Jürgen Müller

Funktionentheorie

Skriptum zur den Vorlesungen
Sommersemester 2011 und Sommersemester 2012
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Dank an Elke Gawronski für die Mithilfe bei der Erstellung

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische Funktionen und Cauchysche Integralformel

Bemerkung und Definition 1.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *analytisch* an der Stelle $z_0 \in \Omega$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (a_ν) so existieren, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))$$

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar an z_0 und es gilt

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$$

(siehe Analysis). Weiter heißt f *analytisch in* Ω, falls f analytisch an jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ ist.

Beispiel 1.2 1. exp, sin und cos sind analytisch in $\mathbb{C}$.
2. Wir betrachten für festes $a \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{a - z} .$$

Hier ist für alle $z_0 \neq a$ und alle z mit $|z - z_0| < |a - z_0|$

$$f(z) = \frac{1}{a - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{a - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{a - z_0}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(a - z_0)^{\nu+1}} (z - z_0)^\nu .$$

Damit ist f analytisch $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Bemerkung und Definition 1.3 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch an der Stelle $z_0 \in \Omega$. Dann heißt z_0 *Nullstelle der Ordnung* $m \in \mathbb{N}$ von f (oder m*-fache Nullstelle*), falls $f^{(j)}(z_0) = 0$ für $j = 0, \ldots, m - 1$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ gilt.
In diesem Fall existiert eine Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$, die analytisch an z_0 ist mit $g(z_0) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \qquad (z \in \Omega) .$$

(Denn: Es sei

$$f(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

für $z \in U_R(z_0)$. Wir setzen

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^{-m} f(z) & \text{für } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ a_m & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Dann gilt $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in \Omega$ und

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m+\nu}(z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)) \, ,$$

also g analytisch an z_0. Außerdem ist $g(z_0) = a_m \neq 0$.)
Hieraus folgt insbesondere, dass ein $r > 0$ so existiert, das $f(z) \neq 0$ für alle z mit $0 < |z - z_0| < r$.

Bemerkung 1.4 Ein entsprechendes Ergebnis gilt i. A. nicht für differenzierbare Funktionen! Ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad ,$$

so ist f (stetig) differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und in jeder Umgebung von 0 gibt es unendlich viele Nullstellen. Noch etwas dramatischer ist die Situation etwa für

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad ,$$

Dann ist f ebenfalls stetig differenzierbar und in jeder Umgebung von 0 liegen unendlich viele isolierte Nullstellen. Man kann auch Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit entsprechnden Eigenschaften finden.

Bemerkung und Definition 1.5 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt von M*, falls $(U_\delta(x) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$. Man sieht leicht ([Ü]), dass die Menge der Häufungspunkte von M stets abgeschlossen in X ist.

Satz 1.6 *Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Wir setzen*

$$Z(f) := \{z_0 \in G : f(z_0) = 0\} \, .$$

Dann gilt: Entweder ist $Z(f) = G$ (d.h. $f \equiv 0$) oder $Z(f)$ hat keinen Häufungspunkt in G.

Beweis. Es sei $z_0 \in Z(f)$ fest, und es sei $R = R(z_0) > 0$ so, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))$$

(mit $a_\nu = f^{(\nu)}(z_0)/\nu!$) gilt. Nun sind zwei Fälle möglich: Entweder ist $a_\nu = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$, also $f(z) \equiv 0$ auf $U_R(z_0)$, oder es existiert eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq 0$, d. h. f hat eine Nullstelle der Ordnung m. In diesem Fall ist z_0 kein Häufungspunkt von Nullstellen nach B./D. 1.3.

