1$. Außerdem folgt aus der Gleichheit in einer der beiden Ungleichungen, dass f eine Drehung ist, d.h. es existiert ein ϑ mit $f(z) = e^{i\vartheta}z$ für $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. Aus $f(0) = 0$ folgt, dass $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & \text{falls } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

holomorph in $\mathbb{D}$ ist. Es sei $0 \leq r < 1$ gegeben. Da $M(\cdot, g)$ monoton wachsend ist (nach dem Maximimprinzip), gilt für $r < s < 1$

$$M(r, g) \leq M(s, g) = M(s, f)/s \leq 1/s \to 1 \qquad (s \to 1^-).$$

Also ist $M(r,g) \le 1$ und damit $M(r,f) = rM(r,g) \le r$ sowie $|f'(0)| \le 1$. Ist $M(r,f) = r$ für ein $0 < r < 1$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ ein Maximum in $\mathbb{D}$. Nach der negativen Form des Maximumprinzips (S. 2.5) ist dann $g(z) \equiv c$ mit einem c vom Betrag 1. Damit ist f eine Drehung. □

Wir werden nun den Satz von Arzela-Ascoli verwenden, um den wichtigen Satz von Montel zu beweisen.

Satz 8.8 *(Montel)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge K von Ω, so ist $\mathcal{F}$ eine normale Familie in $C(\Omega, \mathbb{C})$, d. h. jede Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ hat eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis. Nach B. C.6.2 reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist. Es sei $z_0 \in \Omega$. Ist $U_R[z_0] \subset \Omega$, so ist $c := \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\infty, U_R[z_0]} < \infty$. Ist $0 < r < R$, so ergibt sich für $f \in \mathcal{F}$ aus der Cauchyschen Ungleichung (2.1), wieder angewandt auf $g(w) := f(z_0 + Rw)$,

$$\|f'\|_{\infty, U_r[z_0]} \le \frac{1}{(1 - r/R)^2} \frac{c}{R} = \frac{R}{(R-r)^2} \cdot c.$$

und damit für $z \in U_r(z_0)$ nach dem Schrankensatz

$$\big|f(z) - f(z_0)\big| \le \frac{R}{(R-r)^2} c \cdot |z - z_0|.$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig (Lipschitz-) stetig an z_0. □

Satz 8.9 *(Riemannscher Abbildungssatz)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei $z_0 \in G$. Dann existiert eine konforme Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(z_0) = 0$. Insbesondere sind G und $\mathbb{D}$ konform äquivalent.

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{\psi \in H(G) : \psi(G) \subset \mathbb{D}, \psi \text{ injektiv}, \psi(z_0) = 0\}.$$

Zu zeigen ist: Es existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $\varphi(G) = \mathbb{D}$.

1. Wir zeigen $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Denn: Es sei $\zeta \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann existiert ein $f \in H(G)$ mit $f^2(z) = z - \zeta$ für alle $z \in G$ ([Ü]; man beachte dabei: ist $h \in H(G)$ so, dass $e^{h(z)} = z - \zeta$, so ist $f = e^{h/2}$ geeignet). Ist $f(z_1) = \pm f(z_2)$, so ist $z_1 - \zeta = f^2(z_1) = f^2(z_2) = z_2 - \zeta$, also auch $z_1 = z_2$. Damit ist f injektiv und aus $w \in f(G) \setminus \{0\}$ folgt $-w \notin f(G)$.

Da $f(G)$ ein Gebiet ist (Gebietstreue holomorpher Funktionen), existiert ein Kreis $U_r(a)$ mit $0 \notin U_r[a] \subset f(G)$. Dann gilt aber $U_r[-a] \cap f(G) = \emptyset$. Ist $\psi := r/(f+a)$, so ist ψ injektiv und $\psi(G) \subset \mathbb{D}$ (beachte: $|f+a| > r$). Die Funktionen φ_α aus S. 8.5.1 bilden $\mathbb{D}$ konform auf $\mathbb{D}$ ab mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$. Für $\alpha := \psi(z_0)$ ist damit $\varphi_\alpha \circ \psi \in \mathcal{F}$.

