Jürgen Müller

Funktionentheorie

Skriptum zur Vorlesung
Sommersemester 2011
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische Funktionen und Cauchysche Integralformel

Bemerkung und Definition 1.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *analytisch* an der Stelle $z_0 \in \Omega$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (a_ν) so existieren, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))$$

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar an z_0 und es gilt

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$$

(siehe Analysis). Weiter heißt f *analytisch in* Ω, falls f analytisch an jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ ist.

Beispiel 1.2 1. exp, sin und cos sind analytisch in $\mathbb{C}$.
2. Wir betrachten für festes $a \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{a - z}\,.$$

Hier ist für alle $z_0 \neq a$ und alle z mit $|z - z_0| < |a - z_0|$

$$f(z) = \frac{1}{a - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{a - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{a - z_0}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(a - z_0)^{\nu+1}} (z - z_0)^\nu\,.$$

Damit ist f analytisch $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Bemerkung und Definition 1.3 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch an der Stelle $z_0 \in \Omega$. Dann heißt z_0 *Nullstelle der Ordnung* $m \in \mathbb{N}$ von f (oder m-*fache Nullstelle*), falls $f^{(j)}(z_0) = 0$ für $j = 0, \ldots, m-1$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ gilt.
In diesem Fall existiert eine Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$, die analytisch an z_0 ist mit $g(z_0) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \qquad (z \in \Omega)\,.$$

(Denn: Es sei

$$f(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

für $z \in U_R(z_0)$. Wir setzen

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^{-m} f(z) & \text{für } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ a_m & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Dann gilt $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in \Omega$ und

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m+\nu}(z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)) ,$$

also g analytisch an z_0. Außerdem ist $g(z_0) = a_m \neq 0$.)
Hieraus folgt insbesondere, dass ein $r > 0$ so existiert, das $f(z) \neq 0$ für alle z mit $0 < |z - z_0| < r$.

Bemerkung 1.4 Ein entsprechendes Ergebnis gilt i. A. nicht für differenzierbare Funktionen! Ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad ,$$

so ist f (stetig) differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und in jeder Umgebung von 0 gibt es unendlich viele Nullstellen. Noch etwas dramatischer ist die Situation etwa für

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad ,$$

Dann ist f ebenfalls stetig differenzierbar und in jeder Umgebung von 0 liegen unendlich viele isolierte Nullstellen. Man kann auch Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit entsprechnden Eigenschaften finden.

Bemerkung und Definition 1.5 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt von M*, falls $(U_\delta(x) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$. Man sieht leicht ([Ü]), dass die Menge der Häufungspunkte von M stets abgeschlossen in X ist.

Satz 1.6 *Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Wir setzen*

$$Z(f) := \{z_0 \in G : f(z_0) = 0\} .$$

Dann gilt: Entweder ist $Z(f) = G$ (d.h. $f \equiv 0$) oder $Z(f)$ hat keinen Häufungspunkt in G.

Beweis. Es sei $z_0 \in Z(f)$ fest, und es sei $R = R(z_0) > 0$ so, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))$$

(mit $a_\nu = f^{(\nu)}(z_0)/\nu!$) gilt. Nun sind zwei Fälle möglich: Entweder ist $a_\nu = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$, also $f(z) \equiv 0$ auf $U_R(z_0)$, oder es existiert eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq 0$, d. h. f hat eine Nullstelle der Ordnung m. In diesem Fall ist z_0 kein Häufungspunkt von Nullstellen nach B./D. 1.3.

Es sei A die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ im metrischen Raum $(G, d_{|\cdot|})$. Da f stetig auf G ist, gilt $A \subset Z(f)$.
Also: Ist $A \neq \emptyset$ und $z_0 \in A$, so tritt notwendigerweise der erste Fall auf, d.h. $f(z) \equiv 0$ auf einer Umgebung von z_0. Damit ist $z_0 \in A^0$, also A offen. Außerdem ist A auch abgeschlossen (in $(G, d_{|\cdot|})$) als Menge von Häufungspunkten. Da $(G, d_{|\cdot|})$ zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$ und damit auch $Z(f) = G$. Dies war zu zeigen. □

Als Konsequenz erhalten wir unmittelbar folgendes fundamentale Ergebnis.

Satz 1.7 *(Identitätssatz für analytische Funktionen)*
Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Existiert eine Menge M in G mit Häufungspunkt in G und so, dass

$$f(z) = g(z)$$

für alle $z \in M$ gilt, so ist $f \equiv g$ in G.

Beweis. Mit f und g ist offenbar auch $f - g$ analytisch in G. Aus $M \subset Z(f - g)$ ergibt sich die Behauptung sofort aus S. 1.6. □

Der folgende Satz liefert eine Klasse analytischer Funktionen.

Satz 1.8 *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es seien $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{K}$ stückweise stetig. Ferner sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \psi([a, b])$. Wir definieren $f : \Omega \to \mathbb{C}$ durch*

$$f(z) := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{\psi(t) - z}\, dt \qquad (z \in \Omega)\,.$$

Dann ist f analytisch in Ω, und es gilt

$$f^{(k)}(z) = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t) - z)^{k+1}}\, dt \qquad (z \in \Omega,\ k \in \mathbb{N})\,.$$

Beweis. Es sei $z_0 \in \Omega$ und $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(z_0, \psi([a, b]))$ (dann ist $R > 0$, da $\psi([a, b])$ kompakt ist). Aus

$$\left| \frac{z - z_0}{\psi(t) - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

für alle $z \in U_R(z_0)$ und alle $t \in [a, b]$ folgt, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\psi(t) - z_0)^{\nu+1}} = \frac{1}{\psi(t) - z}$$

(vgl. B. 1.2) für jedes feste $z \in U_R(z_0)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert (Weierstraßsches Majorantenkriterium). Also erhalten wir mit durch Vertauschung von Summation und Integration

$$f(z) = \int_a^b \varphi(t) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z-z_0)^\nu \cdot \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\, dt\,,$$

d.h. mit

$$a_\nu := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\, dt \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$

gilt für alle $z \in U_R(z_0)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu\,.$$

Folglich ist f analytisch an der Stelle z_0. Außerdem erhalten wir für $z = z_0$

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{k+1}}\, dt \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, folgt die Behauptung □

Bemerkung 1.9 Der Beweis zu S. 1.8 zeigt, dass die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$$

für alle z mit $|z-z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ gilt.

Beispiel 1.10 Es sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-z}\, dt\,.$$

Dann ist f nach S. 1.8 analytisch in Ω und es gilt für $z \in \Omega$

$$f'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\, dt = \frac{i}{e^{it}-z}\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0\,.$$

Also ist $f' \equiv 0$ in Ω.
Da $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ein Gebiet ist, gilt damit $f \equiv f(0) = 2\pi$ in $\mathbb{D}$ ([Ü]).

Definition 1.11 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *holomorph* in Ω, falls f' auf Ω existiert und stetig ist. Wir setzen

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph in } \Omega\}\ .$$

Wir wollen nun zeigen, dass jede holomorphe Funktion schon analytisch ist, also insbesondere beliebig oft differenzierbar - eine Art mathematisches Wunder!
Entscheidend dafür wird die Cauchysche Integralformel sein, die wir nun (in einer ersten Version) herleiten. Wiederum vorbereitend dazu gibt es ein Ergebnis über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen.

Satz 1.12 *Es sei $U \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Ferner sei $\varphi : U \times I \to \mathbb{C}$ so, dass*

1. *$\varphi(z, \cdot)$ für alle $z \in U$ eine Regelfunktion ist,*
2. *$\varphi(\cdot, t)$ für alle $t \in I$ differenzierbar und $\frac{\partial\varphi}{\partial z} : U \times I \to \mathbb{C}$ mit $\frac{\partial\varphi}{\partial z} := \partial_1\varphi$ stetig ist.*

Dann ist $\Phi : U \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\Phi(z) := \int\limits_a^b \varphi(z, t)\, dt \qquad (z \in U),$$

differenzierbar auf U mit

$$\Phi'(z) = \int\limits_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z, t)\, dt \qquad (z \in U).$$

Beweis. Es sei $z_0 \in U$ fest. Wir setzen für $t \in I$

$$h_t(z) := \varphi(z, t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0, t) \cdot z \qquad (z \in U).$$

Dann ist h_t differenzierbar auf U mit

$$h_t'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z, t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0, t) \qquad (z \in U).$$

Wir wählen ein $r > 0$ so, dass $M := \overline{U_r(z_0)}$ in U liegt. Da $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ stetig auf $M \times I$ und ferner $M \times I$ kompakt ist, ist $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ gleichmäßig stetig auf $M \times I$.
Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta \in (0, r)$ so, dass

$$|h_t'(z)| < \varepsilon \qquad (|z - z_0| < \delta,\ t \in I).$$

Ist $z \in U$ mit $0 < |z - z_0| < \delta$, so ergibt sich mit $\gamma(s) := z_0 + s(z - z_0)$ für $s \in [0, 1]$ nach dem HDI, Teil 2 (beachte: h_t' ist stetig auf U) und der Kettenregel für alle $t \in I$

$$h_t(z) - h_t(z_0) = \int\limits_0^1 (h_t \circ \gamma)'(s)\, ds = \int\limits_0^1 h_t'(\gamma(s))ds \cdot (z - z_0).$$

Hieraus folgt für alle $t \in I$

$$|\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)(z-z_0)| =$$

$$= |h_t(z) - h_t(z_0)| \leq \int_0^1 \underbrace{|h_t'(\gamma(s))|}_{<\varepsilon} ds \cdot |z-z_0| < \varepsilon|z-z_0|,$$

also

$$|\Phi(z) - \Phi(z_0) - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)\,dt \cdot (z-z_0)|$$

$$\leq \int_a^b |\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)(z-z_0)|\,dt \leq \varepsilon|z-z_0|(b-a)$$

und damit

$$\Big|\frac{\Phi(z)-\Phi(z_0)}{z-z_0} - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)dt\Big| \leq \varepsilon(b-a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.13 Es sei $g \in H\big(U_\rho(0) \setminus \{a\}\big)$ für ein $\rho > 1$ und ein $a \in \mathbb{D}$. Ist

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{2\pi} g\big(a + \lambda(e^{it}-a)\big)\,\frac{e^{it}}{e^{it}-a}\,dt \qquad (0 < \lambda \leq 1),$$

so ist $\Phi(\lambda) \equiv \text{const}$ auf $(0,1]$.
(Denn: Zunächst ist Φ definiert auf $(0,\lambda_\rho)$ für ein $\lambda_\rho > 1$, und es gilt mit

$$\varphi(\lambda,t) := g\big(a+\lambda(e^{it}-a)\big)\,\frac{e^{it}}{e^{it}-a} \qquad \big((\lambda,t) \in (0,\lambda_\rho)\times[0,2\pi]\big)$$

nach S. 1.12

$$\Phi'(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(\lambda,t)\,dt = \int_0^{2\pi} g'\big(a+\lambda(e^{it}-a)\big)\,e^{it}dt = \frac{1}{i\lambda}\,g\big(z+\lambda(e^{it}-z)\big)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Damit ist $\Phi \equiv \text{const}$ auf $(0,\lambda_\rho)$.)

Satz 1.14 *(Cauchysche Integralformel für Kreise; kurz CIF)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ferner seien $z_0 \in \Omega$ und $0 < R < \operatorname{dist}(z_0,\partial\Omega)$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\frac{Re^{it}}{z_0+Re^{it}-z}\,dt \qquad (z \in U_R(z_0)).$$

Beweis. Wir setzen $\rho := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)/R$ und definieren $g \in H\big(U_\rho(0)\big)$ durch

$$g(z) := f(z_0 + Rz) \qquad \big(|z| < \rho\big).$$

Dann gilt nach B. 1.13 mit $a := (z - z_0)/R$ für $z \in U_R(z_0)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\,\frac{Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z} dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(e^{it})\,\frac{e^{it}}{e^{it} - a}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g\big(a + \frac{e^{it} - a}{n}\big)\,\frac{e^{it}}{e^{it} - a}\,dt \to \frac{f(z)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - a}\,dt \overset{B.1.10}{=} f(z) \quad (n \to \infty),$$

da $g\big(a + (e^{it} - a)/n\big) \to g(a) = f(z)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$. □

Bemerkung 1.15 Man beachte: S. 1.14 zeigt insbesondere, dass die Funktionswerte in $U_R(z_0)$ durch die Werte am Rand

$$K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$$

durch Integration berechnet werden können!
Wählt man speziell $z = z_0$, so ergibt sich die wichtige *Mittelwertformel*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})dt\,. \tag{1.1}$$

Also: Der Funktionswert im Kreismittelpunkt ergibt sich als „Integralmittel“ der Funktionswerte am Rand des Kreises.

Satz 1.16 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Dann gilt für alle $z_0 \in \Omega$ (mit* $\operatorname{dist}(z_0, \emptyset) := \infty$*)*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}\,(z - z_0)^\nu \qquad \textit{in } |z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)\,.$$

Insbesondere ist f analytisch in Ω.

Beweis. 1. Es seien $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Mit S. 1.14, S. 1.8 und B. 1.9, angewandt auf

$$[a, b] = [0, 2\pi],\ \psi(t) = z_0 + Re^{it},\ \varphi(t) = f(z_0 + Re^{it})Re^{it}/2\pi)$$

folgt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}\,(z - z_0)^\nu$$

für alle $z \in U_R(z_0)$. Da $R < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ beliebig war, gilt die Darstellung in $|z - z_0| < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω. □

Bemerkung 1.17 Aus S. 1.16 ergibt sich insbesondere, dass jede Funktion $f \in H(\Omega)$ beliebig oft differenzierbar auf Ω ist. Außerdem gilt nach S. 1.8 folgende verallgemeinerte Cauchysche Integralformel für die Ableitungen:
Für alle $z_0 \in \Omega$ und $R < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) \frac{Re^{it}}{(z_0 + Re^{it} - z)^{k+1}}\, dt \qquad (z \in U_R(z_0)) .$$

Die obigen Ergebnisse zeigen, dass holomorphe Funktionen sich in drastischer Weise von reell differenzierbaren Funktionen unterscheiden. Wir wollen den Unterschied etwas genauer beleuchten.

Bemerkung 1.18 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}\,(= \mathbb{R}^2)$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ist f (komplex) differenzierbar an der Stelle $z_0 \in \Omega$, so existiert für alle $\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_\zeta f(z_0)$ und es gilt

$$\partial_\zeta f(z_0) = f'(z_0) \cdot \zeta \,. \tag{1.2}$$

(Denn: Jeweils nach Definition gilt

$$\partial_\zeta f(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\zeta) - f(z_0)}{t} = \zeta \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\zeta) - f(z_0)}{\zeta t} = \zeta \cdot f'(z_0).)$$

Also existieren insbesondere $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \partial_i f(z_0)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \partial_1 f(z_0)$, und es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \tag{1.3}$$

(sog. Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung).
Ist umgekehrt f reell differenzierbar an z_0 und gilt (1.3), so ist f auch komplex differenzierbar an z_0 und es gilt $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.
(Denn: Da f reell differenzierbar an z_0 ist, existiert eine Funktion $\varepsilon : \Omega - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(h) \to 0\,(h \to 0)$ und so, dass mit $h = t + is = (t, s)^T$

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= f(z_0) + \text{grad}^T f(z_0) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot (1, i) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) h + |h|\,\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Nach der Zerlegungsformel ist f (komplex) differenzierbar an z_0 mit $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.)

Satz 1.19 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent*

a) f ist holomorph in Ω.

b) $f \in C^1(\Omega)$, und es gilt (1.3) für alle $z_0 \in \Omega$.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b): Ist f holomorph in Ω, so ist f' stetig auf Ω und damit sind nach B. 1.18 auch die partiellen Ableitungen stetig auf Ω (und es gilt (1.3)).

b) $\Rightarrow$ a): Ist $f \in C^1(\Omega)$, so sind die partiellen Ableitungen stetig auf Ω. Dann ist f insbesondere reell differenzierbar auf Ω. Nach B. 1.18 ist f komplex differenzierbar an z_0. Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig auf Ω ist, ist f holomorph. □

Bemerkung 1.20 Definiert man $\overline{\partial} : C^1(\Omega) \to C(\Omega)$ durch

$$\overline{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) ,$$

so zeigt S. 1.19, dass $f \in C^1(\Omega)$ genau dann holomorph ist, wenn $\overline{\partial} f \equiv 0$ ist, mit anderen Worten, $H(\Omega)$ ist der Kern des Operators $\overline{\partial}$.

2 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Eine erste Folgerung aus der CIF ist

Satz 2.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$, und es seien $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Dann ist für $0 \le r < R$*

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k!R}{(R-r)^{k+1}} \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \qquad (k \in \mathbb{N}_0,\ |z - z_0| \le r)$$

und damit insbesondere für $r = 0$

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{R^k} \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

(Cauchysche Ungleichung) .

Beweis. Nach B. 1.17 gilt für $|z - z_0| \le r$ (da $|z_0 + Re^{it} - z| \ge R - |z - z_0| \ge R - r$)

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{it})| \frac{R}{(R-r)^{k+1}}\, dt \le \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \frac{k!}{(R-r)^{k+1}}\,,$$

also die Behauptung. □

Bemerkung und Definition 2.2 Eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f heißt *ganze Funktion*. Ist f ganz, so gilt nach S. 1.16 für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ (da $\operatorname{dist}(z_0, \emptyset) = \infty$)

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$$

Beispiel 2.3 Polynome und exp, sin, cos sind ganz.