Es sei A die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ im metrischen Raum $(G, d_{|\cdot|})$. Da f stetig auf G ist, gilt $A \subset Z(f)$.
Also: Ist $A \neq \emptyset$ und $z_0 \in A$, so tritt notwendigerweise der erste Fall auf, d.h. $f(z) \equiv 0$ auf einer Umgebung von z_0. Damit ist $z_0 \in A^0$, also A offen. Außerdem ist A auch abgeschlossen (in $(G, d_{|\cdot|})$) als Menge von Häufungspunkten. Da $(G, d_{|\cdot|})$ zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$ und damit auch $Z(f) = G$. Dies war zu zeigen. □

Als Konsequenz erhalten wir unmittelbar folgendes fundamentale Ergebnis.

Satz 1.7 *(Identitätssatz für analytische Funktionen)*
Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Existiert eine Menge M in G mit Häufungspunkt in G und so, dass

$$f(z) = g(z)$$

für alle $z \in M$ gilt, so ist $f \equiv g$ in G.

Beweis. Mit f und g ist offenbar auch $f - g$ analytisch in G. Aus $M \subset Z(f - g)$ ergibt sich die Behauptung sofort aus S. 1.6. □

Der folgende Satz liefert eine Klasse analytischer Funktionen.

Satz 1.8 *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es seien $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{K}$ stückweise stetig. Ferner sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \psi([a, b])$. Wir definieren $f : \Omega \to \mathbb{C}$ durch*

$$f(z) := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{\psi(t) - z}\, dt \qquad (z \in \Omega)\,.$$

Dann ist f analytisch in Ω, und es gilt

$$f^{(k)}(z) = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t) - z)^{k+1}}\, dt \qquad (z \in \Omega,\ k \in \mathbb{N})\,.$$

Beweis. Es sei $z_0 \in \Omega$ und $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(z_0, \psi([a, b]))$ (dann ist $R > 0$, da $\psi([a, b])$ kompakt ist). Aus

$$\left|\frac{z - z_0}{\psi(t) - z_0}\right| \leq \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

für alle $z \in U_R(z_0)$ und alle $t \in [a, b]$ folgt, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\psi(t) - z_0)^{\nu+1}} = \frac{1}{\psi(t) - z}$$

(vgl. B. 1.2) für jedes feste $z \in U_R(z_0)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert (Weierstraßsches Majorantenkriterium). Also erhalten wir mit durch Vertauschung von Summation und Integration

$$f(z) = \int_a^b \varphi(t) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z-z_0)^\nu \cdot \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\, dt\,,$$

d.h. mit

$$a_\nu := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\, dt \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$

gilt für alle $z \in U_R(z_0)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu\,.$$

Folglich ist f analytisch an der Stelle z_0. Außerdem erhalten wir für $z = z_0$

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{k+1}}\, dt \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, folgt die Behauptung □

Bemerkung 1.9 Der Beweis zu S. 1.8 zeigt, dass die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$$

für alle z mit $|z-z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ gilt.

Beispiel 1.10 Es sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-z}\, dt\,.$$

Dann ist f nach S. 1.8 analytisch in Ω und es gilt für $z \in \Omega$

$$f'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\, dt = \frac{i}{e^{it}-z}\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0\,.$$

Also ist $f' \equiv 0$ in Ω.
Da $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ein Gebiet ist, gilt damit $f \equiv f(0) = 2\pi$ in $\mathbb{D}$ ([Ü]).

Definition 1.11 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *holomorph* in Ω, falls f' auf Ω existiert und stetig ist. Wir setzen

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph in } \Omega\}\ .$$

Wir wollen nun zeigen, dass jede holomorphe Funktion schon analytisch ist, also insbesondere beliebig oft differenzierbar - eine Art mathematisches Wunder!
Entscheidend dafür wird die Cauchysche Integralformel sein, die wir nun (in einer ersten Version) herleiten. Wiederum vorbereitend dazu gibt es ein Ergebnis über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen.