2. Wir zeigen: Ist $\psi \in \mathcal{F}$ mit $\psi(G) \neq \mathbb{D}$, so existiert ein $\psi_1 \in \mathcal{F}$ mit $\left|\psi_1'(z_0)\right| > \left|\psi'(z_0)\right|$. Denn: Es sei $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(G)$. Dann ist $\varphi_\alpha \circ \psi \in H(G)$ injektiv und $(\varphi_\alpha \circ \psi)(G) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Wieder existiert ein $g \in H(G)$ mit $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. Wie in 1. sieht man, dass g injektiv ist. Ist $\psi_1 := \varphi_\beta \circ g$, wobei $\beta = g(z_0)$, so folgt $\psi_1 \in \mathcal{F}$ und

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ g^2 = \varphi_{-\alpha} \circ (\varphi_{-\beta})^2 \circ \psi_1$$

(beachte $\varphi_{-\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}$ und entsprechend für β). Ist $h := \varphi_{-\alpha} \circ (\varphi_{-\beta})^2$, so gilt $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ mit

$$h(0) = \varphi_{-\alpha}(g^2(z_0)) = \psi(z_0) = 0$$

und h ist **nicht injektiv**. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $|h'(0)| < 1$. Also ergibt sich mit der Kettenregel (beachte: $\psi_1(z_0) = 0$)

$$|\psi'(z_0)| = |h'(0)| \cdot |\psi_1'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|.$$

3. Wir definieren $\ell : H(G) \to \mathbb{R}$ durch $\ell(f) = |f'(z_0)|$ $(f \in H(G))$. Nach 2. reicht es, zu zeigen: Es existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}$ mit

$$\ell(\varphi) \geq \ell(\psi) \quad (\psi \in \mathcal{F}).$$

Zunächst existiert eine Folge (φ_n) in $\mathcal{F}$ mit

$$\ell(\varphi_n) \to \eta := \sup_{\psi \in \mathcal{F}} \ell(\psi) \ \in [0, \infty] \qquad (n \to \infty).$$

Da $\psi(G) \subset \mathbb{D}$ für alle $\psi \in \mathcal{F}$ gilt, ist $\mathcal{F}$ normal nach S. 8.8. Also existiert eine Teilfolge $(\varphi_n)_{n \in I}$ von (φ_n), die lokal gleichmäßig auf G gegen eine Funktion φ konvergiert. Nach S. 2.12 ist $\varphi \in H(G)$ und es gilt $\varphi_n' \to \varphi'$ $(n \to \infty,\, n \in I)$ lokal gleichmäßig auf G, also insbesondere $\ell(\varphi_n) \to \ell(\varphi)$. Folglich ist $\ell(\varphi) = \eta (< \infty)$. Aus $\varphi_n(G) \subset \mathbb{D}$ und $\varphi \not\equiv \text{const}$ (beachte $\eta > 0$) folgt mit dem Satz von Hurwitz, angewandt auf $\varphi_n - w_0$ für $|w_0| \geq 1$, auch $\varphi(G) \subset \mathbb{D}$. Schließlich folgt aus der Injektivität von φ_n auch die Injektivität von φ, wieder mit dem Satz von Hurwitz. Damit ist $\varphi \in \mathcal{F}$. □

Man kann sich (im Fall der Existenz) fragen, „wieviele" konforme Abbildungen φ zwischen G und $\mathbb{D}$ mit $\varphi(z_0) = 0$ existieren.

Bemerkung 8.10 1. Sind G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $\varphi_1, \varphi_2 : G \to \mathbb{D}$ konform mit

$$\varphi_1(z_0) = 0 = \varphi_2(z_0),$$

so ist $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(0) = 0$. Also gilt nach dem Schwarzschen Lemma, angewandt auf φ^{-1} und φ,

$$|z| = |\varphi^{-1}(\varphi(z))| \leq |\varphi(z)| \leq |z| \qquad (z \in \mathbb{D})$$

und damit $|\varphi(z)| = |z|$. Wieder nach dem Schwarzschen Lemma ist φ eine Drehung, d. h.

$$\varphi_2(z) = e^{i\vartheta}\varphi_1(z) \qquad (z \in G)$$

für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$.
Umgekehrt gilt natürlich auch: Ist $\varphi_1 : G \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi_1(z_0) = 0$ und ist $\varphi_2 = e^{i\vartheta}\varphi_1$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$, so ist $\varphi_2 : G \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi_2(z_0) = 0$.
Durch geeignete Wahl von ϑ lässt sich φ also stets so normieren, dass $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$ gilt.
2. Ist $G \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und ist $z_0 \in G$, so existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz und 1. **genau eine** konforme Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$.

Beispiel 8.11 Es sei $\alpha \in \mathbb{D}$. Nach S. 8.5.1 und B. 8.10 ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(\alpha) = 0$ genau dann, wenn φ von der Form

$$\varphi(z) = e^{i\vartheta}\,\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ ist.