Satz 2.4 *(Liouville)*
Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $M > 0$ mit $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Mit der Cauchyschen Ungleichung gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $R > 0$

$$|f^{(k)}(0)| \le \frac{k!}{R^k} M \to 0 \qquad (R \to \infty)\,.$$

Also ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h.

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu = f(0) \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$$

□

Bemerkung 2.5 Ist f ganz und nicht konstant, so existiert eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $|f(z_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.
(Denn: Nach dem Satz von Liouville ist f unbeschränkt. Damit existiert eine Folge (z_n) so, dass $|f(z_n)| \to \infty$. Für diese gilt auch $|z_n| \to \infty$, da ansonsten nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine Teilfolge z_{n_k} mit $z_{n_k} \to z$ existieren würde. Für diese würde dann aber auch $f(z_{n_k}) \to f(z)$ gelten. Dies widerspräche aber $|f(z_n)| \to \infty$.)

Beispiel 2.6 Ist $f(z) = \cos z$, so gilt für $y \in \mathbb{R}$

$$|\cos(iy)| = \cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh(y) \to \infty \qquad (y \to \infty)\,.$$

Bemerkung 2.7 Als kleine Anwendung des Satzes von Liouville ergibt sich ein kurzer Beweis zum Fundamentalsatz der Algebra. Wesentlicher Teil des Beweises war der Nachweis der Tatsache, dass jedes nichtkonstante Polynom P eine Nullstelle besitzt. Wir zeigen noch einmal:
P hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
Denn: Angenommen, nicht, d.h. $1/P$ ist eine ganze Funktion. Dann existiert nach B. 2.5 eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $|1/P(z_n)| \to \infty\,(n \to \infty)$, also $P(z_n) \to 0\,(n \to \infty)$. Dies widerspricht aber $|P(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$.

Eines der zentralen Themen der reellen Analysis ist die Frage nach Extremstellen von Funktionen (mit Werten in $\mathbb{R}$). Da wir keine Ordnung in $\mathbb{C}$ haben, macht eine solche Fragestellung für komplexwertige Funktionen keinen Sinn. Wir können jedoch nach Extremstellen von $|f|$ suchen.
Bei holomorphen Funktionen bleibt diese meist erfolglos. Es gilt nämlich

Satz 2.8 *(Maximumprinzip; negative Formulierung)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Hat $|f|$ ein lokales Maximum, so ist $f \equiv \mathrm{const}$.

Beweis. Es sei z_0 ein lokales Maximum von $|f|$, d.h. es existiert ein $r > 0$ mit

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{für alle } z \in U_r(z_0)\,.$$

Angenommen, es existiert ein $z_1 \in U_r(z_0)$ mit $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Ist $\rho = |z_1 - z_0|$, so gilt auf Grund der Stetigkeit von $t \mapsto f(z_0 + \rho e^{it})$ auf $[0, 2\pi]$ und $|f(z_0 + \rho e^{it})| \leq |f(z_0)|$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|dt < |f(z_0)|\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = |f(z_0)|\,,$$

also mit der Mittelwertformel (1.1)

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|dt < |f(z_0)|\,.$$

Widerspruch! Damit ist $|f| \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$.
Hieraus folgt, dass auch $f \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$ ist ([Ü]). Nach dem Identitätssatz (S. 1.7) ist damit $f \equiv \text{const}$ auf G. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Satz 2.9 *(Maximumprinzip; positive Formulierung)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und es sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig auf $\overline{G}$ und holomorph in G. Dann existiert ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \max_{z\in\overline{G}} |f(z)| \,.$$

Beweis. Ist $f \equiv \text{const}$, so ist die Behauptung klar.
Es sei $f \not\equiv \text{const}$. Da G beschränkt ist, ist $\overline{G} = G \cup \partial G$ kompakt. Also existiert ein $z_0 \in \overline{G}$ mit $|f(z_0)| = \max_{z\in\overline{G}} |f(z)|$ (beachte: $|f|$ stetig auf $\overline{G}$). Dabei ist $z_0 \notin G$ nach S. 2.8, also $z_0 \in \partial G$. □

Bemerkung und Definition 2.10 Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Wir setzen

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad (r \geq 0)\,.$$

Dann gilt mit dem Maximumprinzip für alle $r \geq 0$

$$M_f(r) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$$

und $M_f(r)$ ist (streng) monoton wachsend (gegen ∞ nach dem Satz von Liouville falls f nicht konstant ist).

Beispiel 2.11 Wir betrachten wieder $f(z) = \cos z$. Ist $|z| = r$, so folgt

$$|\cos z| = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu}}{(2\nu)!}\right| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu}}{(2\nu)!} = \cosh(r) = \cos(ir)\ .$$

Also ist $M_f(r) = \cosh(r)$.

Bemerkung 2.12 Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, so gilt natürlich für alle Nullstellen z_0 von f

$$|f(z_0)| = 0 \leq |f(z)| \qquad (z \in G)\,,$$

d.h. Nullstellen sind Minima von $|f|$. Ist aber $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ (d.h. $Z(f) = \emptyset$), so hat f im Falle $f \not\equiv \text{const}$ auch kein lokales Minimum in G (Minimumprinzip; negative Formulierung).

Außerdem existiert dann im Falle, dass G beschränkt ist, stets ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \min_{z \in \overline{G}} |f(z)|$$

(Minimumprinzip; positive Formulierung).
Beides ergibt sich unmittelbar durch Anwendung obiger Maximumprinzipien auf $1/f$.

Definition 2.13 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sind $f_n, f : X \to Y$, so sagt man, die Folge (f_n) sei *lokal gleichmäßig konvergent gegen f (auf X), falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf U.*

Bemerkung 2.14 Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig konvergent (siehe Analysis).

Wir untersuchen nun Folgen holomorpher Funktionen. Es gilt

Satz 2.15 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es seien $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Ferner gelte $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω. Dann ist auch f holomorph in Ω, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \qquad (n \to \infty)$$

lokal gleichmäßig auf Ω.

Beweis. Ist $z_0 \in \Omega$, so existiert ein $R > 0$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\overline{U_R(z_0)}$. Nach der Cauchyschen Integralformel folgt für $z \in U_R(z_0)$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(z_0 + Re^{it})Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z}\, dt \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z}\, dt \quad (n \to \infty).$$

Damit gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z}\, dt \qquad (z \in U_R(z_0))$$

und folglich ist f analytisch in $U_R(z_0)$ nach S. 1.8 (vgl. Beweis zu 1.16).
Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt weiter für alle festen $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{|z - z_0| \le R/2} |f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| \le \frac{k! 2^{k+1}}{R^k} \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \to 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Also gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf Ω. $\square$

Beispiel 2.16 Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta : G \to \mathbb{C}$ ist für $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ definiert durch

$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z} \qquad \Big(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{e^{z \cdot \ln \nu}} \Big).$$

Dabei konvergiert die Teilsummenfolge $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^z}$ lokal gleichmäßig auf G ([Ü]). Da die Teilsummen ganze Funktionen sind, ist ζ holomorph in G nach S. 2.15.

3 Stammfunktionen und Cauchyscher Integralsatz

Wir wenden uns nun der Frage nach der Existenz von Stammfunktionen im Komplexen zu.

Satz 3.1 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann existiert eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ (also eine Stammfunktion zu f in G).*

Beweis. Ohne Einschränkung sei G sternförmig bzgl. 0. Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_0^1 z \cdot f(zt)dt \qquad (z \in G).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}(zf(zt)) = f(zt) + zf'(zt)t \qquad (z \in G,\, t \in [0,1]).$$

Da f holomorph in G ist, ist die rechte Seite stetig auf $G \times [0,1]$. Nach S. 1.12 ist F differenzierbar auf G mit

$$\begin{aligned} F'(z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}(zf(zt))\,dt = \int_0^1 f(zt)\,dt + \int_0^1 t \cdot zf'(zt)\,dt \\ &= \int_0^1 f(zt)\,dt + t \cdot f(zt)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(zt)\,dt = f(z). \end{aligned}$$

□

Als erste Anwendung wollen wir uns mit der Frage der Existenz von Logarithmen und allgemeinen Potenzen in $\mathbb{C}$ beschäftigen. Im ersten Teil der Analysis hatten wir die reelle Logarithmusfunktion als Umkehrung der (reellen) Exponentialfunktion definiert. Schon die Tatsache, dass die Exponentialfunktion im Komplexen nicht mehr injektiv ist, deutet an, dass die Situation hier komplizierter wird. Es gilt jedenfalls

Satz 3.2 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$ mit $Z(g) = \emptyset$. Dann gilt*

1. *Ist G sternförmig, so existiert eine Funktion $f \in H(G)$ mit $e^f = g$.*

2. *Sind $f, \tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt $e^{f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}$ für alle $z \in G$ genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit*

$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

Beweis. 1. Da G sternförmig ist, existiert nach S. 3.1 eine Funktion $f \in H(G)$ mit $f' = g'/g$. Dabei kann f so gewählt werden, dass für ein vorgegebenes $z_0 \in G$ und $g(z_0) = r_0 e^{i\varphi_0}$ zusätzlich $f(z_0) = \ln(r_0) + i\varphi_0$ gilt (ggfs. addiere man zu f eine geeignete Konstante). Es folgt

$$(ge^{-f})' = g'e^{-f} + ge^{-f}(-f') \equiv 0 \quad \text{in } G.$$

Also existiert eine Konstante c mit

$$g(z) = ce^{f(z)} \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Aus $e^{f(z_0)} = g(z_0)$ ergibt sich $c = 1$ und damit die Behauptung.
2. Sind $f, \tilde{f} \in C(G)$ mit $e^{\tilde{f}} = e^f$, so gilt

$$e^{\tilde{f}(z)-f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}/e^{f(z)} \equiv 1 \text{ in } G.$$

Damit ist

$$\varphi(z) = \frac{\tilde{f}(z) - f(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

für alle $z \in G$. Da G zusammenhängend und φ stetig auf G ist, ist $\varphi(z) \equiv \text{const}$ auf G nach S. A.6, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G).$$

Die Umkehrung ist klar. $\square$

Bemerkung und Definition 3.3 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$ mit $Z(g) = \emptyset$. Jede Funktion $f \in H(G)$ mit $e^f = g$ in G heißt *Zweig des Logarithmus* von g in G. Ist f ein solcher Zweig, so ist auch $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ein Zweig. Nach S. 3.2.2 sind durch diese (abzählbar unendlich vielen) Funktionen alle Zweige gegeben.

Beispiel 3.4 Es sei

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\,.$$

und $g(z) = z$. Dann ist $\mathbb{C}_-$ sternförmig (etwa bzgl. 1). Nach S. 3.2.1 existiert eine in Funktion $f \in H(\mathbb{C}_-)$ mit

$$e^{f(z)} = z \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_-.$$

(also ein Zweig des Logarithmus von z). Dabei kann f mit $f(1) = 0$ gewählt werden.
Ist $z \in \mathbb{C}_-$, so existieren eindeutig bestimmte $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ (Polarkoordinaten) mit $z = re^{i\varphi}$. Die Abbildung $p : \mathbb{C}_- \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ mit

$$p(z) = (r, \varphi) \qquad (z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-)$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ (siehe Analysis). Damit ist auch $\tilde{f} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) = \ln r + i\varphi \qquad (z \in \mathbb{C}_-)$$

stetig. Weiter gilt natürlich auch

$$e^{\tilde{f}(z)} = e^{\ln r + i\varphi} = re^{i\varphi} = z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Da $\tilde{f}(1) = 0 = f(1)$ gilt, ist $f(z) \equiv \tilde{f}(z)$ in $\mathbb{C}_-$. Für $z = r > 0$ haben wir insbesondere $f(r) = \ln r$, d.h. dieser Zweig setzt den „reellen Logarithmus" ln holomorph auf $\mathbb{C}_-$ fort. Wir nennen f den Hauptzweig des Logarithmus (von z) in $\mathbb{C}_-$ und schreiben dafür auch

$$f(z) =: \log z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Nach S. 3.2.2 sind alle weiteren Zweige von der Form

$$z \mapsto \log z + 2k\pi i = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Wie sieht es mit der Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)$$

für $z, w \in \mathbb{C}_-$ aus?
Ist $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\vartheta}$ mit $\varphi, \vartheta \in (-\pi, \pi)$ und $\varphi + \vartheta \in (-\pi, \pi)$, so ist $zw = r\rho e^{i(\varphi+\vartheta)}$. Es gilt also

$$\log(zw) = \ln(r\rho) + i(\varphi + \vartheta) = \ln r + i\varphi + \ln \rho + i\vartheta = \log z + \log w\,.$$

Ist jedoch etwa $\varphi + \vartheta > \pi$, so ist $zw = r\rho e^{i(\varphi+\vartheta-2\pi)}$, also

$$\log(zw) = \ln(r\rho) + i(\varphi + \vartheta - 2\pi) = \log z + \log w - 2\pi i\,.$$

Es kommt also ein „Korrekturterm" $2\pi i$ hinzu. Im Falle $\varphi + \vartheta = \pi$ ist $\log(zw)$ nicht einmal definiert.
Die Beispiele zeigen, dass Vorsicht im Umgang mit komplexen Logarithmen angebracht ist!

Wie im Reellen definieren wir allgemein Potenzen mit Hilfe von Logarithmen. Wir beschränken uns dabei auf Potenzen, die unter Verwendung des obigen Hauptzweiges definiert sind.

Definition 3.5 Es sei $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, und es sei $b \in \mathbb{C}$. Wir setzen

$$z^b := e^{b \cdot \log z} \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Ist speziell $b = 1/k$ für ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, so schreiben wir auch $\sqrt[k]{z}$ an Stelle von $z^{1/k}$, und ist $k = 2$, so schreiben wir kurz $\sqrt{z}$. Die Funktion $z \mapsto \sqrt[k]{z}$ heißt *Hauptzweig der k-ten Wurzel* (für $k = 2$ *Hauptzweig der Wurzel*) (von z) in $\mathbb{C}_-$. Ist $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$, so gilt $\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r} e^{i\varphi/k}$ (und damit auch $(\sqrt[k]{z})^k = z$). Für $z = r > 0$ stimmt die neu definierte Wurzel mit der reellen Wurzel überein.
Andere Zweige der k-ten Wurzel erhält man durch Verwendung anderer Zweige des Logarithmus. Außerdem kann man allgemeine Potenzen auch für allgemeinere Funktionen betrachten, für die Logarithmen existieren.

Bemerkung 3.6 Für $z \in \mathbb{C}_-$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^{b_1+b_2} = z^{b_1} z^{b_2} .$$

Weiter ist $z \mapsto z^b$ holomorph in $\mathbb{C}_-$ mit

$$(z^b)' = b \cdot z^{b-1} .$$

Wir wollen nun das lokale Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion etwas genauer beleuchten. Das Maximumprinzip wird sich dabei auch noch einmal als Konsequenz eines allgemeineren Resultats ergeben. Zunächst ergibt sich i.W. aus dem Hauptsatz über Umkehrfunktionen ([Ü]):

Satz 3.7 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ist $z_0 \in \Omega$ mit $f'(z_0) \neq 0$ (d. h. ist z_0 eine einfache Nullstelle von $f - w_0$), so existieren offene Umgebungen U von z_0 in Ω und V von $w_0 = f(z_0)$ in $f(\Omega)$ so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist mit $f'(z) \neq 0$ in U. Außerdem ist dann $g := (f_{|U})^{-1} : V \to U$ holomorph mit*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \qquad (w \in V)$$

(Umkehrregel).

Beispiel 3.8 Wir betrachten $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann gilt $f'(z) = 2z \neq 0$ für alle $z \neq 0$. Ist also $z_0 \neq 0$, so existieren offene Umgebungen U von z_0 und V von z_0^2 so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist.
Man beachte jedoch: f ist nicht injektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (da $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt).