Satz 1.12 *Es sei $U \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Ferner sei $\varphi : U \times I \to \mathbb{C}$ so, dass*

1. *$\varphi(z, \cdot)$ für alle $z \in U$ eine Regelfunktion ist,*
2. *$\varphi(\cdot, t)$ für alle $t \in I$ differenzierbar und $\frac{\partial \varphi}{\partial z} : U \times I \to \mathbb{C}$ mit $\frac{\partial \varphi}{\partial z} := \partial_1 \varphi$ stetig ist.*

Dann ist $\Phi : U \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\Phi(z) := \int_a^b \varphi(z, t)\, dt \qquad (z \in U),$$

differenzierbar auf U mit

$$\Phi'(z) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z, t)\, dt \qquad (z \in U).$$

Beweis. Es sei $z_0 \in U$ fest. Wir setzen für $t \in I$

$$h_t(z) := \varphi(z, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z_0, t) \cdot z \qquad (z \in U).$$

Dann ist h_t differenzierbar auf U mit

$$h_t'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z_0, t) \qquad (z \in U).$$

Wir wählen ein $r > 0$ so, dass $M := \overline{U_r(z_0)}$ in U liegt. Da $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ stetig auf $M \times I$ und ferner $M \times I$ kompakt ist, ist $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ gleichmäßig stetig auf $M \times I$.
Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta \in (0, r)$ so, dass

$$|h_t'(z)| < \varepsilon \qquad (|z - z_0| < \delta,\ t \in I).$$

Ist $z \in U$ mit $0 < |z - z_0| < \delta$, so ergibt sich mit $\gamma(s) := z_0 + s(z - z_0)$ für $s \in [0, 1]$ nach dem HDI, Teil 2 (beachte: h_t' ist stetig auf U) und der Kettenregel für alle $t \in I$

$$h_t(z) - h_t(z_0) = \int_0^1 (h_t \circ \gamma)'(s)\, ds = \int_0^1 h_t'(\gamma(s)) ds \cdot (z - z_0).$$

Hieraus folgt für alle $t \in I$

$$|\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)(z-z_0)| =$$

$$= |h_t(z) - h_t(z_0)| \le \int_0^1 \underbrace{|h_t'(\gamma(s))|}_{<\varepsilon} ds \cdot |z-z_0| < \varepsilon|z-z_0|,$$

also

$$|\Phi(z) - \Phi(z_0) - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)\,dt \cdot (z-z_0)|$$

$$\le \int_a^b |\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)(z-z_0)|\,dt \le \varepsilon|z-z_0|(b-a)$$

und damit

$$\Big|\frac{\Phi(z)-\Phi(z_0)}{z-z_0} - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,t)dt\Big| \le \varepsilon(b-a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.13 Es sei $g \in H\big(U_\rho(0) \setminus \{a\}\big)$ für ein $\rho > 1$ und ein $a \in \mathbb{D}$. Ist

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{2\pi} g\big(a + \lambda(e^{it} - a)\big)\,\frac{e^{it}}{e^{it}-a}\,dt \qquad (0 < \lambda \le 1),$$

so ist $\Phi(\lambda) \equiv \text{const}$ auf $(0,1]$.
(Denn: Zunächst ist Φ definiert auf $(0,\lambda_\rho)$ für ein $\lambda_\rho > 1$, und es gilt mit

$$\varphi(\lambda,t) := g\big(a + \lambda(e^{it}-a)\big)\,\frac{e^{it}}{e^{it}-a} \qquad \big((\lambda,t) \in (0,\lambda_\rho) \times [0,2\pi]\big)$$

nach S. 1.12

$$\Phi'(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(\lambda,t)\,dt = \int_0^{2\pi} g'\big(a+\lambda(e^{it}-a)\big)\,e^{it}dt = \frac{1}{i\lambda}\,g\big(z+\lambda(e^{it}-z)\big)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Damit ist $\Phi \equiv \text{const}$ auf $(0,\lambda_\rho)$.)