A Zusammenhängende Mengen

Bemerkung und Definition A.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. X heißt *unzusammenhängend*, falls offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit

$$X = U \cup V,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset\,.$$

   Anderenfalls heist X *zusammenhängend*.

2. $M \subset X$ heißt *unzusammenhängend*, falls $(M, d_{|M\times M})$ unzusammenhängend ist (d. h. falls offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$, $U \cap V \cap M = \emptyset$). Anderenfalls heißt M *zusammenhängend*.

Aus der Definition ergibt sich leicht, dass einpunktige Mengen zusammenhängend sind, und dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn außer $\emptyset$ und X keine Teilmengen gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Beispiel A.2 Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.
1. Wir betrachten $M = [0,1] \cup [2,3]$. Dann gilt für die offenen Mengen $U = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), V = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$:

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
2. Ist $M = \mathbb{Q}$, so gilt für die offenen Mengen $U = (-\infty, \sqrt{2}), V = (\sqrt{2}, \infty)$:

$$\mathbb{Q} \subset U \cup V, \quad U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset, \quad V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap \mathbb{Q} = \emptyset\,,$$

also ist auch $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend.

In $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ gilt allgemein

Satz A.3 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (ggfs. einpunktiges) Intervall ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < c < b$ und $a, b \in M, c \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, c), V := (c, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
„$\Leftarrow$“: Angenommen, M ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen U, V in $\mathbb{R}$ mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap V \cap M = \emptyset$.
Es seien $a \in U \cap M$, $b \in V \cap M$. Dann ist $a \neq b$ (und dann o.E. $a < b$). Da M ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subset M$. Wir setzen $\xi := \sup(U \cap [a, b])$.

Da U offen ist, gilt $\xi > a$. Damit ist $\xi \notin V$ (Denn: angenommen $\xi \in V$. Da V offen ist, existiert dann ein $a < c < \xi$ mit $(c, \xi] \subset V$. Nach Definition des Supremums ist $(c, \xi] \cap U \neq \emptyset$ und damit auch $U \cap V \cap M \neq \emptyset$. Widerspruch.)
Da $M \subset U \cup V$ ist, folgt $\xi \in U$. Da U offen und $\xi < b$ ist, widerspricht dies der Definition von ξ. □

Der folgende Satz zeigt, dass der Zusammenhang einer Menge sich unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz A.4 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist auch $f(M) \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir können uns beim Beweis auf den Fall $M = X$ und $Y = f(M)$ beschränken (ansonsten betrachte $g : M \to f(M)$ mit $g(x) := f(x)$ $(x \in M)$).
Es sei $B \subset Y$ offen und abgeschlossen. Dann ist auch $f^{-1}(B) \subset X$ offen und abgeschlossen. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(B) = \emptyset$ oder $f^{-1}(B) = X$. In ersten Fall ist $B = \emptyset$ und im zweiten gilt $Y = f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, also $B = Y$. Damit ist $Y = f(X)$ zusammenhängend. □

Als Konsequenz aus S. A.3 und S. A.4 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz A.5 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Beweis. Nach S. A.4 ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, also ein Intervall nach S. A.3. □

Bemerkung A.6 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
Sind M_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.
(Denn: Wir setzen $M := \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $M \subset U \cup V$, $M \cap U \neq \emptyset$ und $M \cap V \neq \emptyset$. Ist $x \in \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. O. E. sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $M_\alpha \cap V \neq \emptyset$. Aus $x \in M_\alpha \cap U$ folgt auch $M_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Da M_α zusammenhängend ist, folgt $M_\alpha \cap U \cap V \neq \emptyset$. Damit ist auch $M \cap U \cap V \neq \emptyset$.)

Bemerkung und Definition A.7 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$. Für $x \in M$ heißt

$$Z_M(x) := \bigcup \{A \subset M : x \in A, A \text{ zusammenhängend}\}$$

(*Zusammenhangs-)Komponente* von M (bezüglich x).
Nach B. A.6 ist $Z_M(x)$ zusammenhängend. Zudem gilt ([Ü]) für $x, y \in M$ entweder $Z_M(x) = Z_M(y)$ oder $Z_M(x) \cap Z_M(y) = \emptyset$ (also ist $\{Z_M(x) : x \in M\}$ eine Zerlegung von M).