Satz 3.9 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ferner sei $z_0 \in \Omega$ und $w_0 = f(z_0)$, wobei z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von $f - w_0$ ist. Dann existieren eine offene Umgebung U von z_0 und eine in U holomorphe Funktion φ mit $\varphi(z_0) = 0$ sowie $\varphi'(z_0) \neq 0$ und so, dass*

$$f(z) = w_0 + \varphi^m(z) \qquad (z \in U) .$$

Beweis. Es seien $U := U_r(z_0)$ und $g \in H(U)$ so, dass $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ (existieren nach B./D. 1.3). Dann existiert nach S. 3.2 ein $h \in H(U)$ mit $e^h = g$. Ist $\varphi : U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) = (z - z_0) e^{h(z)/m} \qquad (z \in U) ,$$

so gilt

$$\varphi^m(z) = (z - z_0)^m e^{h(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0 \qquad (z \in U) .$$

Dabei ist $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) \neq 0$. □

Als unmittelbare Konsequenz erhalten wir

Satz 3.10 *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, $f \not\equiv \text{const}$, so ist f offen (d. h. Bilder offener Mengen sind offen).*

Beweis. Es seien $M \subset G$ offen und $w_0 \in f(M)$. Zu $z_0 \in M$ mit $f(z_0) = w_0$ seien $U \subset M$ und φ wie in S. 3.9 (man beachte: jede Nullstelle von $f - w_0$ hat endliche Ordnung nach dem Identitätssatz). Nach S. 3.7 kann dabei U so (klein) gewählt werden, dass $\varphi : U \to U_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$ bijektiv ist. Da $w \mapsto w^m + w_0$ die Kreisscheibe $U_\delta(0)$ **auf** $U_{\delta^m}(w_0)$ abbildet (Existenz komplexer Wurzeln; siehe Analysis) ist

$$U_{\delta^m}(w_0) = w_0 + U_{\delta^m}(0) = w_0 + \varphi^m(U) = f(U) \subset f(M) \ .$$

Also ist $f(M)$ offen. □

Bemerkung 3.11 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, $f \not\equiv \text{const}$.
1. Für alle $w_0 \in f(G)$ und alle $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset G$ ist die Menge $f(U_r(z_0))$, wobei z_0 so, dass $f(z_0) = w_0$, offen. Also existiert insbesondere stets ein $w_1 \in f(U_r(z_0))$ mit $|w_1| > |w_0|$. Damit hat $|f|$ keine lokalen Maxima in G. Dies zeigt, dass S. 3.10 das Maximumprinzip umfasst.
2. (Gebietstreue holomorpher Funktionen) Da f insbesondere stetig auf dem Gebiet G ist, ist nach S. A.5 und S. 3.10 auch $f(G)$ ein Gebiet.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Konzept komplexer Wegintegrale. Wir werden uns dabei auf Integrale längs Pfaden beschränken.

Definition 3.12 Ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ heißt ein *Pfad* (Dabei ist γ stückweise stetig differenzierbar, falls γ' bis auf endlich viele Punkte existiert und zu einer stückweise stetigen Funktion fortgesetzt werden kann). Ist $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig auf γ^*, so ist $f \circ \gamma \cdot \gamma'$ eine Regelfunktion auf $[\alpha, \beta]$. Wir definieren das *(Weg-)Integral von f längs γ* durch

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(\zeta) d\zeta := \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \ .$$

Außerdem setzen wir

$$\int_\gamma f(\zeta)\, |d\zeta| := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt$$

sowie $L(\gamma) := \int_\gamma |d\zeta|$. Dabei heißt $L(\gamma)$ die *Länge* von γ.

Bemerkung 3.13 Für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$, und für f stetig auf $K_R(z_0) = \gamma^*$ ist

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) iRe^{it} dt \quad \text{und} \quad \int_\gamma f(\zeta)\, |d\zeta| = \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) R\, dt$$

Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\int_{|\zeta - z_0| = R} \quad \text{bzw.} \quad \int_{K_R(z_0)} \quad \text{statt} \int_\gamma .$$

Damit gilt für alle $R > 0$

$$\int_{K_R(z_0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^{-1}\, iRe^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Ist allgemeiner f holomorph auf einer offenen Menge Ω, so liest sich für $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ die Causchysche Integralformel kurz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in U_R(z_0)) .$$

Bemerkung 3.14 1. Es seien $\tilde{\gamma} : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to \mathbb{C}$ und $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ Pfade, und es sei $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, wobei $\varphi : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar mit $\varphi' > 0$ und $\varphi(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\varphi(\tilde{\beta}) = \beta$. Dann ist $\gamma^* = \tilde{\gamma}^*$, d.h. die Spuren stimmen überein, und es gilt mit der Substitutionsregel

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f \circ \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}' = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f \circ \gamma \circ \varphi \cdot \gamma' \circ \varphi \cdot \varphi' = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\gamma f .$$

Dies zeigt, dass die Pfadintegrale im Falle der Existenz einer Funktion φ wir oben übereinstimmen. Wir schreiben $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ falls eine Abbildung φ mit obigen Eigenschaften existiert. Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Pfade in $\mathbb{C}$. Wir können damit insbesondere zu jedem Pfad $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ und zu jeden Intervall $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ einen äquivalenten Pfad $\tilde{\gamma} : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to \mathbb{C}$ finden ($\varphi(t) = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}}(t - \alpha)$ ist geeignet).
Für die zu γ gehörige Äquivalenzklasse $[\gamma]$ ist

$$\int_{[\gamma]} f := \int_\gamma f \qquad (f \in C(\gamma^*))$$

wohldefiniert.
2. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definert durch

$$\gamma(t) := a + t(b - a) \quad (t \in [0, 1]).$$

Dann schreiben wir auch

$$\int_a^b f := \int_\gamma f \,.$$

Ist $\tilde{\gamma}(t) := b + t(a-b)$ so ergibt sich

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \,.$$

Man beachte, dass die Spuren γ^* und $\tilde{\gamma}^*$ übereinstimmen.
3. Unmittelbar aus der jeweiligen Definition ergibt sich (mit $\|f\|_\infty := \|f\|_{M,\infty} := \sup_{\zeta \in M} |f(\zeta)|$)) folgende einfache, aber oft sehr nützliche Abschätzung für das Integral von f längs γ:

$$\Big|\int_\gamma f\Big| \le \int_\gamma |f(\zeta)|\,|d\zeta| \le \|f\|_\infty \cdot L(\gamma) \,.$$

Der folgende Satz zeigt, dass bei Existenz einer Stammfunktion Integrale wegunabhängig sind.

Satz 3.15 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Existiert eine Funktion $F \in H(G)$ mit $F' = f$ in G (d.h. F ist eine Stammfunktion zu f in G), so gilt für alle Pfade γ in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b*

$$\int_\gamma f = F(b) - F(a) \,.$$

Insbesondere ist damit

$$\int_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in G.

Beweis. Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = b$. Dann gilt

$$\int_\gamma f = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)' = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

nach dem HDI. □

Beispiel 3.16 Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ein beliebiger Pfad. Dann gilt für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$

$$\int_\gamma (\zeta - z_0)^m d\zeta = \frac{1}{m+1}\big((b - z_0)^{m+1} - (a - z_0)\big)^{m+1}\big)\,,$$

wobei $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$. Also: Der Wert des Integrals hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten von γ ab, nicht aber vom Weg γ!
Insbesondere gilt für jeden geschlossenen Pfad γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$$\int_\gamma (\zeta - z_0)^m d\zeta = 0\,.$$

Ist $m = -1$, so ist dies nach B. 3.13 im Allgemeinen **falsch**.
S. 3.15 zeigt darüber hinaus, dass $z \mapsto 1/(z - z_0) = (z - z_0)^{-1}$ in $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ keine Stammfunktion haben kann!

Satz 3.17 *(Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann ist

$$\int_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in G.

Beweis. Nach S. 3.1 existiert ein F mit $F' = f$ in G. Also folgt die Behauptung aus S. 3.15 □

Bemerkung 3.18 Es seien $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und $f(z) = 1/(z - z_0)$. Wieder zeigt B. 3.13, dass die Aussage von S. 3.17 nicht für G und damit nicht für alle Gebiete gilt.

Bemerkung 3.19 Sind $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$, so gilt nach S. 3.17 insbesondere für jeden Kreis $U = U_R(z_0)$ in Ω und jeden geschlossenen Pfad γ in U

$$\int_\gamma f = 0.$$

Ist $\Delta = \Delta(a, b, c)$ das Dreieck mit Ecken a, b, c, so gilt also insbesondere

$$\int_\Delta f := \Big(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a\Big) f = 0$$

falls $\Delta \subset U_R(z_0)$. Tatsächlich gilt auch folgende Umkehrung (Satz von Morera):
Ist $f \in C(\Omega)$ und existiert zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $r > 0$, so dass

$$\int\limits_{\Delta} f = 0$$

für alle Dreiecke $\Delta = \Delta(a, b, c)$ in $U_r(z_0)$, so ist $f \in H(\Omega)$.
(Denn: Es sei $F : U := U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f \qquad (z \in U).$$

Dann gilt für $z, w \in U$

$$F(w) - F(z) = \Big(\int\limits_{z_0}^{w} + \int\limits_{z}^{z_0}\Big) f = \Big(\int\limits_{\Delta(z_0,w,z)} - \int\limits_{w}^{z}\Big) f = \int\limits_{z}^{w} f,$$

also für $h \neq 0$ genügend klein

$$\Big|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\Big| = \frac{1}{|h|}\,\Big|\int\limits_{z}^{z+h} \big(f(\zeta) - f(z)\big) d\zeta\Big| \leq \big\|f - f(z)\big\|_{I[z,z+h],\infty} \to 0 \quad (h \to 0)\ .$$

Damit ist F differenzierbar auf U mit $F' = f$ auf U. Da f stetig ist, ist F holomorph auf U und folglich auch f. Da z_0 beliebig war, ist f holomorph auf Ω.)

4 Fourier- und Laurent-Reihen

Im ersten Abschnitt haben wir uns mit Taylor-Reihen bzw. Potenzreihen beschäftigt. Wir wollen nun eine andere Art von Reihenentwicklungen untersuchen, die den wesentlichen Vorteil hat, dass keine Ableitungen von f benötigt werden. Dazu stellen wir zunächst einige Vorüberlegungen an.

Bemerkung 4.1 Wir schreiben im Weiteren kurz

$$S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \, (= K_1(0) = \partial\mathbb{D}) \, .$$

Dann sind durch

$$< f, g > := \frac{1}{2\pi} \int_S f(\zeta)\, \overline{g}(\zeta)\, |d\zeta| \qquad (f, g \in C(S))$$

ein Skalarprodukt auf $C(S)$ und durch

$$\|f\|_2 := \|f\| := (< f, f >)^{1/2} \qquad (f \in C(S))$$

eine Norm auf $C(S)$ definiert.
Ist ferner $e_k : S \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$e_k(z) := z^k \qquad (z \in S),$$

so gilt dabei

$$\begin{aligned} < e_k, e_j > &= \frac{1}{2\pi} \int_S \zeta^k\, \overline{\zeta^j} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i(k-j)} e^{i(k-j)t}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & , \ k \neq j \\ \qquad 1 & , \ k = j \end{cases} . \end{aligned}$$

Damit ist $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem (ONS) in $(C(S), < \cdot, \cdot >)$.
Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu z^\nu \qquad \text{gleichmäßig auf } S \, ,$$

so gilt $f \in C(S)$ und $a_k =< f, e_k >$ für alle k.
(Denn: Es ist

$$< f, e_k > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i(\nu-k)t} dt = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu-k)t} dt = a_k.)$$

Dies ist nach dem Weierstrassschen Majorantenkriterium insbesondere dann der Fall, wenn $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu| < \infty$ gilt.

Definition 4.2 Es sei $f \in C(S)$. Dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(k) :=< f, e_k >:= \frac{1}{2\pi} \int\limits_S f(\zeta)\,\overline{\zeta}^k\,|d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})e^{-iks} ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta$$

k-ter *Fourier-Koeffizient* von f. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt weiter $s_n = s_n f$ mit

$$s_n(z) := (s_n f)(z) := \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) z^\nu = \sum_{\nu=-n}^{n} < f, e_\nu > e_\nu(z) \qquad (z \in S)$$

n-te *Fourier-Teilsumme* von f und $(s_n f)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *Fourier-Reihe* von f.

Beispiel 4.3 1. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ gleichmäßig konvergent auf $\overline{\mathbb{D}}$. Also ist $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (|z| \leq 1)\,,$$

stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und holomorph in $\mathbb{D}$. Nach B. 4.1 ergibt sich $\hat{f}(k) = a_k = f^{(k)}(0)/k!$ für $k \geq 0$ und $\hat{f}(k) = 0$ für $k < 0$. Also stimmt die Taylor-Reihe von f auf S mit der Fourier-Reihe von f (oder genauer $f_{|S}$) überein.
2. Wir betrachten $f : S \to \mathbb{R}$ mit

$$f(e^{it}) := \frac{\pi}{2} - |t| \qquad (t \in (-\pi, \pi])\,,$$

d. h $f(z) = \pi/2 - |\arg(z)|$ wobei $\operatorname{Im}(\log z) =: \arg(z)$ für $z \in S \setminus \{-1\}$ (und $\arg(-1) := \pi$). Dann gilt für $k \neq 0$

$$2\pi \hat{f}(k) = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} |s| \cos(-ks)\, ds - \underbrace{i \int\limits_{-\pi}^{\pi} |s| \sin(-ks)\, ds}_{=0} = -2 \int\limits_{0}^{\pi} s \cos(ks)\, ds = \frac{2}{k^2}(1 - (-1)^k)\,,$$

also

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{\pi k^2} \quad (k \text{ ungerade})\,, \qquad \hat{f}(k) = 0 \quad (k \text{ gerade}, \, k \neq 0)\,.$$

Außerdem ist

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |t| dt = 0\,.$$

Folglich gilt für $z = e^{it} \in S$

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) z^\nu &= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu \text{ ungerade}} \frac{z^\nu}{\nu^2} = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{z^\nu + z^{-\nu}}{\nu^2} \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\operatorname{Re}(z^\nu)}{\nu^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\cos(\nu t)}{\nu^2}\,.
\end{aligned}$$

Dabei ist die Konvergenz (auch für die mit den Absolutbeträgen gebildete Reihe) gleichmäßig auf S.

Bemerkung 4.4 Bisher wissen wir nur wenig darüber, unter welchen Bedingungen die Fourier-Reihe die Funktion f darstellt, d.h. wann (und in welchem Sinne)

$$f = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

gilt.
Da $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS ist, ergibt sich (siehe Lineare Algebra)

$$\|f - s_n f\|_2 = \operatorname{dist}(f, T_n),$$

wobei

$$T_n := \operatorname{linspan}\{e_k : k \in \{-n, \dots, n\}\}$$

die Menge des *trigonometrischen Polynome* vom Grad $\leq n$ bezeichnet.
Also: $s_n f \in T_n$ ist die beste Approximation an f bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm.
Wenn wir also nach Konvergenz bzgl. $||\cdot||_2$ fragen, so folgt, dass

$$||f - s_n f||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

für alle $f \in C(S)$ schon dann gilt, wenn nur $\operatorname{dist}(f, T_n) \to 0$ erfüllt ist, m.a.W., wenn $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ (die Menge der trigonometrischen Polynome) dicht in $(C(S), ||\cdot||_2)$ ist. Da für alle $f \in C(S)$

$$||f||_2 = \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_S |f(\zeta)|^2 |d\zeta|\Big)^{1/2} \leq ||f||_{S,\infty}$$

gilt, reicht es dafür zu zeigen, dass $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ dicht in $(C(S), ||\cdot||_{S,\infty})$ ist.

Bemerkung und Definition 4.5 Es seien $f, g \in C(S)$. Wir definieren die *Faltung* $f * g : S \to \mathbb{C}$ von f und g durch

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_S f(z\overline{\zeta})g(\zeta)|d\zeta| = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S f(z/\zeta)g(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (z \in S).$$

Dann ist $f * g$ stetig auf S, und es gilt

$$f * g = g * f.$$

([Ü]). Ist dabei speziell $f \in T_n$, so gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) z^\nu,$$

und damit

$$(f * g)(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) z^\nu \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \overline{\zeta}^\nu g(\zeta)|d\zeta| = \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu) z^\nu \qquad (z \in S)\ .$$

Also ist auch $f * g \in T_n$ mit

$$(f * g)\widehat{\ }(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

Wir setzen für $A \subset S$ so, dass $t \mapsto \chi_A(e^{it})$ eine Regelfunktion auf $[-\pi, \pi]$ ist (hierbei ist χ_A die Indikatorfunktion von A),

$$\int_A f(\zeta)|d\zeta| := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\chi_A(e^{it})dt.$$

Satz 4.6 *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $Q_n \in T_n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $Q_n \geq 0$ *auf* S $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_S Q_n(\zeta)|d\zeta| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$,

(iii) *Für alle* $\delta > 0$ *gilt* $\int_{S\setminus U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Ist $f \in C(S)$, so gilt

$$f * Q_n \to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } S.$$

Beweis. Mit (ii) ergibt sich zunächst

$$(f * Q_n)(z) - f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_S (f(z\overline{\zeta}) - f(z))Q_n(\zeta)|d\zeta| \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N}),$$

also mit (i)

$$|(f * Q_n)(z) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_S |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N}).$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig auf der kompakten Menge S ist, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(z\overline{\zeta}) - f(z)| < \varepsilon \qquad (z \in S, |\zeta - 1| < \delta).$$

Hieraus folgt wieder mit (ii)

$$\sup_{z\in S}\frac{1}{2\pi}\int_{U_\delta(1)} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq \varepsilon$$

Mit (iii) gilt zudem

$$\sup_{z\in S}\frac{1}{2\pi}\int_{S\setminus U_\delta(1)} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq 2\|f\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{S\setminus U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Folglich ist für n genügend groß

$$\|f * Q_n - f\|_\infty < 2\varepsilon.$$

□

Bemerkung 4.7 Es stellt sich natürlich die Frage nach der Existenz von Folgen wie in S. 4.6. Ein Beispiel ist

$$F_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) z^\nu \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N})$$

(F_n heißt n-ter *Fejér-Kern*). Es gilt dafür: $F_n \in T_n$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_S F_n(\zeta)|d\zeta| = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_S \zeta^\nu |d\zeta|}_{=\delta_{0,\nu}} = 1,$$

also ist jedenfalls (ii) erfüllt. Weiter ist für $z \in S$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \Big| \sum_{j=0}^{n} z^j \Big|^2 &= \frac{1}{n+1} \Big(\sum_{j=0}^{n} z^j \Big) \Big(\sum_{j=0}^{n} \overline{z}^j \Big) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j,k=0}^{n} z^{j-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=-n}^{n} (n+1-|\nu|) z^\nu = F_n(z), \end{aligned}$$

also $F_n \geq 0$ und für $z \in S \setminus U_\delta(1)$

$$F_n(z) = \frac{1}{n+1} \Big| \sum_{j=0}^{n} z^j \Big|^2 = \frac{1}{n+1} \Big| \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \Big|^2 \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{4}{\delta^2} \to 0.$$

Damit gilt $F_n \to 0$ gleichmäßig auf $S \setminus U_\delta(1)$. Also ist insbesondere auch (iii) erfüllt. Nach S. 4.6 gilt also für alle $f \in C(S)$

$$f * F_n \to f \qquad \text{gleichmäßig auf } S.$$

Da alle $f * F_n$ trigonometrische Polynome (von Grad $\leq n$) sind, ist insbesondere $\bigcup T_n$ dicht in $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$.
Wie bereits in B. 4.4 erläutert, impliziert dies insbesondere, dass für alle $f \in C(S)$ gilt

$$||f - s_n f||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

d.h. $s_n f \to f$ „im quadratischen Mittel“. Dies bedeutet jedoch noch nicht, dass stets auch

$$s_n f(z) \to f(z)$$

für alle $z \in S$ gilt. Tatsächlich gilt dies auch nicht für alle $f \in C(S)$ (genauer ist $(s_n f(z))_n$ noch nicht einmal für alle z unf f beschränkt, was wir jedoch nicht zeigen werden).