Satz 1.14 *(Cauchysche Integralformel für Kreise; kurz CIF)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ferner seien $z_0 \in \Omega$ und $0 < R < \operatorname{dist}(z_0,\partial\Omega)$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\frac{Re^{it}}{z_0+Re^{it}-z}\,dt \qquad (z \in U_R(z_0)).$$

Beweis. Wir setzen $\rho := \text{dist}(z_0, \partial\Omega)/R$ und definieren $g \in H\big(U_\rho(0)\big)$ durch

$$g(z) := f(z_0 + Rz) \qquad \big(|z| < \rho\big).$$

Dann gilt nach B. 1.13 mit $a := (z - z_0)/R$ für $z \in U_R(z_0)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\,\frac{Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})\,\frac{e^{it}}{e^{it} - a}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(a + \frac{e^{it} - a}{n}\big)\,\frac{e^{it}}{e^{it} - a}\,dt \to \frac{f(z)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - a}\,dt \overset{B.1.10}{=} f(z) \quad (n \to \infty),$$

da $g\big(a + (e^{it} - a)/n\big) \to g(a) = f(z)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$. □

Bemerkung 1.15 Man beachte: S. 1.14 zeigt insbesondere, dass die Funktionswerte in $U_R(z_0)$ durch die Werte am Rand

$$K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$$

durch Integration berechnet werden können!
Wählt man speziell $z = z_0$, so ergibt sich die wichtige *Mittelwertformel*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})dt\,. \tag{1.1}$$

Also: Der Funktionswert im Kreismittelpunkt ergibt sich als „Integralmittel" der Funktionswerte am Rand des Kreises.

Satz 1.16 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Dann gilt für alle $z_0 \in \Omega$ (mit $\text{dist}(z_0, \emptyset) := \infty$)*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}\,(z - z_0)^\nu \qquad \text{in } |z - z_0| < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)\,.$$

Insbesondere ist f analytisch in Ω.

Beweis. 1. Es seien $z_0 \in \Omega$ und $R < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Mit S. 1.14, S. 1.8 und B. 1.9, angewandt auf

$$[a, b] = [0, 2\pi],\ \psi(t) = z_0 + Re^{it},\ \varphi(t) = f(z_0 + Re^{it})Re^{it}/2\pi)$$

folgt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}\,(z - z_0)^\nu$$

für alle $z \in U_R(z_0)$. Da $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ beliebig war, gilt die Darstellung in $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω. □

Bemerkung 1.17 Aus S. 1.16 ergibt sich insbesondere, dass jede Funktion $f \in H(\Omega)$ beliebig oft differenzierbar auf Ω ist. Außerdem gilt nach S. 1.8 folgende verallgemeinerte Cauchysche Integralformel für die Ableitungen:
Für alle $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) \frac{Re^{it}}{(z_0 + Re^{it} - z)^{k+1}}\, dt \qquad (z \in U_R(z_0))\,.$$

Die obigen Ergebnisse zeigen, dass holomorphe Funktionen sich in drastischer Weise von reell differenzierbaren Funktionen unterscheiden. Wir wollen den Unterschied etwas genauer beleuchten.

Bemerkung 1.18 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}\,(= \mathbb{R}^2)$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ist f (komplex) differenzierbar an der Stelle $z_0 \in \Omega$, so existiert für alle $\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_\zeta f(z_0)$ und es gilt

$$\partial_\zeta f(z_0) = f'(z_0) \cdot \zeta\,. \tag{1.2}$$

(Denn: Jeweils nach Definition gilt

$$\partial_\zeta f(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\zeta) - f(z_0)}{t} = \zeta \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\zeta) - f(z_0)}{\zeta t} = \zeta \cdot f'(z_0).)$$

Also existieren insbesondere $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \partial_i f(z_0)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \partial_1 f(z_0)$, und es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \tag{1.3}$$

(sog. Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung).
Ist umgekehrt f reell differenzierbar an z_0 und gilt (1.3), so ist f auch komplex differenzierbar an z_0 und es gilt $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.
(Denn: Da f reell differenzierbar an z_0 ist, existiert eine Funktion $\varepsilon : \Omega - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(h) \to 0\,(h \to 0)$ und so, dass mit $h = t + is = (t, s)^T$

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= f(z_0) + \operatorname{grad}^T f(z_0) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot (1, i) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) h + |h|\,\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Nach der Zerlegungsformel ist f (komplex) differenzierbar an z_0 mit $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.)