Bemerkung und Definition A.8 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
1. Ist $\gamma : [a, b] \to X$ stetig, so heißt γ ein *Weg* (in X). Der Punkt $\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* des Weges und $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* des Weges. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt der Weg *geschlossen*. Ferner heißt γ ein *Jordanweg*, falls aus $\gamma(t) = \gamma(s)$ schon $t, s \in \{a, b\}$ folgt. Schließlich nennt man $\gamma^* := \gamma([a, b])$ die *Spur* von γ. Nach S. A.4 und S. A.3 ist γ^* zusammenhängend.
2. Eine Menge $M \subset X$ heißt *wegzusammenhängend*, falls zu allen Punkten $x, y \in M$ ein Weg γ in M existiert mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

Bemerkung und Definition A.9 Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^d$ heißt *sternförmig* (bzgl. x_0), falls $I[x, x_0] \subset M$ für alle $x \in M$ gilt, d.h. falls $M = \bigcup_{x \in M} I[x, x_0]$ (hierbei ist $I[x, x_0] = \gamma^*_{x_0,x}$, wobei $\gamma_{x_0,x}(t) = x_0 + t(x - x_0)$ für $t \in [0, 1]$). Insbesondere sind konvexe Mengen sternförmig. Außerdem ist jede sternförmige Menge wegzusammenhängend.

Satz A.10 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $M \subset X$ wegzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $x_0 \in M$ fest. Dann existiert zu jedem $x \in M$ ein Weg γ_x in M mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x. Damit ist $M = \bigcup_{x \in M} \gamma^*_x$. Da γ^*_x zusammenängend ist und $x_0 \in \bigcap_{x \in M} \gamma^*_x$ gilt, ist M nach B. A.6 zusammenhängend. □

Bemerkung und Definition A.11 1. Eine Menge $G \subset \mathbb{K}^d$ heißt *Gebiet*, falls G offen, nichtleer und zusammenhängend ist.
2. Ist G ein Gebiet, so ist G auch wegzusammenhängend.
(Denn: Es seien $x_0 \in G$ fest und A die Menge aller $x \in G$ so, dass ein Weg γ_x in G existiert mit Endpunkt x und Anfangspunkt x_0. Ist $x \in A$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset G$. Ist $y \in U_\delta(x)$, so lässt sich γ_x durch „Anhängen“ einer Strecke zu einem Weg in G mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt y fortsetzen. Also ist A offen in G. Die gleiche Überlegung liefert auch die (Folgen-)Abgeschlossenheit von A in G. Da $A \neq \emptyset$ ist (beachte: $x_0 \in A$), folgt $A = G$.)
3. Ist $\Omega \subset \mathbb{K}^d$ offen, so ist auch $Z_\Omega(x)$ offen für alle $x \in \Omega$ ([Ü]). Also ist jede Komponente von Ω offen (und damit ein Gebiet). Außerdem hat Ω höchstens abzählbar viele Komponenten ([Ü]).

B Parameterintegrale

Satz B.1 *Es seien $M \subset \mathbb{K}$ kompakt und $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Ferner sei $\varphi : M \times I \to \mathbb{C}$ so, dass $\varphi(z,\cdot)$ für alle $z \in M$ eine Regelfunktion ist. Wir definieren $\Phi : M \to \mathbb{C}$ durch*

$$\Phi(z) := \int_a^b \varphi(z,t)\,dt \qquad (z \in M).$$

1. *Ist φ stetig auf $M \times I$, so ist auch Φ stetig (auf M).*
2. *Ist M konvex und ist $\varphi(\cdot,t)$ für alle $t \in I$ differenzierbar und $\frac{\partial\varphi}{\partial z} : M \times I \to \mathbb{C}$ mit $\frac{\partial\varphi}{\partial z} := \partial_1\varphi$ stetig, so ist Φ (stetig) differenzierbar auf M mit*

$$\Phi'(z) = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)\,dt \qquad (z \in M).$$

Beweis. Es sei $z_0 \in M$ fest.
1. Da $M \times I$ kompakt ist, ist φ gleichmäßig stetig auf $M \times I$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t)| < \varepsilon \qquad (|z - z_0| < \delta,\, t \in I).$$

Dann ist für $|z - z_0| < \delta$ auch

$$|\Phi(z) - \Phi(z_0)| \le \int_a^b |\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t)|dt \le \varepsilon(b-a)$$

2. Wir setzen für $t \in I$

$$h_t(z) := \varphi(z,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)\cdot z \qquad (z \in M).$$