Satz 4.8 *(Fejér)*
Es sei $f \in C(S)$. Dann gilt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu f \to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } S.$$

Beweis. Es sei F_n der n-te Fejér-Kern. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu f(z) &= \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\hat{f}(\mu)z^\mu = \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=-n}^{n}\hat{f}(\mu)z^\mu \underbrace{\sum_{\nu=|\mu|}^{n} 1}_{=n+1-|\mu|} = \sum_{\mu=-n}^{n}\Big(1-\frac{|\mu|}{n+1}\Big)\hat{f}(\mu)z^\mu \\ &= f * F_n(z),\end{aligned}$$

d.h. $f * F_n$ ist das arithmetische Mittel der Fourier-Teilsummen $s_0 f, \dots, s_n f$. Also folgt die Behauptung mit B. 4.7. □

Als Folgerung aus B. 4.7 erhalten wir

Satz 4.9 *Es sei $f \in C(S)$. Dann gilt*

1. $||f||_2^2 = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2$ *(Parsevalsche Gleichung).*
2. *Gilt $\hat{f}(\nu) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$, so ist $f \equiv 0$.*
3. *Konvergiert $(s_n f)$ gleichmäßig auf S, so gilt*

$$s_n f \to f\,.$$

Beweis.
1. Es gilt $s_n f \in T_n$ und $f - s_n f \in T_n^\perp$ ($\to$ Lineare Algebra). Also ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras

$$||f||_2^2 \;=\; ||f - s_n f||_2^2 + ||s_n f||_2^2\,.$$

Nach B. 4.7 gilt $||f - s_n f||_2^2 \to 0\,(n \to \infty)$, d.h. $||s_n f||_2^2 \to ||f||_2^2\,(n \to \infty)$. Außerdem ist (wieder mit Pythagoras)

$$||s_n f||_2^2 \;=\; ||\sum_{\nu=-n}^{n}\hat{f}(\nu)e_\nu||_2^2 \;=\; \sum_{\nu=-n}^{n}|\hat{f}(\nu)|^2\underbrace{||e_\nu||_2^2}_{=1} = \sum_{\nu=-n}^{n}|\hat{f}(\nu)|^2\,.$$

Damit ergibt sich 1.
2. Ist $\hat{f}(\nu) = 0\,(\nu \in \mathbb{Z})$, so ist $||f||_2^2 = 0$ nach 1., also $f \equiv 0$.
3. Aufgrund der gleichm̈ßigen Konvergenz ist $g : S \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \lim_{n\to\infty} s_n f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\nu)z^\nu$$

stetig auf S. Außerdem gilt nach B. 4.1

$$\hat{g}(k) = \hat{f}(k)\,,$$

also auch $(f-g)\hat{}(k) = 0$. Nach 2. ist $f - g \equiv 0$. □

Wir untersuchen nun Funktionen f, die holomorph sind in einem Kreisring

$$V_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} ,$$

wobei $0 \leq r < R \leq \infty$.

Bemerkung 4.10 Es sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{R} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} = r ,$$

so konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $|z - z_0| < R$ (siehe Anaysis) und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-z_0)^{-\nu}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $|z - z_0| > r$ (Potenzreihe in $1/(z - z_0)$). Also ist im Falle $r < R$ die Summe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ der beiden Reihen gleichmäßig konvergent auf jeder kompakten Teilmenge des Kreisringes $V_{r,R}(z_0)$. Ausserdem ist

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-z_0)^{-\nu}$$

holomorph in $V_{r,R}(z_0)$.

Beispiel 4.11 Für $a_\nu := 1/|\nu|!$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} = 0 ,$$

also $r = 0$ und $R = \infty$. Hier ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu! z^\nu} = e^z + e^{1/z} - 1$$

holomorph in $V_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Wir zeigen nun, dass jede in einem Kreisring holomorphe Funktion durch eine solche Reihe dargestellt wird.

Bemerkung und Definition 4.12 Es sei $f \in H(V)$, wobei $V = V_{r,R}(z_0)$, und es sei für $k \in \mathbb{Z}$

$$a_k(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \lambda} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \qquad (\lambda \in (r, R)) .$$

Dann ist $\lambda \mapsto a_k(\lambda)$ konstant auf (r,R).
(Denn: O.E. können wir $z_0 = 0$ und $r < 1 < R$ annehmen (ansonsten: $\tilde{f}(z) = f(z_0 + \rho z)$ für ein $\rho \in (r,R)$ auf $V_{r/\rho,R/\rho}(0)$ betrachten).
Der gleiche Beweis wie in B. 1.13 zeigt, dass für $g \in H(V_{r,R}(0))$ und $\Phi : (r,R) \to \mathbb{C}$ mit

$$\Phi(\lambda) := \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda e^{it})\, dt \qquad (\lambda \in (r,R))$$

gilt: Φ ist konstant auf (r,R).
Damit folgt mit $g(z) := if(z)/z^k$ für alle $\lambda \in (r,R)$

$$2\pi i a_k(\lambda) = \int_{|\zeta|=\lambda} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda e^{it}) i\lambda e^{it}}{\lambda^{k+1} e^{it(k+1)}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{if(\lambda e^{it})}{\lambda^k e^{itk}}\, dt = \Phi(\lambda)\ .$$

Also ist $a_k(\lambda)$ unabhängig von λ.)

Wir setzen

$$\hat{f}_V(k) := a_k(\lambda) \qquad (k \in \mathbb{Z})\ .$$

Dann heißen $\hat{f}_V(k)$ *k-ter Laurent-Koeffizient* von f bzgl. V und $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-z_0)^\nu$ *Laurent-Reihe* von f bzgl. V. Ferner heißen die (Potenz-)Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-z_0)^\nu$ *Regulärteil* (oder auch *Nebenteil*) und die Reihe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} \hat{f}_V(\nu)(z-z_0)^\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_V(-\nu)(z-z_0)^{-\nu}$ *Hauptteil* der Laurent-Reihe.

Satz 4.13 *Es seien $0 \le r < R \le \infty$ sowie $z_0 \in \mathbb{C}$, und es sei $f \in H(V_{r,R}(z_0))$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-z_0)^\nu$$

mit gleichmäßiger Konvergenz von Regulär- und Hauptteil auf allen kompakten Teilmengen von $V_{r,R}(z_0)$.
Außerdem ist die Darstellung eindeutig, d.h. ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu(z-z_0)^\nu$ mit glokal leichmäßiger Konvergenz auf $V_{r,R}(z_0)$, so ist $b_k = \hat{f}_V(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. 1. O. E. sei wieder $z_0 = 0$ und $r < 1 < R$. Wir setzen zur Abkürzung $a_\nu := \hat{f}_V(\nu)$.
Es gilt für $r < \lambda < R$

$$|a_\nu| = \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\lambda} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta \Big| \le \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\lambda}{\lambda^{\nu+1}} ||f||_{K_\lambda(0),\infty} = \frac{||f||_{K_\lambda(0),\infty}}{\lambda^\nu} \qquad (\nu \in \mathbb{Z})\ .$$

Also folgt

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le \frac{1}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \le \lambda\,.$$

Da $\lambda \in (r,R)$ beliebig war, ist

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le \frac{1}{R} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \le r\,.$$

Aus B. 4.10 ergibt sich die Konvergenzaussage.
Es sei $g(z) := \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $z \in V_{r,R}(0)$. Dann ist $g \in H(V_{r,R}(0))$ nach B. 4.10. Aus

$$\widehat{f_{|S}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta = a_k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

folgt $g_{|S} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(f_{|S})$. Dabei ist die Konvergenz gleichmäßig auf S. Also ist nach S. 4.9.3

$$g_{|S} = f_{|S}\,.$$

Nach dem Identitätssatz gilt $g = f$ (beachte: beide sind holomorph in $V_{r,R}(0)$).
2. Ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$ lokal gleichmäßig in $V_{r,R}(z_0)$, so gilt für $\lambda \in (r,R)$ und $k \in \mathbb{Z}$ nach B. 3.16

$$\hat{f}_V(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\lambda} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\lambda} (\zeta-z_0)^{\nu-k-1}d\zeta = b_k\,.$$

$\square$

Bemerkung 4.14 1. Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ für ein $z_0 \in \Omega$. Ist f beschränkt bei z_0, d. h. beschränkt auf $0 < |z-z_0| \le \delta$ für ein $\delta > 0$, so gilt für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und $0 < \lambda \le \delta$

$$|\hat{f}_V(-\nu)| \le \max_{0<|\zeta-z_0|\le\delta} |f(\zeta)|\lambda^\nu \to 0 \qquad (\lambda \to 0)$$

(vgl. Beweis zu S. 4.13). Also ist $\hat{f}_V(-\nu) = 0$ für $\nu \in \mathbb{N}$ und damit nach S. 4.13

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-z_0)^\nu$$

für $0 < |z-z_0| < R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Also ist f zu einer in Ω holomorphen Funktion fortsetzbar und die Potenzreihenentwicklung gilt auf $U_R(z_0)$.
2. Eine kleine Modifikation des Beweises zu S. 4.10 zeigt, dass aus S. 4.9.3 auch $g_{|K_\rho(0)} = f_{|K_\rho(0)}$ für alle $\rho \in (r,R)$ folgt. Damit kommt man im Beweis zu S. 4.10 auch ohne den Identitätssatz aus. Ist $f \in H(\Omega)$ in 1., so ist natürlich f beschränkt bei z_0. Also haben wir damit einen weiteren Beweis zu S. 1.16. Außerdem gilt in diesem Fall auch $\hat{f}_V(\nu) = f^{(\nu)}(z_0)/\nu!$ für $\nu \ge 0$.

5 Isolierte Singularitäten

Bisher haben wir uns mit dem Verhalten holomorpher Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in der Menge Ω beschäftigt. Oft ist aber das Verhalten holomorpher Funktionen bei Annäherung an Randpunkte von Ω besonders interessant. Der einfachste Fall eines solchen Randpunktes ist der eines isolierten Punktes, mit dem wir uns jetzt genauer befassen.

Bemerkung und Definition 5.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ist $a \in \partial\Omega$ ein isolierter Punkt von Ω^c (d.h. $U_\delta(a) \setminus \{a\} \subset \Omega$ für ein $\delta > 0$) so heißt a eine *isolierte Singuarlität* von f. Ist dabei $R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega \setminus \{a\})$, so hat f in $V := V_{0,R}(a) = U_R(a) \setminus \{a\}$ die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-a)^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

gemäß S. 4.13. Damit heißt a

1. *hebbare Singularität* falls $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.
2. *Pol der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$ falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu > p$.
3. *wesentliche Singularität* falls $a_{-\nu} \neq 0$ für ∞ viele $\nu \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.2 1. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Hier gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+1)!} \quad \text{in} \quad V_{0,\infty}(0)\,,$$

also ist $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Damit hat f an 0 eine hebbare Singularität.
2. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := e^z / z^p \qquad (z \neq 0)\,.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^{\nu-p} = \sum_{k=-p}^{\infty} \frac{1}{(k+p)!} z^k\,,$$

also $a_{-p} = 1$ und $a_{-\nu} = 0$ für $\nu > p$. Damit hat f an 0 einen Pol der Ordung p.
3. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Dann ist

$$f(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^{-\nu} \quad \text{in} \quad V_{0,R}(0)\,,$$

also ist hier $a_{-\nu} = 1/|\nu|! \neq 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Folglich hat f an 0 eine wesentliche Singularität.

Wir wollen nun für alle drei Typen isolierter Singularitäten Charakterisierungen herleiten.

Satz 5.3 *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann sind äquivalent

a) f hat an a eine hebbare Singularität.

b) f ist durch $f(a) := \hat{f}_V(0) = a_0$ zu einer auf $\Omega \cup \{a\}$ holomorphen Funktion f fortsetzbar (die wir auch f nennen).

b) Es existiert eine Umgebung U von a so, dass f in $U \setminus \{a\}$ beschränkt ist.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist a eine hebbare Singularität von f, so ist

$$\tilde{f}(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

holomorph auf $U := U_R(a)$ mit $R = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega \setminus \{a\})$, und es gilt

$$\tilde{f}(z) = f(z) \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

b) $\Rightarrow$ c) ist klar und b) $\Rightarrow$ a) ergibt sich aus B. 4.14.1. □

Für Pole der Ordnung p gilt folgende Charakterisierung.

Satz 5.4 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann sind äquivalent:*

a) f hat an a einen Pol der Ordnung p.

b) Es existiert eine Funktion $g \in H(\Omega \cup \{a\})$ mit $g(a) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \Omega)$$

c) $1/f$ ist (definiert und) holomorph auf einer offenen Umgebung U von a mit Nullstelle der Ordnung p an der Stelle a.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wir setzen $g(z) := (z-a)^p f(z)$ für $z \in \Omega$. Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad V_{0,R}(a)$$

mit $a_{-p} \neq 0$, so ist

$$g(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p} (z-a)^\nu$$

holomorph auf $\Omega \cup \{a\}$ mit $g(a) = a_{-p} \neq 0$ und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \quad (z \in \Omega)\,.$$

b) $\Rightarrow$ c): Es sei U eine offene Umgebung von a so, dass $g(z) \neq 0$ in U. Dann ist

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \, \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Also ist $1/f$ (definiert und) holomorph auf U und hat nach B./D. 1.3 eine Nullstelle der Ordnung p an a.
c) $\Rightarrow$ a): Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \cdot g_0(z) \qquad (z \in U \setminus \{a\})$$

mit einer Funktion $g_0 \in H(U)$ mit $g_0(a) \neq 0$. Dann ist auch $g_0(z) \neq 0$ auf einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von a. Also ist

$$f(z) = \frac{1/g_0(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \tilde{U} \setminus \{a\})\,.$$

Da $1/g_0$ holomoroph in $\tilde{U}$ ist, hat $1/g_0$ eine Potenzreihendarstellung

$$1/g_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad U_\delta(a)$$

für ein $\delta > 0$. Damit ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^{\nu-p} = \sum_{\nu=-p}^{\infty} b_{\nu+p} (z-a)^\nu\,,$$

in $V_{0,\delta}(a)$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen, d. h.

$$h(z) = \sum_{\nu=-p}^{-1} b_{\nu+p} (z-a)^\nu = \sum_{\nu=1}^{p} b_{p-\nu} (z-a)^{-\nu}$$

ist der Haupttteil der Laurent-Reihe, und es gilt $a_{-p} = b_0 = 1/g_0(a) \neq 0$. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz 5.5 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann hat f an a genau dann einen Pol (irgendeiner Ordnung), wenn gilt*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty\,.$$

Beweis. Hat f an a einen Pol, etwa der Ordnung p, so gilt mit g wie in S. 5.4 (da $g(a) \neq 0$)

$$|f(z)| \;=\; \frac{|g(z)|}{|z-a|^p} \to \infty \qquad (z \to a)\,.$$

Gilt umgekehrt

$$|f(z)| \to \infty \qquad (z \to \infty)\,,$$

so existiert eine offene Umgebung U von a mit $f(z) \neq 0$ in $U \setminus \{a\}$ und

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0\,.$$

also ist $1/f$ nach S. 5.3 holomorph fortsetzbar an der Stelle a mit Nullstelle, etwa der Ordnung p. Dann hat f nach S. 5.4 einen Pol der Ordnung p. □

Beispiel 5.6 Es gilt

$$Z(\sin) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad Z(\cos) = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

und alle Nullstellen sind von der Ordnung 1. Damit hat auch tan an den Stellen $k\pi$ Nullstellen der Ordnung 1 und cot an den Stellen $(k + 1/2)\pi$. Nach S. 5.4 hat $\cot = 1/\tan$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $k\pi$ und $\tan = 1/\cot$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $(k + 1/2)\pi$.
Nach S. 5.5 gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z\to k\pi} |\cot z| = \lim_{z\to(k+\frac{1}{2})\pi} |\tan z| = \infty\,.$$

Bemerkung und Definition 5.7 Es sei

$$S^2 := \left\{s = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \left|s - (0, 0, \frac{1}{2})\right| = \frac{1}{2}\right\}.$$

Dann ist durch

$$P(z) := P(x + iy) := \frac{1}{|z|^2 + 1}\,(x, y, |z|^2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ definiert ([Ü]). Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$P^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi}{1 - \zeta} + i\frac{\eta}{1 - \zeta}$$

(so genannte stereographische Projektion).
Setzt man

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad P(\infty) := (0, 0, 1),$$

so ist $P : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ bijektiv, und durch

$$\chi(z, w) := |P(z) - P(w)| \qquad (z, w \in \mathbb{C}_\infty)$$

wird $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ein kompakter metrischer Raum (die so genannte Riemannsche Zahlenkugel).