Dann ist h_t differenzierbar auf M mit

$$h_t'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t) \qquad (z \in M).$$

Nun sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ stetig auf $M \times I$ ist (und $h_t'(z_0) = 0$ gilt), existiert wie oben ein $\delta > 0$ so, dass

$$|h_t'(z)| < \varepsilon \qquad (|z - z_0| < \delta,\, t \in I).$$

Ist $0 < |z - z_0| < \delta$, so ergibt sich mit $\gamma(s) := z_0 + s(z - z_0)$ für $s \in [0,1]$ nach dem HDI, Teil 2 (beachte: h_t' ist stetig auf M) und der Kettenregel für alle $t \in I$

$$h_t(z) - h_t(z_0) = \int_0^1 (h_t \circ \gamma)'(s)\,ds = \int_0^1 h_t'(\gamma(s))ds \cdot (z - z_0).$$

Hieraus folgt für alle $t \in I$

$$|\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)(z-z_0)|$$

$$= |h_t(z) - h_t(z_0)| \le \int_0^1 \underbrace{|h_t'(\gamma(s))|}_{<\varepsilon} ds \cdot |z-z_0| < \varepsilon|z-z_0|,$$

also

$$|\Phi(z) - \Phi(z_0) - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)\,dt \cdot (z-z_0)|$$

$$\le \int_a^b |\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)(z-z_0)|\,dt \le \varepsilon|z-z_0|(b-a)$$

und damit

$$\Big|\frac{\Phi(z)-\Phi(z_0)}{z-z_0} - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)dt\Big| \le \varepsilon(b-a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung B.2 Da Stetigkeit und Differenzierbarkeit lokale Eigenschaften sind, gilt die Aussage des Satzes auch für beliebige offene Mengen M (Man beachte: Ist M offen, so gilt $M = \bigcup_{z\in M} \overline{U_{\delta_z}(z)}$ für geeignete $\delta_z > 0$).

Der folgende Satz wird im Beweis zum Cauchy Theorem verwandt.

Satz B.3 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$ und γ eine Kette in Ω. Dann ist $\Phi : \Omega \to \mathbb{C}$, definiert durch*

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta \qquad (z \in \Omega)$$

wobei der Differenzenquotient für $z = \zeta$ als $f'(z)$ interpretiert wird, holomorph in Ω.

Beweis. 1. Wir definieren $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z,\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}, & z \ne \zeta \\ f'(z), & z = \zeta \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)-f(z)-f'(z)(\zeta-z)}{(\zeta-z)^2}, & \zeta \ne z \\ \dfrac{f''(z)}{2}, & \zeta = z \end{cases}$$

und g sowie $\partial g/\partial z$ sind stetig auf $\Omega \times \Omega$.
Denn: Ist $(z_0, \zeta_0) \in \Omega \times \Omega$ mit $\zeta_0 \neq z_0$, so gilt mit der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z_0, \zeta_0) = \frac{f(\zeta_0) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta_0 - z_0)}{(\zeta_0 - z_0)^2}.$$

Ist $\zeta_0 = z_0$, so gilt für $z \neq z_0$

$$\begin{aligned} \frac{g(z, z_0) - g(z_0, z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{(z - z_0)^2}\big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big) \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^{\nu-2} \to \frac{f''(z_0)}{2} \quad (z \to z_0). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $\partial g/\partial z$ ist klar an allen Stellen (z_0, ζ_0) mit $z_0 \neq \zeta_0$.
Es sei also $z_0 = \zeta_0$ und $0 < R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Dann ist nach dem Taylor-Satz für Richtungen ($\to$ Analysis) für $z, \zeta \in U_R(z_0), z \neq \zeta$ mit $\mathbf{v} := \zeta - z$

$$\begin{aligned} f(\zeta) = f(z + \mathbf{v}) &= f(z) + \partial_{\mathbf{v}} f(z) + \int_0^1 (1 - s)\, \partial_{\mathbf{v}}^2 f(z + s\mathbf{v})\, ds \\ &= f(z) + f'(z) \cdot (\zeta - z) + (\zeta - z)^2 \int_0^1 (1 - s)\, f''(z + s\mathbf{v})\, ds. \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich aus der Stetigkeit von f'' an z_0

$$\int_0^1 (1 - s) f''(z + s\mathbf{v})\, ds \to f''(z_0) \int_0^1 (1 - s) ds = \frac{f''(z_0)}{2} \qquad ((z, \zeta) \to (z_0, z_0)).$$