Dabei gilt $\chi(z,\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$ für $z \neq \infty$, also ergibt sich für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$

$$\chi(z_n,\infty) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(d. h. $z_n \to \infty$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$) genau dann, wenn $|z_n| \to \infty\, (n \to \infty)$.
Da $P : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ und $P^{-1} : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ stetig sind, ist $M \subset \mathbb{C}$ genau dann offen in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, wenn M offen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist. Für $z_n, z \in \mathbb{C}$ folgt zudem $|z_n - z| \to 0$ genau dann, wenn $\chi(z_n, z) \to 0$.
Ist also $a \in \mathbb{C}$ und ist $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph für eine offene Umgebung U von a mit Pol an der Stelle a, so kann f durch $f(a) := \infty$ zu einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ fortgesetzt werden. (Man beachte: Nach S. 5.5 gilt

$$f(z) \to \infty \qquad (z \to a)$$

in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$).

Definition 5.8 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ heißt *meromorph* in Ω, falls

$$P(f) := \{z \in \Omega : f(z) = \infty\} = f^{-1}(\{\infty\})$$

keinen Häufungspunkt in Ω hat, $f \in H(\Omega \setminus P(f))$ gilt und f an allen Stellen $z \in P(f)$ Pole hat (d. h. f ist stetig an allen $z \in P(f)$).

Beispiel 5.9 1. Die Funktionen cot und tan (durch den Wert ∞ an den Polstellen definiert) sind meromorph in $\mathbb{C}$ (vgl. B. 5.6). Man beachte dabei: $P(\tan) = \{(k+1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und $P(\cot) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ haben keine Häufungspunkte in $\mathbb{C}$.
2. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)} \qquad \big(z \in \mathbb{C} \setminus (\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0\} \cup \{0\})\big)$$

(und $f(1/(k\pi)) = \infty$ für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$). Dann ist f meromorph in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polstellenmenge $P(f) = \{1/(k\pi) : k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0\}$).

Bleibt noch, das Verhalten in der Nähe von wesentlichen Singularitäten zu charakterisieren. Bitte schön:

Satz 5.10 *(Casorati-Weierstrass)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

a) f hat an a eine wesentliche Singularität.

b) Für alle offenen Umgebungen U von a gilt

$$\overline{f(U \setminus \{a\})} = \mathbb{C}\,,$$

c) Zu jedem $w \in \mathbb{C}_\infty$ existiert eine Folge z_n in Ω mit $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Angenommen, es existiert eine offene Umgebung U von a mit

$$\overline{f(U \setminus \{a\})} \neq \mathbb{C}\,.$$

Dann existieren ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$ so, dass $|f(z) - w| \geq \delta$ für alle $z \in U \setminus \{a\}$ gilt. Wir definieren $g : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Dann ist $g \in H(U \setminus \{a\})$ mit $|g(z)| < 1/\delta$ für alle $z \in U, z \neq a$. Also hat g an a eine hebbare Singuarlität nach S. 5.3 (wir schreiben auch für die Fortsetzung wieder g).
Ist $g(a) \neq 0$, so ist $f(z) = w + 1/g(z)$ beschränkt in einer Umgebung von a, also hat f wieder nach S. 5.3 eine hebbare Singuarlität. Widerspruch!
Ist $g(a) = 0$, so gilt

$$|f(z) - w| = \frac{1}{|g(z)|} \to \infty \qquad (z \to a)\,,$$

also auch

$$|f(z)| \to \infty \qquad (z \to a)\,.$$

Damit hat f an a einen Pol nach S. 5.5. Widerspruch!
b) $\Rightarrow$ c): Ist $w \in \mathbb{C}$, so existiert zu jeden $n \in \mathbb{N}$ ein z_n mit $0 < |z_n - a| < 1/n$ und $|f(z_n) - w| < 1/n$. Damit gilt $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$. Ist $w = \infty$, so existiert entsprechend für alle n ein z_n mit $0 < |z_n - a| < 1/n$ und $|f(z_n) - n| < 1$, also $|f(z_n)| \to \infty$.
c) $\Rightarrow$ a): Gilt die Bedingung c), so ist f unbeschränkt in jeder Umgebung von a, und es gilt sicher nicht $|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$. Folglich hat f an a weder eine hebbare Singularität noch einen Pol (S. 5.3 bzw. S. 5.5). Also hat f an a eine wesentliche Singuarlität. $\square$

Beispiel 5.11 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Für die Folge $(1/n)$ gilt $f(1/n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ und für die Folge $(-1/n)$ gilt $f(-1/n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Ist $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ und $w = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so gilt für die Folge

$$z_n = [\ln r + i(\varphi + 2n\pi)]^{-1}$$

$z_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$f(z_n) = e^{\ln r + i(\varphi + 2n\pi)} = re^{i\varphi} = w\,.$$

Also gilt hier sogar $f(z_n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und damit natürlich insbesondere $f(z_n) \to w$ $(n \to \infty)$). Es ist also hier tatsächlich

$$f(U \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für alle Umgebungen U von 0, d.h. in jeder (noch so kleinen) Umgebung von 0 wird jeder Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (unendlich oft) als Funktionswert angenommen!

Bemerkung 5.12 Eine ganze Funktion f heißt *transzendent*, falls f kein Polynom ist. Durch Übertragung des Satzes von Casorati-Weierstrass sieht man: Ist f transzendent, so existiert zu jedem $w \in \mathbb{C}_\infty$ eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to \infty$ und $f(z_n) \to w\,(n \to \infty)$. (Denn: Es sei $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\,(z \in \mathbb{C})$. Dann hat $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f\big(\frac{1}{z}\big) \qquad (z \neq 0)\,,$$

die Laurent-Entwicklung

$$g(z) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Da $a_\nu \neq 0$ für ∞ viele ν gilt (beachte: f ist kein Polynom), hat g an 0 eine wesentliche Singularität nach B./D. 5.1. Also existiert nach S. 5.10 zu jedem $w \in \mathbb{C}_\infty$ eine Folge (ζ_n) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\zeta_n \to 0$ und $g(\zeta_n) \to w\,(n \to \infty)$. Die Folge (z_n) mit $z_n = 1/\zeta_n$ erfüllt dann $z_n \to \infty$ und $f(z_n) \to w\,(n \to \infty)$.)

6 Cauchy Theorem und Residuensatz

In den vorherigen Abschnitten haben wir die Cauchysche Integralformel für Kreise und den Cauchyschen Integralsatz auf sternförmigen Gebieten kennengelernt. Wir wollen nun eine gemeinsame Verallgemeinerung herleiten.

Bemerkung und Definition 6.1 Es seien $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein Pfad und $f \in C(\gamma^*)$. Dann heißt die Funktion $Cf = C_\gamma f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(C_\gamma f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)\, dt \qquad (z \notin \gamma^*)$$

Cauchy-Integral von f bzgl. γ. Weiter heißt im Falle eines geschlossenen Pfades γ

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) := C_\gamma 1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Index (oder auch *Windungszahl*) von z bzgl. γ.
Nach S. 1.8 ist $Cf \in H(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$. Außerdem gilt für $z \notin \gamma^*$

$$|(Cf)(z)| \le \frac{1}{2\pi} ||f||_{\gamma^*,\infty} L(\gamma) \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \gamma^*)} \to 0 \qquad (z \to \infty)\ ,$$

d. h. mit $(Cf)(\infty) := 0$ ist Cf stetig auf $\mathbb{C}_\infty \setminus \gamma^*$.

Beispiel 6.2 Ist $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ $(t \in [-\pi, \pi])$, so gilt nach der Cauchyschen Integralformel für Kreise und dem Cauchyschen Integralsatz für alle f, die holomorph auf einer Umgebung von $\overline{U_R(z_0)}$ sind,

$$(C_{K_R(z_0)} f)(z) := (C_\gamma f)(z) = \begin{cases} f(z), & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases} .$$

(man beachte: für $|z - z_0| > R$ ist dann auch $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ holomorph auf einer (o. E. sternförmigen) Umgebung von $\overline{U_R(z_0)}$).
Insbesondere ist

$$\mathrm{ind}_{K_R(z_0)}(z) = \mathrm{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases} .$$

Der folgende Satz zeigt, dass der Index lokal konstant und ganzzahlig ist. Man beachte dabei, dass für kompakte $K \subset \mathbb{C}$ die offene Menge $\mathbb{C} \setminus K$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente hat.

Satz 6.3 *Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Pfad. Dann ist $\mathrm{ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus \gamma^*) \subset \mathbb{Z}$. Außerdem gilt $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv \mathrm{const}$ auf jeder Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ und $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Beweis. 1. Es gilt

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*)\,.$$

Für $w \in \mathbb{C}$ gilt $e^w = 1$ genau dann, wenn $w/2\pi i \in \mathbb{Z}$. Also ist die Aussage, dass ind_γ ganzzahlige Werte hat, äquivalent dazu $\varphi = \varphi_z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) := \exp\Big(\int\limits_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \Big) \qquad (t \in [\alpha, \beta])$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ die Bedingung $\varphi(\beta) = 1$ erfüllt.
Die stetige Funktion $\varphi/(\gamma - z)$ ist eine Stammfunktion zu

$$\frac{\varphi'(\gamma - z) - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} \quad \text{auf } [\alpha, \beta]$$

Weiter gilt

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,,$$

also auch

$$\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t) = 0$$

für alle $t \in [\alpha, \beta]$ bis auf eine endliche Ausnahmemenge. Hieraus folgt, dass eine Konstante c existiert mit

$$\varphi(t) = c(\gamma(t) - z) \qquad (t \in [\alpha, \beta])\,.$$

Aus $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ ergibt sich

$$\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) = 1\,.$$

2. Es sei G eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Da G zusammenhängend und ind_γ stetig und ganzzahlig auf G ist, ist $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv \mathrm{const}$ in G nach S.A.6. Außerdem gilt für z in der unbeschränkten Komponente G

$$|\mathrm{ind}_\gamma(z)| \to 0 \qquad (z \to \infty)\,.$$

Also ist $|\mathrm{ind}_\gamma(z)| < 1$ für $|z|$ genügend groß. Da $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv \mathrm{const}$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ist, ist $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ dort. □

Definition 6.4 Es sei γ ein geschlossener Pfad in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \mathrm{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$

Inneres von γ und

$$\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0\}$$

Äußeres von γ. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein Pfad in G, so heißt γ *nullhomolog* in G, falls

$$\mathrm{Int}(\gamma) \subset G.$$

Satz 6.5 *(Cauchy Theorem; Homologieversion)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ist γ ein geschlossener Pfad in G, so sind folgende Aussagen äquivalent:

a) γ ist nullhomolog in G.

b) Für alle $f \in H(G)$ und $z \in G \setminus \gamma^*$ ist

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = (C_\gamma f)(z)$$

(Cauchysche Integralformel).

c) Für alle $f \in H(G)$ ist

$$\int\limits_\gamma f = 0.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b)
1. Wir zeigen: Für die Funktion $g : G \times G \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z,\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & z \neq \zeta \\ f'(z), & z = \zeta \end{cases}$$

gilt

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)}{(\zeta - z)^2}, & \zeta \neq z \\ \dfrac{f''(z)}{2}, & \zeta = z \end{cases}$$

und $\partial g / \partial z$ ist stetig auf $G \times G$.
Denn: Ist $(z_0, \zeta_0) \in G \times G$ mit $\zeta_0 \neq z_0$, so gilt mit der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z_0,\zeta_0) = \frac{f(\zeta_0) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta_0 - z_0)}{(\zeta_0 - z_0)^2}\,.$$

Ist $\zeta_0 = z_0$, so gilt für $z \neq z_0$

$$\begin{aligned} \frac{g(z,z_0) - g(z_0,z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{(z - z_0)^2}\big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big) \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^{\nu-2} \to \frac{f''(z_0)}{2} \quad (z \to z_0). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $\partial g / \partial z$ ist klar an allen Stellen (z_0, ζ_0) mit $z_0 \neq \zeta_0$.
Es sei also $z_0 = \zeta_0$ und $0 < R < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. Dann ist nach dem Taylor-Satz für Richtun-

gen ($\to$ Analysis) für $z, \zeta \in U_R(z_0), z \neq \zeta$ mit $w := (\zeta - z)/|\zeta - z|$ und $t = |\zeta - z|$

$$f(\zeta) = f(z + tw) = f(z) + \partial_w f(z) \cdot t + \int_0^t (t - s)\, \partial_w^2 f(z + sw)\, ds$$

$$= f(z) + f'(z) \cdot (\zeta - z) + (\zeta - z)^2 \frac{1}{t^2} \int_0^t (t - s)\, f''(z + sw)\, ds.$$

Weiter ergibt sich aus der Stetigkeit von f'' an z_0

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t (t - s) f''(z + sw)\, ds \to f''(z_0)\, \underbrace{\frac{1}{t^2} \int_0^t (t - s)\; ds}_{= 1/2}$$

für $(z, \zeta) \to (z_0, z_0)$. Also folgt für $(z, \zeta) \to (z_0, z_0)$

$$\frac{\partial g}{\partial z}\,(z, \zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{t^2} \displaystyle\int_0^t (t - s)\, f''(z + sw)\, ds, & \text{falls } z \neq \zeta \\ \dfrac{f''(z)}{2}, & \text{falls } z = \zeta \end{array} \right\} \to \frac{f''(z_0)}{2} = \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, z_0)\,.$$

Eine analoge (einfachere) Argumentation unter Nutzung des Taylor-Satzes für $n = 0$ statt $n = 1$ liefert auch die Stetigkeit von g auf $G \times G$.
2. Wir definieren $\varphi : G \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z, t) := g\big(z, \gamma(t)\big)\, \gamma'(t) \qquad \big(t \in [\alpha, \beta]\big).$$

O. E. sei γ' stetig auf $[\alpha, \beta]$ (ansonsten: geeignete Zerlegung von $[\alpha, \beta]$ betrachten). Dann ist nach S. 1.12 und 1. die Funktion $\Phi : G \to \mathbb{C}$ mit

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta \varphi(z, t)\, dt \qquad (z \in G)$$

differenzierbar auf G mit

$$\Phi'(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z, t)\, dt \qquad (z \in G).$$

Die Stetigkeit von $\partial\varphi/\partial z$ impliziet, dass auch Φ' stetig ist (Stetigkeit von Parameterintegralen; [Ü]), d. h. $\Phi \in H(G)$. Für $z \in G$ und $z \notin \gamma^*$ ist

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta g\big(z, \gamma(z)\big)\, \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma g(z, \zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i\, f(z)\, \mathrm{ind}_\gamma(z) = 2\pi i (C_\gamma f)(z) - 2\pi i\, f(z)\, \mathrm{ind}_\gamma(z).$$

Also reicht es, $\Phi \equiv 0$ zu zeigen.
Zunächst ist $C_\gamma f$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ nach B./D. 6.1 mit $\Phi(z) = 2\pi i(C_\gamma f)(z)$ für alle $z \in G \cap \operatorname{Ext}(\gamma)$. Aus $\operatorname{Int}(\gamma) \cup \gamma^* \subset G$ folgt $\partial G \subset G^c \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$. Damit ist durch

$$F(z) := \begin{cases} \Phi(z), & z \in G \\ \\ 2\pi i(C_\gamma f)(z), & z \in G^c \end{cases}$$

eine ganze Funktion F definiert. Aus $F(z) = 2\pi i(C_\gamma f)(z)$ für $z \in \operatorname{Ext}(\gamma)$ ergibt sich zudem (wieder mit B./D. 6.1)

$$|F(z)| = |2\pi i(C_\gamma f)(z)| \to 0 \qquad (z \to \infty).$$

Mit dem Satz von Liouville folgt, dass F konstant ist und damit auch $F \equiv 0$ in $\mathbb{C}$. Also gilt für alle $z \in G$

$$\Phi(z) = F(z) = 0.$$

b) $\Rightarrow$ c) Es sei $z_0 \in G \setminus \gamma^*$. Dann gilt mit b), angewandt auf $f_0 : G \to \mathbb{C}$ mit $f_0(z) = (z - z_0)f(z)$:

$$0 = 2\pi i f(z_0) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \int_\gamma \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \int_\gamma f\,.$$

c) $\Rightarrow$ a) Folgt aus $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z} \in H(G)$ für alle $z \notin G$. $\square$

Bemerkung und Definition 6.6 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Beschränkte Komponenten von $\mathbb{C} \setminus G$ heißen *Löcher* von G. Weiter heißt G *einfach zusammenhängend*, falls G keine Löcher hat. Insbesondere ist jedes sternförmige Gebiet in $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend.
Ist γ ein beliebiger geschlossener Pfad in G so, dass $\operatorname{Int}(\gamma)$ keine Löcher von G enthält, so ist γ nullhomolog in G.
(Denn: $\operatorname{ind}_\gamma$ ist stetig und ganzzahlig auf $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, also insbesondere auf $A := \mathbb{C} \setminus G$. Da $\operatorname{ind}_\gamma$ konstant auf jeder Komponente von A ist, liegt eine Komponente entweder ganz in $\operatorname{Int}(\gamma)$ oder ganz in $\operatorname{Ext}(\gamma)$. Also liegen alle beschränkten Komponenten von A (falls existent) in $\operatorname{Ext}(\gamma)$. Aus $\operatorname{ind}_\gamma(\infty) \to 0$ für $z \to \infty$ folgt $\operatorname{ind}_\gamma \equiv 0$ auf allen unbeschränkten Komponenten von A. Folglich ist $\operatorname{Int}(\gamma) \subset G$.)
Insbesondere ergibt sich damit: Ist G einfach zusammenhängend, so ist jeder geschlossene Pfad in G nullhomolog in G. Nach dem Cauchy Theorem gilt folglich der Cauchysche Integralsatz auch für allgemeine einfach zusammenhängende Gebiete anstelle von sternförmigen!