Also folgt für $(z, \zeta) \to (z_0, z_0)$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z, \zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^1 (1 - s)\, f''(z + s\mathbf{v})\, ds, & \text{falls } z \neq \zeta \\ \displaystyle\frac{f''(z)}{2}, & \text{falls } z = \zeta \end{array} \right\} \to \frac{f''(z_0)}{2} = \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, z_0).$$

Eine analoge (einfachere) Argumentation unter Nutzung des Taylor-Satzes für $n = 0$ statt $n = 1$ liefert auch die Stetigkeit von g auf $\Omega \times \Omega$.
2. Es sei g wie in 1. Dann ist mit $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, \zeta)\, d\zeta \left(= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\iota \in I} \int_{\alpha_\iota}^{\beta_\iota} g(z, \gamma_\iota(t)) \gamma_\iota'(t) dt \right) \qquad (z \in \Omega).$$

Nach 1. und S. B.1 ist Φ differenzierbar auf Ω mit $\Phi'(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{\partial g}{\partial z}(z, \zeta)\, d\zeta$ für $z \in \Omega$.
Die Stetigkeit von $\partial g/\partial z$ impliziert auch, dass Φ' stetig ist (ergibt sich wieder aus S. B.1).
Damit ist $\Phi \in H(\Omega)$. □

C Der Satz von Arzela-Ascoli

Wir betrachten allgemeine metrische Räume und Mengen stetiger Funktionen zwischen diesen metrischen Räumen. Dazu seien $(X, d = d_X), (Y, d = d_Y)$ metrische Räume. Wir setzen

$$C(X,Y) := \{f : X \to Y : f \text{ stetig}\}$$

und für X kompakt

$$d_\infty(f,g) := \max_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big) \qquad (f, g \in C(X,Y)).$$

(Beachte: Aus

$$\big|d(u,v) - d(\tilde{u}, \tilde{v})\big| \leq d(u, \tilde{u}) + d(v, \tilde{v}) \qquad (u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in Y)$$

folgt

$$\big|d(f(x), g(x)) - d\big(f(\tilde{x}), g(\tilde{x})\big)\big| \leq d\big(f(x), f(\tilde{x})\big) + d\big(g(x), g(\tilde{x})\big)$$

für alle $x, \tilde{x} \in X$ und damit aus der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f und g auch die (gleichmäßige) Stetigkeit von $x \mapsto d\big(f(x), g(x)\big)$. Da X kompakt ist, existiert $d_\infty(f,g)$.)
Ist speziell $(Y, d) = (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$, so ist

$$d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty \qquad \big(f, g \in C(X, \mathbb{K})\big).$$

Dabei sieht man wie in diesem Fall ($\to$ Analysis) ganz allgemein für X kompakt, Y vollständig:

- $(C(X,Y), d_\infty)$ ist vollständig.
- Ist X endlich und ist Y kompakt, so ist $(C(X,Y) = Y^X, d_\infty)$ kompakt. (Ist $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, so entspricht Y^X dem Produkt $Y^m = Y \times \ldots \times Y$. Wie im Beweis zum Satz von Bolzano-Weierstraß sieht man, dass Y^m kompakt ist.)

Im Allgemeinen ist jedoch im Falle Y kompakt der Raum $C(X,Y)$ nicht kompakt. Ist etwa $X = Y = [0,1]$ (mit $d_X = d_Y = d_{|\cdot|}$), so hat die Folge (f_n) in $C(X,Y)$ mit

$$f_n(x) = x^n \qquad \big(x \in [0,1]\big)$$

keine in $C(X,Y)$ konvergente (also auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergente) Teilfolge, da jede solche gegen $f : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$$

konvergieren müsste.

Definition C.1 Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ heißt *gleichgradig stetig* an der Stelle $x_0 \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta \text{ und alle } f \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$ heißt *gleichgradig stetig*, falls $\mathcal{F}$ an allen $x_0 \in X$ gleichgradig stetig ist. Weiterhin schreiben wir für $X_0 \subset X$ im Folgenden

$$\mathcal{F}|_{X_0} := \{f|_{X_0} : f \in \mathcal{F}\} \, .$$

Satz C.2 *(Arzela-Ascoli)*
Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) kompakte metrische Räume. Ist $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ gleichgradig stetig, so ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst ein Hilfsresultat, das auch für sich genommen von Interesse ist.
Ist (M, d) ein metrischer Raum, so heißt eine Menge $A \subset M$ *präkompakt*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $E \subset M$ so existiert, dass