Wir wollen nun den Residuensatz beweisen, ein Ergebnis, das man als wiederum Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel und des Cauchyschen Integralsatzes auffassen kann. Im Weiteren werden wir den Satz u. a. nutzen, um gewisse (z. T. reelle) Integrale bequem zu berechnen. Zunächst zum Begriff des Residuums.

Definition 6.7 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann heißt

$$\operatorname{Res}(f,a) := \hat{f}_{V_{0,R}(a)}(-1) \left(= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r} f(\zeta) d\zeta \ \text{ für } 0 < r < R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega \setminus \{a\}) \right)$$

Residuum von f an der Stelle a.

Beispiel 6.8 (vgl. B.5.2)
1. Hat f an a eine hebbare Singularität, so gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = 0\,.$$

2. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $f(z) = e^z/z^p$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{(p-1)!};.$$

3. Für

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{z^\nu} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

gilt $\operatorname{Res}(f,0) = 1$.

Satz 6.9 *(Residuensatz)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f holomorph in $G \setminus A$ für eine Menge $A \subset G$ ohne Häufungspunkt in G. Dann gilt für alle geschlossenen Pfade γ in $G \setminus A$

$$\int\limits_\gamma f = 2\pi i \sum_{w \in A \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{Res}(f,w)\,.$$

Beweis. Es sei $A_0 := A \cap \operatorname{Int}(\gamma)$. Dann ist A_0 endlich, da ansonsten A_0 nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass einen Häufungspunkt in G hätte (man beachte $\operatorname{Int}(\gamma) \cup \gamma^*$ ist kompakt in $\mathbb{C}$).
O. E. können wir $A_0 \neq \emptyset$ annehmen (für $A_0 = \emptyset$ ergibt sich die Behauptung aus B. 6.6).
Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(w) \subset \operatorname{Int}(\gamma)$ für alle $w \in A_0$ und

$$|w - \tilde{w}| > \delta$$

für alle $w, \tilde{w} \in A_0$, $w \neq \tilde{w}$ gilt. Dann hat f für alle $w \in A_0$ nach S.4.13 eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(\nu)(z-w)^\nu$$

in $V(w) := V_{0,\delta}(w)$. Der Hauptteil

$$h_w(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(-\nu)(z-w)^{-\nu}$$

konvergiert dann gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $V_{0,\infty}(w) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$ (vgl. B. 4.10). Also folgt für $w \in A_0$

$$\begin{aligned} \int_\gamma h_w(z)dz &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(-\nu) \int_\gamma \frac{dz}{(z-w)^\nu} \\ &= \hat{f}_{V(w)}(-1) \cdot 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(w) = 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{Res}(f,w)\,. \end{aligned}$$

(Man beachte dabei: Für $\nu > 1$ ist $\int_\gamma (z-w)^{-\nu} dz = 0$ nach B.3.16.)

Die Funktion $g : G \setminus A \to \mathbb{C}$

$$g(z) := f(z) - \sum_{w \in A_0} h_w(z) \qquad (z \in G \setminus A)$$

ist holomorph in $G \setminus A$, und für $w \in A_0$ gilt in $V(w)$

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(\nu)(z-w)^\nu - \sum_{\tilde{w} \in A_0,\, w \neq \tilde{w}} h_{\tilde{w}}(z)\,.$$

Da die rechte Seite holomorph in $U_\delta(w)$ ist, hat g an w eine hebbare Singularität. Also ist g holomorph fortsetzbar nach $(G \setminus A) \cup A_0$. Da γ nach B. 6.6 nullhomolog in $(G \setminus A) \cup A_0$ ist (man beachte: $(G \setminus A) \cup A_0$ hat keine Löcher in $\operatorname{Int}(\gamma)$), ergibt sich

$$\int_\gamma g = 0$$

aus dem Cauchy Theorem. Folglich ist

$$0 = \int_\gamma f - \sum_{w \in A_0} \int_\gamma h_w = \int_\gamma f - 2\pi i \sum_{w \in A_0} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{Res}(f,w)\,.$$

□

Um den Residuensatz anwenden zu können, ist es wichtig, Techniken zur Berechnung von Residuen zur Verfügung zu haben. Für Pole gilt:

Satz 6.10 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$.*

1. *Hat f an a einen Pol der Ordnung p, so ist $\varphi(z) := (z-a)^p f(z)$ holomorph fortsetzbar nach $\Omega \cup \{a\}$, und es gilt*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\big((z-a)^p f(z)\big)\,.$$

2. *Existieren eine offene Umgebung U von a und Funktionen $g, h \in H(U)$ mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und $f = g/h$ in $U \setminus \{a\}$, so gilt*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Beweis. 1. Es gilt für $z \in V := V_{0,R}(a)$, wobei $U_R(a) \subset \Omega \cup \{a\}$,

$$\varphi(z) = (z-a)^p f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_V(\nu-p)(z-a)^{\nu} .$$

Also ist (da die rechte Seite holomorph in $U_R(a)$ ist)

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\big((z-a)^p f(z)\big) .$$

2. Ist $g(a) \neq 0$, so hat nach Voraussetzung h/g eine Nullstelle der Ordnung 1 an a, also hat f einen Pol der Ordnung 1 an a. Nach 1. ist

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to a} g(z) \lim_{z\to a} \frac{1}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)} .$$

Ist $g(a) = 0$, so hat g/h eine hebbare Singularität an a, da h eine Nullstelle der Ordnung 1 an a hat ([Ü]). Also ist dann $\mathrm{Res}(f,a) = 0$. □

Beispiel 6.11 1. Es sei $f(z) = \cot z = \cos z/\sin z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$). Dann gilt mit $g(z) = \cos z, h(z) = \sin z$ nach S.6.10.2

$$g(k\pi) = (-1)^k, \qquad h(k\pi) = 0, \qquad h'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

und damit

$$\mathrm{Res}(f,k\pi) = \frac{g(k\pi)}{h'(k\pi)} = 1 \qquad (k \in \mathbb{Z}) .$$

2. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$). Dann gilt mit $g(z) = 1$, $h(z) = 1+z^2$ nach S.6.10.2

$$\mathrm{Res}(f,\pm i) = \pm\frac{1}{2i} = \mp\frac{i}{2} .$$

Dies sieht man auch leicht direkt mittels Partialbruchzerlebung: Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i} ,$$

also

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=1} f(z)dz = -\frac{i}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=1}\frac{dz}{z-i} = -\frac{i}{2}$$

(und entsprechend für $-i$).

3. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ ($z \neq \pm i$). Dann hat f an $\pm i$ Pole der Ordnung 2. Es gilt nach S.6.10.1

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\big((z-i)^2 f(z)\big) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{(z+i)^2}\Big) = \lim_{z\to i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i} .$$

7 Anwendungen des Residuensatzes

Wir werden nun zeigen, dass man den Residuensatz insbesondere dafür nutzen kann, uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

zu berechnen. Vorbereitend betrachten wir geeignete geschlossene Pfade.

Bemerkung 7.1 Für $R > 0$ seien

$$\gamma_R^+(t) := \begin{cases} Re^{it}, & t \in (0, \pi] \\ R\cos t, & t \in (-\pi, 0] \end{cases}$$

und

$$\gamma_R^-(t) := \begin{cases} Re^{it}, & t \in (-\pi, 0] \\ R\cos t, & t \in (0, \pi] \end{cases}$$

Dann sind $\gamma_R^{\pm}$ geschlossene Pfade in $\mathbb{C}$ und nach der Substitutionsregel gilt

$$\int_{-\pi}^{0} f(\gamma_R^+(t))(\gamma_R^+)'(t)\,dt = \int_{-R}^{R} f \quad \text{und} \quad \int_{0}^{\pi} f(\gamma_R^-(t))(\gamma_R^-)'(t)\,dt = -\int_{-R}^{R} f\,.$$

Also ergibt sich für f stetig auf $K_R(0) \cup [-R, R]$

$$\int_{\gamma_R^+} f + \int_{\gamma_R^-} f = \int_{K_R(0)} f$$

Insbesondere ist für $z \in U_R(0)$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ (da $z \in \mathrm{Ext}(\gamma_R^-)$)

$$\mathrm{ind}_{\gamma_R^+}(z) = \mathrm{ind}_{K_R(0)}(z) - \mathrm{ind}_{\gamma_R^-}(z) = 1\,.$$

Satz 7.2 *Es sei $E := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, und es sei $A \subset E^0$ endlich. Ferner sei $f \in H(G \setminus A)$, wobei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $E \subset G$ ist, und so, dass Konstanten $R_0, M > 0$ und $\alpha > 1$ existieren mit*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha} \qquad (z \in E, |z| \geq R_0)\,.$$

Dann existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; 2\pi i \sum_{w \in A} \mathrm{Res}(f, w)\,.$$

Beweis. Zunächst folgt aus $|f(x)| \leq M/|x|^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}, |x| \geq R_0$ und der Existenz der Integrale $\int\limits_1^\infty dx/x^\alpha$ und $\int\limits_{-\infty}^{-1} dx/|x|^\alpha$ auch die Existenz der Integrale $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ und $\int\limits_{-\infty}^0 f(x)dx$ (man beachte dabei: f ist stetig auf $\mathbb{R}$).
O.E. können wir davon ausgehen, dass $|w| < R_0$ für alle $w \in A$ gilt. Für $R \geq R_0$ betrachten wir den Pfad γ_R^+ aus B. 7.1. Dann folgt aus dem Residuensatz und B. 7.1

$$\int\limits_{\gamma_R^+} f = 2\pi i \sum_{w \in A} \operatorname{Res}(f, w) \qquad \text{für alle } R \geq R_0.$$

Weiter gilt

$$\Big| \int\limits_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it}\, dt \Big| \leq \frac{M}{R^\alpha} \cdot \pi R \;=\; \frac{M\pi}{R^{\alpha-1}} \to 0 \qquad (R \to \infty)\,.$$

Also erhalten wir

$$2\pi i \sum_{w \in A} \operatorname{Res}(f, w) - \int\limits_{-R}^{R} f = \int\limits_{\gamma_R^+} f - \int\limits_{-R}^{R} f = \int\limits_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it}\, dt \to 0$$

für $R \to \infty$, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 7.3 Insbesondere lässt sich S.7.2 bei Integranden der Form

$$f(x) = e^{iax} \frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \cos(ax) \frac{P(x)}{Q(x)} \;+\; i\, \sin(ax) \frac{P(x)}{Q(x)}$$

anwenden, wobei $a \geq 0$ ist und wobei P und Q Polynome sind mit $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ und $Q(x) \neq 0\, (x \in \mathbb{R})$.
(Denn: Es sei

$$A := Z(Q) \cap E^0$$

die Menge der Nullstellen von Q in der oberen Halbebene E^0. Dann ist

$$f(z) := e^{iaz} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

holomorph in $G_\delta \setminus A$, für $G_\delta := \{z : \operatorname{Im}(z) > -\delta\}$ mit einem $\delta > 0$. Außerdem gilt für $\operatorname{Im}(z) \geq 0, z = x + iy$ mit einem $M > 0$

$$|f(z)| = \underbrace{e^{-ay}}_{\leq 1} \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \;\leq\; \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \;\leq\; \frac{M}{|z|^2}$$

für $|z|$ genügend groß. Damit sind alle Voraussetzungen von S.7.2 erfüllt.)

Beispiel 7.4 Für $a > 0$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}) .$$

Dann ist f wie in B. 7.3. Also gilt nach S.7.2 (man beachte, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ax)/(1+x^2)\, dx = 0$$

gilt, da der Integrand ungerade ist)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx \;=\; 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) .$$

Weiter ist (etwa nach S.6.10.2)

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{e^{iaz}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2i} ,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-a} .$$

Eine weitere interessante Klasse von Integralen, die mittels des Residuensatzes oft leicht berechnet werden können, sind Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t) dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^{2\pi} R(\sin t) dt ,$$

wobei R eine rationale Funktion ist. Beachtet man, dass

$$\cos t = \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big) , \qquad \sin t = \frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)$$

für $z = e^{it}$ gilt, so ergibt sich mit

$$R^*(z) = \frac{1}{z}\, R\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big) \qquad \text{bzw.} \qquad R^{**}(z) = \frac{1}{z}\, R\Big(\frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)\Big)$$

dabei (falls R^* bzw. R^{**} stetig auf $|z| = 1$ sind)

$$\int_{|z|=1} R^*(z) dz \;=\; i \int_{|z|=1} R\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big) \frac{dz}{iz} \;=\; i \int_0^{2\pi} R(\cos t) dt \tag{7.1}$$

bzw.

$$\int_{|z|=1} R^{**}(z) dz \;=\; i \int_{|z|=1} R\Big(\frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)\Big) \frac{dz}{iz} \;=\; i \int_0^{2\pi} R(\sin t) dt \tag{7.2}$$

Dies beweist schon im Wesentlichen folgenden

Satz 7.5 *Es sei R eine rationale Funktion.*

1. *Ist*
$$R^*(z) := \frac{1}{z} R\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big)$$
holomorph in $U_r(0) \setminus A^*$ für eine endliche Menge $A^* \subset \mathbb{D}$ und ein $r > 1$, so gilt
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t)dt = 2\pi \sum_{w \in A^*} \operatorname{Res}(R^*, w)\,.$$

2. *Ist*
$$R^{**}(z) := \frac{1}{z} R\Big(\frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)\Big)$$
holomorph in $U_r(0) \setminus A^{**}$ für eine endliche Menge $A^{**} \subset \mathbb{D}$ und ein $r > 1$, so folgt
$$\int_0^{2\pi} R(\sin t)dt = 2\pi \sum_{w \in A^{**}} \operatorname{Res}(R^{**}, w)\,.$$

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus (7.1) bzw. (7.2) und dem Residuensatz, angewandt auf R^* bzw. R^{**} und $G = U_r(0)$ sowie $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). □

Beispiel 7.6 1. Für $0 < \rho < 1$ betrachten wir das Integral
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}\,.$$
Ist
$$R(\cos t) = \frac{1}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}$$
und
$$R^*(z) = \frac{1}{z} R\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \rho(z + 1/z) + \rho^2} = \frac{1}{(z - \rho)(1 - \rho z)}\,,$$
so hat R^* die beiden einfachen Pole $\rho < 1$ und $1/\rho > 1$. Also gilt nach S.7.5 und S.6.10.1
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} = 2\pi \cdot \operatorname{Res}(R^*, \rho) = 2\pi \cdot \frac{1}{1 - \rho z}\Big|_{z=\rho} = \frac{2\pi}{1 - \rho^2}\,.$$
Für die Funktion
$$P(\rho, t) := \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} \quad (0 < \rho < 1, 0 \le t \le 2\pi)$$
folgt also
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, t)dt = 1$$

für alle ρ. Diese Funktion, der sogenannte Poisson-Kern, spielt eine wichtige Rolle in der Theorie harmonischer Funktionen.
2. Für $p \in \mathbb{N}$ und $a > 1$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^p} .$$

Hier ist

$$R(\cos t) = \frac{1}{(a+\cos t)^p} ,$$

also

$$R^*(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(a+(z+1/z)/2)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z^2+2az+1)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z-w_1)^p(z-w_2)^p}$$

mit $w_1 = -a + \sqrt{a^2-1} \in (-1,0)$ und $w_2 = -a - \sqrt{a^2-1} < -1$.
Also ergibt sich aus S.7.5 und S.6.10.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^p} = 2\pi \cdot \mathrm{Res}(R^*, w_1) = \frac{2\pi}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left(\frac{2^p z^{p-1}}{(z-w_2)^p} \right)_{|z=w_1} .$$

Für $p = 1$ erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = 2\pi \cdot \frac{2}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} ,$$

und für $p = 2$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{(a+\cos t)^2} &= 2\pi \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{4z}{(z-w_2)^2} \right)_{|z=w_1} \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{-w_1-w_2}{(w_1-w_2)^3} = \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-1}^3} . \end{aligned}$$

Wir kommen zum Schluss dieses Abschnittes zu zwei interessanten funktionentheoretischen Anwendungen des Residuensatzes.