$$A \subset \bigcup_{x \in E} U_\varepsilon(x)$$

(dabei kann man stets $E \subset A$ wählen; [Ü])). Dann gilt:

$$A \text{ präkompakt } \Leftrightarrow \text{ jede Folge in } A \text{ hat eine Cauchy-Teilfolge.}$$

und damit im Fall eines vollständigen metrischen Raumes

$$A \text{ präkompakt } \Leftrightarrow A \text{ relativ kompakt.}$$

(Denn:
„$\Rightarrow$": Es sei (x_n) eine Folge in A. Da $A_0 := A$ präkompakt ist, existiert eine endliche Menge $E_1 \subset X$ mit

$$A_0 = \bigcup_{y \in E_1} (U_{1/2}(y) \cap A_0).$$

Da E_1 endlich ist, existiert ein $y_1 \in E_1$ so, dass ∞ viele der Folgeglieder von (x_n) in

$$A_1 := U_{1/2}(y_1) \cap A_0$$

liegen (d. h. $|\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A_1\}| = \infty$). Außerdem ist diam $(A_1) \leq 1$.
Da $A_1 \subset A_0$ präkompakt ist, existiert ein $E_2 \subset X$ endlich mit

$$A_1 = \bigcup_{y \in E_2} (U_{1/4}(y) \cap A_1).$$

Wieder existiert ein $y_2 \in E_2$ so, dass ∞ viele Folgeglieder von (x_n) in

$$A_2 = U_{1/4}(y_2) \cap A_1$$

liegen. Dabei ist diam $(A_2) \leq 1/2$.
Induktiv erhält man auf diese Weise eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Mengen mit $A_j \subset A_{j-1}$ und diam $(A_j) \leq 1/j$ so, dass jedes A_j unendlich viele Folgeglieder von (x_n) enthält. Setzt man $n_0 := 1$ und wählt für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $n_j \geq n_{j-1}$ mit $x_{n_j} \in A_j$, so ist (x_{n_j}) eine Cauchy-Folge in X.
„$\Leftarrow$": [Ü])

2. Nach 1. reicht es, zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist präkompakt.
Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $x \in X$ existiert ein $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ mit

$$f\big(U_{\delta_{x,\varepsilon}}(x)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x)\big) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Da X kompakt und $(U_{\delta_{x,\varepsilon}})_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert eine endliche Teilmenge E von X mit

$$X = \bigcup_{x\in E} U_{\delta_{x,\varepsilon}}(x).$$

Da Y kompakt ist, ist auch $\big(Y^E(= C(E,Y)), d_\infty)\big)$ kompakt. Also ist $\mathcal{F}|_E$ präkompakt (da relativ kompakt), d. h. für eine endliche Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ gilt

$$\mathcal{F}|_E \subset \bigcup_{g\in\mathcal{E}} U_\varepsilon(g|_E) \ (\subset Y^E).$$

Es sei $f \in \mathcal{F}$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{E}$ mit $f|_E \in U_\varepsilon(g|_E)$.
Ist $x \in X$ beliebig, so ist $x \in U_{\delta_{x_0,\varepsilon}}(x_0)$ für ein $x_0 \in E$. Für dieses x_0 gilt

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d\big(g(x), g(x_0)\big) < \varepsilon,$$

also

$$d\big(f(x), g(x)\big) \leq d\big(f(x), f(x_0)\big) + d\big(f(x_0), g(x_0)\big) + d\big(g(x_0), g(x)\big) < 3\varepsilon.$$

Folglich ist

$$d_\infty(f,g) < 3\varepsilon$$

und damit

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{g\in\mathcal{E}} U_{3\varepsilon}(g).$$

□

Bemerkung C.3 Aus Satz C.2 ergibt sich auch die folgende Variante des Satzes von Arzela-Ascoli für $\mathbb{K}^q$-wertige Funktionen (wobei $q \in \mathbb{N}$): Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum und ist $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{K}^q)$ beschränkt in $(C(X, \mathbb{K}^q), \|\cdot\|_\infty)$ und gleichgradig stetig, so

ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.
(Denn: Ist $\|f\|_\infty \le R$ für alle $f \in \mathcal{F}$, so kann man $\mathcal{F}$ auch als Familie in $C(X, U_R[0])$, wobei (mit $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{K}^q$)

$$U_R[y] := \{z \in \mathbb{K}^q : |z - y| \le R\} \subset \mathbb{K}^q,$$

auffassen. Dabei ist $(U_R[0], d_{|\cdot|})$ kompakt. Also ergibt sich die Behauptung aus S. C.2.