Satz 7.7 *(Argumentprinzip)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei f meromorph in G. Ist γ ein geschlossener Pfad in $G \setminus (Z(f) \cup P(f))$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in Z(f) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ind}_\gamma(w) \cdot n(w) - \sum_{w \in P(f) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ind}_\gamma(w) \cdot p(w) ,$$

wobei $n(w) = n_f(w)$ die Ordnung der Nullstelle w von f und $p(w) = p_f(w)$ die Ordnung der Polstelle w von f bezeichnet.

Beweis. 1. Ist a eine Nullstelle von f der Ordnung $n(a)$, so existiert eine in einer offenen Umgebung U von a holomorphe Funktion g mit $g(z) \neq 0$ in U und

$$f(z) = (z-a)^{n(a)} g(z) \qquad (z \in U)\,.$$

Also folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(a)}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{in } U \setminus \{a\}\,.$$

d.h. f'/f hat an a einen Pol der Ordnung 1, und es gilt

$$\operatorname{Res}\bigl(\frac{f'}{f}, a\bigr) = n(a)\,.$$

2. Ist a ein Pol der Ordnung $p(a)$ von f, so existiert ein in einer Umgebung U von a holomorphe Funktion g mit $g(z) \neq 0$ in U und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^{p(a)}} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Aus

$$f'(z) = g'(z) \cdot \frac{1}{(z-a)^{p(a)}} + g(z) \cdot \frac{-p(a)}{(z-a)^{p(a)+1}} \qquad (z \in U \setminus \{a\})$$

folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{p(a)}{z-a} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,,$$

d.h. f'/f hat wieder einen Pol 1. Ordnung an a mit

$$\operatorname{Res}\Bigl(\frac{f'}{f}, a\Bigr) = -p(a)\,.$$

3. Ist γ ein geschlossener Pfad in $G \setminus (Z(f) \cup P(f))$, so gilt nach S. 6.9 und 1. und 2. (man beachte: $Z(f) \cup P(f)$ hat keine Häufungspunkte in G)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in Z(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot n(w) - \sum_{w \in P(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot p(w)\,. \qquad \square$$

Bemerkung und Definition 7.8 Für geschlossene Pfade γ mit $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$ (wir nennen solche Pfade *einfach geschlossen*) ergibt sich unter den Voraussetzungen von S. 7.7

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in Z(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} n(w) - \sum_{w \in P(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} p(w)\,. \tag{7.3}$$

d.h. das Integral auf der linken Seite gibt die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Polstellen von f in $\operatorname{Int}(\gamma)$ (inkl. Vielfachheiten) an.
Ist unter den Voraussetzungen von S. 7.7 zusätzlich f holomorph in G (m. a. W. $P(f) = \emptyset$) und ist γ ein einfach geschlossener Pfad in $G \setminus Z(f)$, so erhalten wir aus (7.3)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in Z(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} n(w)\,. \tag{7.4}$$

d.h. das Integral auf der linken Seite „zählt“ die Nullstellen von f in $\mathrm{Int}(\gamma)$ (inkl. Vielfachheiten).

Als Folgerung aus dem Argument-Prinzip (bzw. (7.4)) erhalten wir

Satz 7.9 *(Rouché)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es seien $f, g \in H(G)$. Ferner sei γ ein einfach geschlossener Pfad in G so, dass

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \textit{für alle } z \in \gamma^* .$$

Dann haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\mathrm{Int}(\gamma)$ (incl. Vielfachheiten), d. h.

$$\sum_{w \in Z(f) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_f(w) = \sum_{w \in Z(g) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_g(w) .$$

Beweis. Für $t \in [0,1]$ betrachten wir die Funktionen $\varphi_t \in H(G)$ mit

$$\varphi_t := f + t(g - f) = f - th$$

mit $h := f - g$. Für $z \in \gamma^*$ gilt

$$|\varphi_t(z)| \geq |f(z)| - t|h(z)| \geq |f(z)| - |h(z)| > 0 ,$$

so dass φ_t auf γ^* keine Nullstellen hat. Nach (7.4) gilt für $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi_t'(z)}{\varphi_t(z)} dz \;=\; \sum_{w \in Z(\varphi_t) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_{\varphi_t}(w) \;=:\; N(t) .$$

Die Funktion $N : [0,1] \to \mathbb{N}_0$ ist stetig.
(Denn: Sind $t_1, t_2 \in [0,1]$, so gilt

$$\big|2\pi i \big(N(t_2) - N(t_1)\big)\big| = \Big| \int_\gamma \frac{(t_2 - t_1)(f'h - fh')}{(f - t_1 h)(f - t_2 h)} \Big| \leq |t_2 - t_1| \Big\| \frac{fh' - f'h}{(|f| - |h|)^2} \Big\|_{\infty, \gamma^*} L(\gamma) .$$

Dies zeigt die (Lipschitz-)Stetigkeit von N.)
Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, ist $N(t) \equiv \mathrm{const}$ auf $[0,1]$, also insbesondere

$$\sum_{w \in Z(g) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_g(w) \;= N(1) = N(0) = \sum_{w \in Z(f) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_f(w) .$$

$\square$

Wir geben einige typische Anwendungsbeispiele zum Satz von Rouché.

Beispiel 7.10 1. Wir beweisen noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra. Also: Es sei $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{w \in Z(P)} n(w) = n$, d.h. P hat n Nullstellen inkl. Vielfachheiten.
(Denn: Ist $Q(z) := a_n z^n$, so gilt für R genügend groß

$$|P(z) - Q(z)| \;=\; \Big|\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu\Big| \;<\; |a_n z^n| \;=\; |Q(z)| \qquad (|z| = R)\,.$$

Also ergibt sich aus S. 7.9 (mit $\gamma(t) = Re^{it}$)

$$\sum_{w \in Z(P) \cap U_R(0)} n_P(w) \;=\; \sum_{w \in Z(Q) \cap U_R(0)} n_Q(w) \;=\; n_Q(0) = n\,.)$$

2. Wir betrachten die (transzendente) Gleichung

$$e^z \;=\; 1 + 2z\,.$$

Wir suchen alle Lösungen in $\mathbb{D}$. Offensichtlich ist $z = 0$ eine Lösung. Mit $f(z) = 2z$ und $g(z) = 1 + 2z - e^z$ gilt für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| \;=\; |e^z - 1| \;<\; 2 = |f(z)|$$

(beachte: für $|z| \le 1$ gilt

$$|e^z - 1| \;\le\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \;=\; e^{|z|} - 1 \;\le\; e - 1 < 2\,)\,.$$

Also haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{D}$, nämlich eine. Folglich ist $z = 0$ die einzige Lösung der Gleichung in $\mathbb{D}$.

Wir studieren zum Abschluss einige Auswirkungen des Satzes von Rouché auf Funktionenfolgen.

Satz 7.11 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es seien $f_n \in H(G)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G. Ist γ ein einfach geschlossener Pfad in G und ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \gamma^*$, so haben f und f_n für n genügend groß die gleiche Anzahl von Nullstellen (inkl. Vielfachheiten) in* $\mathrm{Int}(\gamma)$.

Beweis. Da f stetig auf γ^* ist, gilt

$$\delta := \min_{z \in \gamma^*} |f(z)| > 0\,.$$

Da $\gamma^* \subset G$ kompakt ist, existiert ein $N = N(\delta) > 0$ so, dass

$$\max_{z \in \gamma^*} |f(z) - f_n(z)| < \delta$$

für alle $n \ge N$ gilt. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Rouché (S. 7.9). $\square$

Beispiel 7.12 Es sei

$$f(z) = e^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$$

Dann gilt für die n-ten Teilsummen $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z^\nu/\nu!$ nach S. 7.11, angewandt mit $\gamma(t) = Re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$: Für alle $R > 0$ existiert ein $N = N(R)$ so, dass s_n für alle $n \geq N$ in $|z| < R$ keine Nullstelle hat (d.h. die Nullstellen, die nach dem Fundamentalsatz der Algebra ja existieren, rücken mit wachsendem n immer weiter „Richtung ∞“).

Als Folgerung aus S. 7.11 erhalten wir insbesondere

Satz 7.13 *(Hurwitz)*
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G und $Z(f_n) = \emptyset$ für ∞ viele n, so ist entweder $f \equiv 0$ in G oder es ist $Z(f) = \emptyset$.

Beweis. Es sei $f \not\equiv 0$ in G. Angenommen, f habe eine Nullstelle z_0, etwa der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Ist $r > 0$ so, dass $f(z) \neq 0$ in $\overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ gilt, so folgt aus S. 7.11 (angewandt auf $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$), dass f_n für n genügend groß in $U_r(z_0)$ ebenfalls m Nullstellen hat. Widerspruch! $\square$

8 Harmonische Funktionen und Dirichlet Problem

Ist $f \in C^1(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen ist, so wisssen wir bereits, dass f genau dann holomorph in Ω ist, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

gilt, also genau dann, wenn f die homogene partielle Differenzialgleichung $\overline{\partial} f = 0$ mit

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2i}\big(i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\big) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)$$

löst. Wir betrachten jetzt Lösungen einer anderen homogenen partiellen Differenzialgleichung, der sog. Laplace-Gleichung.

Definition 8.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Eine Funktion $f \in C^2(\Omega, \mathbb{K})$ heißt *harmonisch*, falls

$$\Delta f := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 f \equiv 0 \text{ auf } \Omega$$

gilt. Wir setzen

$$\mathrm{Har}(\Omega) := \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ harmonisch}\}.$$

Wir werden uns im Folgenden auf den Fall $d = 2$ (also $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) beschränken. Hier gibt es enge Verbindungen zu holomorphen Funktionen:

Bemerkung 8.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gilt

1. $H(\Omega) \subset \mathrm{Har}(\Omega)$.
2. Ist $f \in \mathrm{Har}(\Omega)$, so ist
$$\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y} \in H(\Omega).$$
3. Ist $f = u + iv$ mit $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, so sind äquivalent
   a) $f \in \mathrm{Har}(\Omega)$,
   b) $\overline{f} \in \mathrm{Har}(\Omega)$,
   c) $u, v \in \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{R})$.

   Dies zeigt, dass man sich (anders als im Falle holomorpher Funktionen) im Wesentlichen auf die Untersuchung reellwertiger harmonischer Funktionen beschränken kann.

(Denn:
1. Ist f holomorph in Ω, so gilt nach S. 1.19

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x} = if' \text{ auf } \Omega.$$

Da auch f' holomorph ist, erhält man wieder mit S. 1.19

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\,(if') = -\,\frac{\partial f'}{\partial x} = -\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

2. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C^1(\Omega)$ und

$$i\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = i\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -i\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y} \in H(\Omega)$ nach S. 1.19.
3. [Ü].)

Als Folgerung erhalten wir

Satz 8.3 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $u \in \mathrm{Har}(G, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:*

a) $u = \mathrm{Re} f$ *für ein* $f \in H(G)$.

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$ *hat eine Stammfunktion in* G.

In diesem Fall ist f aus a) eine Stammfunktion.

Beweis. Zunächst gilt für beliebiges $f \in H(G)$

$$\frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial x} = \mathrm{Re}\,\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{Re} f'$$

und

$$\frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial y} = \mathrm{Re}\,\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{Re}(if') = -\mathrm{Im}(f').$$

a) $\Rightarrow$ b): Ist $u = \mathrm{Re} f$, so folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{Re} f' + i\,\mathrm{Im} f' = f'.$$

b) $\Rightarrow$ a): Ist f eine Stammfunktion zu $\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$ auf G (ohne Einschränkung so, dass $\mathrm{Re} f(z_0) = u(z_0)$ für ein $z_0 \in G$), so gilt

$$\mathrm{Re} f' + i\,\mathrm{Im} f' = f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

also

$$\frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

und damit ist (siehe Analysis) $u - \mathrm{Re} f \equiv \mathrm{const} = u(z_0) - \mathrm{Re} f(z_0) = 0.$ □

Bemerkung 8.4 1. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, so hat $\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \in H(G)$ nach S. 3.1 eine Stammfunktion, also ist $u = \mathrm{Re} f$ für ein $f \in H(G)$.
2. Im Allgemeinen ist nicht jede Funktion $u \in \mathrm{Har}(G, \mathbb{R})$ von der Form $u = \mathrm{Re} f$ für ein $f \in H(G)$. Ist etwa $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $u : G \to \mathbb{R}$ mit

$$u(z) := \ln |z| \qquad (z \neq 0)$$

harmonisch in G mit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0).$$

Bekanntlich hat $z \mapsto 1/z$ keine Stammfunktion in G, und damit existiert kein $f \in H(G)$ mit $u = \mathrm{Re} f$.

Satz 8.5 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $f \in \mathrm{Har}(G)$.*

1. *(Mittelwert-Formel)*

   Ist $z_0 \in G$, so gilt für alle $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt. \tag{8.1}$$

2. *(Identitätssatz)*

   Ist $g \in \mathrm{Har}(G)$ und gilt $f_{|U} = g_{|U}$ für eine offene Menge $U \subset G$, so ist $f = g$.

Beweis.
1. Es sei $u = \mathrm{Re} f$, und es sei $z_0 \in G$. Da $U_\rho(z_0)$ mit $\rho := \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$ sternförmig ist, existiert eine Funktion $h \in H\big(U_\rho(z_0)\big)$ mit $u = \mathrm{Re}\, h$ auf $U_\rho(z_0)$ (B. 8.4). Also ergibt sich nach der Mittelwert-Formel (1.1) für $0 < r < \rho$

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\big(h(z_0)\big) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{it})dt\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, h(z_0 + re^{it})dt.$$

Eine entsprechende Argumentation gilt für $\mathrm{Im} f$. Zusammensetzen liefert dann die Behauptung für f.
2. Ohne Einschränkung sei $g \equiv 0$ (ansonsten betrachte man $\tilde{f} = f - g$).
Wieder sei $u := \mathrm{Re} f$. Dann ist nach B. 8.2.3

$$h := \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \in H(G).$$

Da U offen ist, folgt aus $f_{|U} = 0$ auch $h_{|U} = 0$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ist $h \equiv 0$ auf G, also ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{auf } G$$

und damit (siehe Analysis) $u \equiv \text{const}$ auf G. Aus $u(z) = 0$ auf U folgt $u \equiv 0$.
Entsprechendes gilt wieder für $\mathrm{Im} f$. □

Bemerkung 8.6 Für analytische – und damit für holomorphe – Funktionen gilt bekanntlich eine stärkere Version des Identitätssatzes (S. 1.7). Ein entsprechendes Resultat ist im Allgemeinen nicht gültig für harmonische Funktionen. So gilt etwa für $u, v \in \mathrm{Har}(\mathbb{C})$ mit

$$u(z) = \mathrm{Re}\, z, \qquad v(z) \equiv 0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

zwar für $u(z) = v(z)$ für $z \in i\mathbb{R}$, aber $u \not\equiv v$.

Satz 8.7 *(Maximum-Prinzip)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt:

1. *Ist $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch und hat u ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, so ist $u \equiv \text{const}$.*
2. *Ist G beschränkt und ist $u \in C(\overline{G}, \mathbb{R})$ harmonisch in G, so existieren $\zeta^*, \zeta_* \in \partial G$ mit*

$$u(\zeta^*) = \max_{z \in \overline{G}} u(z) \quad \textit{und} \quad u(\zeta_*) = \min_{z \in \overline{G}} u(z)\ .$$

Beweis.
1. Wie im Beweis zu S. 2.8 sieht man unter Verwendung der Mittelwert-Formel (8.1): Hat u ein lokales Maximum an $z_0 \in G$, so gilt $u(z) = u(z_0)$ auf $U_r(z_0)$ für ein $r > 0$. Nach S. 8.5.2 ist dann $u(z) \equiv u(z_0)$ auf G.
Da mit u auch $-u$ harmonisch ist, gilt dies auch im Falle der Existenz eines lokalen Minimums.
2. Wie Beweis zu S. 2.9. □

Bemerkung 8.8 Ist G sei beschränktes Gebiet und ist $f \in C(\overline{G})$ harmonisch in G, so folgt aus $f_{|\partial G} = 0$ schon $f \equiv 0$.
(Denn: Ist $u := \mathrm{Re}\, f$, so ist $u = 0$ auf ∂G. Damit ist nach S. 8.7.2 auch $u = 0$ auf G Entsprechendes gilt für $\mathrm{Im}\, f$.)

Eine der zentralen Fragestellungen ist die nach der „harmonischen Fortsetzbarkeit“ stetiger Funktionen.

Definition 8.9 Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, und es sei $\varphi : \partial G \to \mathbb{K}$ stetig. Unter dem Dirichlet-Problem $D(G, \varphi)$ versteht man die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Funktionen $f \in C(\overline{G})$ mit

$$\Delta f = 0 \quad \text{auf } G$$

und

$$f_{|\partial G} = \varphi$$

(also f harmonisch in G mit Randwerten φ).