Definition C.4 Es seien (X, d_X) ein metrischer und (Y, d_Y) vollständiger metrischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ heißt *normal*, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von X konvergiert, d. h. ist (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$, so existieren eine Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) und eine Funktion $g : X \to Y$ mit $f_{n_j} \to g$ $(j \to \infty)$ in $(C(K, Y), d_\infty)$ für alle kompakten $K \subset X$.
Man sieht leicht, dass etwa $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$, normal in $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ ist.

Der Zusammenhang zum Satz von Arzela-Ascoli ergibt sich aus folgendem Resultat.

Satz C.5 *Es seien $p \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{K}^p$ offen und (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für $\mathcal{F} \subset C(\Omega, Y)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $\mathcal{F}$ ist normal.

b) Für alle kompakten $K \subset \Omega$ ist $\mathcal{F}|_K$ relativ kompakt in $(C(K, Y), d_\infty)$.

c) Für alle $x \in \Omega$ existiert eine offene Umgebung U von x so, dass $\mathcal{F}|_U$ normal in $C(U, Y)$ ist.

Beweis. c) $\Rightarrow$ b): Es sei $K \subset \Omega$ kompakt. Für alle $x \in K$ existiert eine offene Umgebung U_x von x so, dass $\mathcal{F}|_{U_x}$ normal ist. Es seien $\delta_x > 0$ so, dass $U_{\delta_x}[x] \subset U_x$ gilt. Dann ist $\left(U_{\delta_x}(x)\right)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Also existieren $x_1, \ldots, x_N \in K$ so, dass mit $L_m := U_{\delta_{x_m}}[x_m]$

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{N} L_m.$$

Es sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$.
Wir setzen $I_0 := \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung (beachte $L_1 \subset U_{x_1}$ kompakt) existiert eine Teilfolge $(f_n)_{n \in I_1}$ von $(f_n)_{n \in I_0}$, die gleichmäßig auf L_1 konvergiert. Wieder nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge $(f_n)_{n \in I_2}$ von $(f_n)_{n \in I_1}$, die gleichmäßig auf L_2 (und damit auch auf K_2, wobei $K_m := L_1 \cup \ldots \cup L_m$) konvergiert. Induktiv ergibt sich für jedes $m \in \{1, \ldots, N\}$ eine Teilfolge $(f_n)_{n \in I_m}$ von $(f_n)_{n \in I_{m-1}}$, die gleichmäßig auf K_m konvergiert. Für $m = N$ ergibt sich gleichmäßige Konvergenz auf $K_N \supset K$.

b) $\Rightarrow$ a): Wir setzen

$$K_m := K_m(\Omega) := U_m[0] \cap \{x \in \Omega : \text{dist }(x, \partial\Omega) \ge 1/m\}.$$

Dann gilt

- $K_m \subset \Omega$ kompakt ($m \in \mathbb{N}$),
- $K_m \uparrow \Omega$, d. h. $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} K_m = \Omega$ und $K_m \subset K_{m+1}$ (genauer ist sogar $K_m \subset (K_{m+1})^o$),
- Für alle $K \subset \Omega$ kompakt ist $K \subset K_m$ für m genügend groß.

Wie im 1. Beweisschritt sieht man: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$, so existiert (mit $I_0 := \mathbb{N}$) zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n)_{n\in I_m}$ von $(f_n)_{n\in I_{m-1}}$, die gleichmäßig auf K_m konvergiert. Definiert man $n_0 := 1$ und wählt $n_j > n_{j-1}$ mit $n_j \in I_j$, so konvergiert die Folge $(f_{n_j})_j$ gleichmäßig auf allen K_m und damit auch gleichmäßig auf allen $K \subset \Omega$ kompakt.

a) $\Rightarrow$ c): Klar. $\square$

Bemerkung C.6 Aus S. C.5 und dem Satz von Arzela-Ascoli (bzw. B. C.3) ergibt sich, dass jede der folgenden Bedingungen hinreichend ist für die Normalität einer Familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega, Y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{K}^p$ offen.

1. (Y, d) ist kompakt und $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.
2. $\mathcal{F} \subset C(\Omega, \mathbb{K}^q)$ ist beschränkt auf allen kompakten Teilmengen K von Ω (d. h. $\mathcal{F}|_K$ ist beschränkt in $(C(K, \mathbb{K}^q), ||\cdot||_\infty)$) und gleichgradig stetig.