Wir betrachten wieder nur den Fall $d = 2$. Die Frage der Eindeutigkeit lässt sich – jedenfalls für beschränkte Gebiete – leicht klären.

Satz 8.10 *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, so existiert für alle $\varphi \in C(\partial G)$ höchstens eine Lösung von $D(G, \varphi)$.*

Beweis. Es seien f_1, f_2 Lösungen. Dann ist $f_1 - f_2 \in C(\overline{G})$ mit $f_1 - f_2 \in \mathrm{Har}(G)$ sowie $(f_1 - f_2)_{|\partial G} = 0$. Also ist $f_1 - f_2 \equiv 0$ auf G nach B. 8.8. □

Bei der Suche nach Lösungen werden wir (aus Zeitgründen) sehr bescheiden. Wir betrachten speziell den Fall $G = \mathbb{D}$. Wie könnte eine Lösung aussehen?
Wir betrachten eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in $\mathbb{K}$ mit

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq 1 \quad \text{und} \quad \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \leq 1 \,.$$

Dann haben die beiden Potenzreihen

$$\Phi^+(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

und

$$\Phi^-(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{a_{-\nu}}\, z^\nu$$

Konvergenzradius ≥ 1, d.h. es gilt $\Phi^+, \Phi^- \in H(\mathbb{D})$. Setzt man

$$\Phi := \Phi^+ + \overline{\Phi^-},$$

so ist $\Phi \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$ nach B. 8.2, und es gilt

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \overline{z}^\nu \qquad (z \in \mathbb{D})$$

mit gleichmäßiger Konvergenz der Reihen auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$.
Konvergiert die Reihe

$$\varphi(w) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \overline{w}^\nu$$

für gewisse $w \in S = \partial\mathbb{D}$, so kann man zumindest die Hoffnung hegen, dass für solche w gilt

$$\Phi(z) \to \varphi(w) \qquad (z \to w).$$

Dies wollen wir genauer untersuchen.

Bemerkung und Definition 8.11 1. Wir setzen

$$R(S) := R(S, \mathbb{K}) := \big\{\varphi : S \to \mathbb{K} : t \mapsto \varphi(e^{it}) \in R[-\pi, \pi]\big\}$$

und betrachten – etwas allgemeiner als früher – für $\varphi \in R(S)$ die Fourier-Koeffizienten

$$\hat{\varphi}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \varphi(\zeta)\overline{\zeta}^\nu |d\zeta| := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it}) e^{-i\nu t} dt.$$

Es gilt dabei

$$\big|\hat{\varphi}(\nu)\big| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|\varphi(e^{it})\big| dt \qquad (\nu \in \mathbb{Z}),$$

d.h. die Folge $\big(\hat{\varphi}(\nu)\big)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ ist beschränkt.
2. Es seien $f \in C(\mathbb{D})$ und $g \in R(S)$. Dann setzen wir

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_S f(z\overline{\zeta}) g(\zeta) |d\zeta| \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

(Man beachte: Für $z \in \mathbb{D}$ fest ist

$$t \mapsto f(ze^{-it}) g(e^{it}) \in R[-\pi, \pi],$$

also existiert das Integral.)
Weiter betrachten wir $P : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^\nu.$$

Dann ist $P \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$ (nach der Vorbemerkung mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$), und es gilt für $\varphi \in R(S)$ und für $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}(P * \varphi)(z) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \overline{\zeta}^\nu\right) \varphi(\zeta) |d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^\nu \zeta^\nu\right) \varphi(\zeta) |d\zeta| \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \hat{\varphi}(\nu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^\nu \hat{\varphi}(-\nu)\end{aligned} \tag{8.2}$$

(da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \overline{\zeta}^\nu$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^\nu \zeta^\nu$ gleichmäßig auf S konvergieren.)
Wie in der Vorbemerkung gesehen ist damit auch $P * \varphi \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$.

Satz 8.12 *Es sei $\varphi \in R(S)$. Ist φ stetig an $w \in S$, so ist*

$$\lim_{z\to w}(P*\varphi)(z) = \varphi(w).$$

Insbesondere ist im Falle $\varphi \in C(S)$ die Funktion $P*\varphi$ Lösung des Dirichlet-Problems $D(\mathbb{D},\varphi)$.

Beweis.
1. Es gilt zunächst

(i) $P(z) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \qquad (z \in \mathbb{D})$,

(ii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_S P(z\overline{\zeta})|d\zeta| = 1 \qquad (z \in \mathbb{D})$,

(iii) Für alle $w \in S$ und $\delta > 0$ gilt $\displaystyle\lim_{z\to w}\sup_{|\zeta-w|\geq\delta} P(z\overline{\zeta}) = 0$.

Zu (i): Für $z \in \mathbb{D}$ ist

$$P(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1-\overline{z}+\overline{z}(1-z)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0.$$

Zu (ii): Es gilt mit $\varphi(z) \equiv 1$ und (8.2) (da $\hat{\varphi}(\nu) = \delta_{0,\nu}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})|d\zeta| = (P*\varphi)(z) \equiv 1.$$

Zu (iii): Ist $|z-w| < \delta/2$, so folgt für alle ζ mit $|\zeta - w| \geq \delta$

$$P(z\overline{\zeta}) = \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} \leq \frac{1-|z|^2}{(|\zeta-w|-|w-z|)^2} \leq \frac{1-|z|^2}{\delta^2/4}$$

und damit

$$(0 \leq) \sup_{|\zeta-w|\geq\delta} P(z\overline{\zeta}) \leq \frac{1-|z|^2}{\delta^2/4} \to 0 \qquad (z \to w)\ .$$

2. Es sei nun φ stetig an w, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(w)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \zeta \in S \text{ mit } |\zeta - w| < \delta.$$

Für $z \in \mathbb{D}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\big|(P*\varphi)(z) - \varphi(w)\big| &\overset{\text{(ii)}}{=} \Big|\frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})\big(\varphi(\zeta)-\varphi(w)\big)|d\zeta|\Big| \\ &\overset{\text{(i)}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})\big|\varphi(\zeta)-\varphi(w)\big||d\zeta|.\end{aligned}$$

Dabei ist für $\lambda \in \mathbb{D}$
$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - w| < \delta} P(z\overline{\zeta}) \underbrace{\left|\varphi(\zeta) - \varphi(w)\right|}_{<\varepsilon} |d\zeta| < \varepsilon.$$
Außerdem existiert nach (iii) ein $\delta' > 0$ mit
$$\sup_{|\zeta - w| \geq \delta} P(z\overline{\zeta}) < \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \text{ mit } |z - w| < \delta'.$$
Also gilt für $|z - w| < \delta'$
$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - w| \geq \delta} \underbrace{P(z\overline{\zeta})}_{<\varepsilon} \underbrace{\left|\varphi(\zeta) - \varphi(w)\right|}_{\leq 2\|\varphi\|_{\infty,S}} |d\zeta| \leq 2\varepsilon \cdot \|\varphi\|_{\infty,S}.$$
Insgesamt ist damit für $z \in \mathbb{D}$ mit $|z - w| < \delta'$
$$|(P * \varphi)(z) - \varphi(w)| \leq \varepsilon(1 + 2\|\varphi\|_{\infty,S}) \ .$$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 8.13 1. Ist $z = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{D}$ und $\zeta = e^{it}$, so ist
$$\begin{aligned} P(z\overline{\zeta}) &= \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} = \frac{1 - \rho^2}{|1 - \rho e^{i(\vartheta - t)}|^2} = \\ &= \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\vartheta - t) + \rho^2} =: \tilde{P}(\rho, \vartheta - t), \end{aligned}$$
wobei
$$\tilde{P}(\rho, s) := \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(s) + \rho^2}$$
als Poisson-Kern bezeichnet wird (vgl. B. 7.6).
2. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Ist $h : G \to \mathbb{D}$ holomorph und bijektiv und so, dass h zu einer stetigen und bijektiven Funktion von $\overline{G}$ nach $\overline{\mathbb{D}}$ forgesetzt werden kann, so ist für $\varphi \in C(\partial G)$ mit $\psi := \varphi \circ (h^{-1}_{|S})$
$$(P * \psi) \circ h$$
die Lösung des Dirichlet-Problems $D(G, \varphi)$.
(Denn: ψ ist stetig auf S. Nach S. 8.12 ist $P \circ \psi$ Lösung von $D(\mathbb{D}, \psi)$. Da h holomorph in G ist, ist $(P * \psi) \circ h$ harmonisch in G ([Ü]). Außerdem gilt
$$(P * \psi)\big(h(z)\big) \to \psi\big(h(w)\big) = \varphi(w) \qquad (z \to w)$$
für alle $w \in \partial G$, da h stetig auf $\overline{G}$ ist.)

Ist speziell $G = U_r(z_0)$ für $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$, so hat h mit

$$h(z) = \frac{z - z_0}{r} \qquad (z \in \overline{U_r(z_0)})$$

offenbar obige Eigenschaften. Ist also $\varphi \in C\big(K_r(z_0)\big)$, so ist durch

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S P\Big(\frac{z - z_0}{r}\,\overline{\zeta}\Big)\,\varphi(z_0 + r\zeta)|d\zeta| \qquad \big(z \in U_r(z_0)\big)$$

die Lösung von $D\big(U_r(z_0), \varphi\big)$ gegeben.
3. Ist f stetig auf $\overline{U_r(z_0)}$ und harmonisch in $U_r(z_0)$, so gilt nach 2.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S P\Big(\frac{z - z_0}{r}\,\overline{\zeta}\Big) f(z_0 + r\zeta)|d\zeta| \qquad \big(z \in U_r(z_0)\big) \tag{8.3}$$

da beide Seiten Lösungen von $D\big(U_r(z_0), f_{|K_r(z_0)}\big)$ sind. Die Darstellung (8.3) heißt Poisson-Integralformel für f.
Wie im Beweis zu S. 2.15 ergibt sich damit auch: Ist (f_n) eine Folge in $\mathrm{Har}(\Omega)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so ist auch $f \in \mathrm{Har}(\Omega)$. ([Ü])

A Zusammenhängende Mengen

Definition A.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. X heißt *unzusammenhängend*, falls offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit

$$X = U \cup V,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset\,.$$

   Anderenfalls heist X *zusammenhängend*.

2. $M \subset X$ heißt *unzusammenhängend*, falls $(M, d_{|M\times M})$ unzusammenhängend ist (d. h. falls offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$, $U \cap V \cap M = \emptyset$). Anderenfalls heißt M *zusammenhängend*.

Beispiel A.2 Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.
1. Wir betrachten $M = [0, 1] \cup [2, 3]$. Dann gilt für die offenen Mengen $U = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), V = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$:

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
2. Ist $M = \mathbb{Q}$, so gilt für die offenen Mengen $U = (-\infty, \sqrt{2}), V = (\sqrt{2}, \infty)$:

$$\mathbb{Q} \subset U \cup V, \quad U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset, \quad V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap \mathbb{Q} = \emptyset\,,$$

also ist auch $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend.
3. Für alle $a < b$ ist $M = [a, b]$ zusammenhängend.
(Denn: Es seien U und V in $([a, b], d_{|\cdot|})$ offene Mengen mit

$$[a, b] = U \cup V, \quad U \neq \emptyset, \quad V \neq \emptyset\,.$$

Dann sind $U = [a, b] \setminus V$ und $V = [a, b] \setminus U$ auch abgeschlossen (in $[a, b]$, aber damit auch in $\mathbb{R}$). Also gilt

$$\xi := \sup U \in U, \quad \eta := \sup V \in V\,.$$

Da U, V offen in $([a, b], d_{|\cdot|})$ sind, muss $\xi = \eta = b$ gelten. Also ist $b \in U \cap V$.)

Bemerkung A.3 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Aus obiger Definition ergibt sich leicht
1. Die einpunktigen Mengen sind zusammenhängend.
2. X ist zusammenhängend genau dann, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen sind, die offen und abgeschlossen sind.
3. Sind M_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\bigcup\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.
(Denn: Wir setzen $M := \bigcup M_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $M \subset U \cup V$, $M \cap U \neq \emptyset$ und $M \cap V \neq \emptyset$. Ist $x \in \bigcap M_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. O. E. sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $M_\alpha \cap V \neq \emptyset$. Aus $x \in M_\alpha \cap U$ folgt auch $M_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Da M_α zusammenhängend ist, folgt $M_\alpha \cap U \cap V \neq \emptyset$. Damit ist auch $M \cap U \cap V \neq \emptyset$.)

In $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ gilt

Satz A.4 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (ggfs. einpunktiges) Intervall ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < b < c$ und $a, c \in M, b \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, b), V := (b, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
„$\Leftarrow$“ Es sei M ein Intervall. Ist $x_0 \in M$, so gilt

$$M = \bigcup_{x \in M} I[x, x_0]\,.$$

Also ist M nach B. A.2.3 und A.3.3 zusammenhängend.

□

Der folgende Satz zeigt, dass der Zusammenhang einer Menge sich unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz A.5 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist auch $f(M) \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir können uns beim Beweis auf den Fall $M = X$ und $Y = f(M)$ beschränken. Angenommen, Y ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen V_1, $V_2 \subset M$ mit

$$Y = V_1 \cup V_2 \quad V_1 \neq \emptyset,\ V_2 \neq \emptyset, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset\,.$$

Da $f : X \to Y$ stetig ist, sind

$$U_1 = f^{-1}(V_1) \qquad U_2 = f^{-1}(V_2)$$

offen (in (X, d)). Es gilt dafür

$$U_1 \neq \emptyset, \quad U_2 \neq \emptyset, \quad U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

und

$$U_1 \cup U_2 = f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(Y) = X\,,$$

also ist X unzusammenhängend. Widerspruch! □

Als Konsequenz aus S. A.4 und S. A.5 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz A.6 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Beweis. Nach S. A.5 ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, also ein Intervall nach S. A.4. $\square$

Bemerkung und Definition A.7 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$. Für $x \in M$ heißt

$$Z_M(x) := \bigcup \{A \subset M : x \in A, A \text{ zusammenhängend}\}$$

(*Zusammenhangs-)Komponente* von M (bezüglich x). Nach B. A.3.3 ist $Z_M(x)$ zusammenhängend. Zudem gilt ([Ü]) für $x, y \in M$ entweder $Z_M(x) = Z_M(y)$ oder $Z_M(x) \cap Z_M(y) = \emptyset$ (also ist $\{Z_M(x) : x \in M\}$ eine Zerlegung von M).

Definition A.8 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
1. Ist $\gamma : [a, b] \to X$ stetig, so heißt γ ein *Weg* (in X). Der Punkt $\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* des Weges und $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* des Weges. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt der Weg *geschlossen*. Ferner heißt γ ein *Jordanweg*, falls $\gamma_{[a,b)}$ injektiv ist. Schließlich nennt man $\gamma^* := \gamma([a, b])$ die *Spur* von γ.
2. Eine Menge $M \subset X$ heißt *wegzusammenhängend*, falls zu allen Punkten $x, y \in X$ ein Weg $\gamma : [a, b] \to M$ existiert mit Anfangspunjkt x und Endpunkt y.

Satz A.9 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $M \subset X$ wegzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $x_0 \in M$ fest. Dann existiert zu jedem $x \in M$ ein Weg $\gamma_x : [a, b] \to M$ mit $\gamma_x(a) = x_0$ und $\gamma_x(b) = x$. Damit ist $M = \bigcup_{x \in M} \gamma_x^*$. Nach S. A.5 und B. A.2.3 ist γ_x^* zusammenängend. Da $x_0 \in \bigcap_{x \in M} \gamma_x^*$ gilt, ist M nach B. A.3.3 zusammenhängend. $\square$

Bemerkung und Definition A.10 Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^d$ heißt *sternförmig* (bzgl. x_0), falls $I[x, x_0] \subset M$ für alle $x \in M$ gilt, d.h. falls $M = \bigcup_{x \in M} I[x, x_0]$ (hierbei ist $I[x, x_0] = \gamma^*$, wobei $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$ für $t \in [0, 1]$). Insbesondere sind konvexe Mengen sternförmig. Nach S. A.9 ist jede sternförmige Menge (weg-)zusammenhängend.

Bemerkung und Definition A.11 1. Eine Menge $G \subset \mathbb{K}^d$ heißt *Gebiet*, falls G offen, nichtleer und zusammenhängend ist.

2. Ist $\Omega \subset \mathbb{K}^d$ offen, ist $Z_\Omega(x)$ offen für alle $x \in \Omega$ ([Ü]). Also ist jede Komponente von Ω offen (und damit ein Gebiet). Außerdem hat Ω höchstens abzählbar viele Komponenten ([Ü]).
3. Ist G ein Gebiet, so ist G auch wegzusammenhängend.
(Denn: Es seien $x_0 \in G$ fest und A die Menge aller $x \in G$ so, dass ein Weg γ_x in G existiert mit Endpunkt x und Anfangspunkt x_0.
Ist $x \in A$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset G$. Ist $y \in U_\delta(x)$, so läßt sich γ_x durch Anhängen einer Strecke zu einem Weg in G mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt y fortsetzen. Also ist A offen in G. Die gleiche Überlegung liefert auch die (Folgen-)Abgeschlossenheit von A in G. Da $A \neq \emptyset$ ist (beachte: $x_0 \in A$), folgt $A = G$ nach B. A.3.2.)