Satz 1.19 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent*

a) f ist holomorph in Ω.

b) $f \in C^1(\Omega)$, und es gilt (1.3) für alle $z_0 \in \Omega$.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b): Ist f holomorph in Ω, so ist f' stetig auf Ω und damit sind nach B. 1.18 auch die partiellen Ableitungen stetig auf Ω (und es gilt (1.3)).

b) $\Rightarrow$ a): Ist $f \in C^1(\Omega)$, so sind die partiellen Ableitungen stetig auf Ω. Dann ist f insbesondere reell differenzierbar auf Ω. Nach B. 1.18 ist f komplex differenzierbar an z_0. Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig auf Ω ist, ist f holomorph. $\square$

Bemerkung 1.20 Definiert man $\overline{\partial} : C^1(\Omega) \to C(\Omega)$ durch

$$\overline{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) ,$$

so zeigt S. 1.19, dass $f \in C^1(\Omega)$ genau dann holomorph ist, wenn $\overline{\partial} f \equiv 0$ ist, mit anderen Worten, $H(\Omega)$ ist der Kern des Operators $\overline{\partial}$.

2 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Eine erste Folgerung aus der CIF ist

Satz 2.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$, und es seien $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Dann ist für $0 \le r < R$*

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k!R}{(R-r)^{k+1}} \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \qquad (k \in \mathbb{N}_0,\ |z - z_0| \le r)$$

und damit insbesondere für $r = 0$

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{R^k} \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

(Cauchysche Ungleichung) .

Beweis. Nach B. 1.17 gilt für $|z - z_0| \le r$ (da $|z_0 + Re^{it} - z| \ge R - |z - z_0| \ge R - r$)

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{it})| \frac{R}{(R-r)^{k+1}}\, dt \le \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \frac{k!}{(R-r)^{k+1}}\,,$$

also die Behauptung. □

Bemerkung und Definition 2.2 Eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f heißt *ganze Funktion*. Ist f ganz, so gilt nach S. 1.16 für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ (da $\operatorname{dist}(z_0, \emptyset) = \infty$)

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$$

Beispiel 2.3 Polynome und exp, sin, cos sind ganz.

Satz 2.4 *(Liouville)*
Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $M > 0$ mit $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Mit der Cauchyschen Ungleichung gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $R > 0$

$$|f^{(k)}(0)| \le \frac{k!}{R^k} M \to 0 \qquad (R \to \infty)\,.$$

Also ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h.

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu = f(0) \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$$

□

Bemerkung 2.5 Ist f ganz und nicht konstant, so existiert eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $|f(z_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.
(Denn: Nach dem Satz von Liouville ist f unbeschränkt. Damit existiert eine Folge (z_n) so, dass $|f(z_n)| \to \infty$. Für diese gilt auch $|z_n| \to \infty$, da ansonsten nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine Teilfolge z_{n_k} mit $z_{n_k} \to z$ existieren würde. Für diese würde dann aber auch $f(z_{n_k}) \to f(z)$ gelten. Dies widerspräche aber $|f(z_n)| \to \infty$.)

Beispiel 2.6 Ist $f(z) = \cos z$, so gilt für $y \in \mathbb{R}$

$$|\cos(iy)| = \cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh(y) \to \infty \qquad (y \to \infty)\,.$$

Bemerkung 2.7 Als kleine Anwendung des Satzes von Liouville ergibt sich ein kurzer Beweis zum Fundamentalsatz der Algebra. Wesentlicher Teil des Beweises war der Nachweis der Tatsache, dass jedes nichtkonstante Polynom P eine Nullstelle besitzt. Wir zeigen noch einmal:
P hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
Denn: Angenommen, nicht, d.h. $1/P$ ist eine ganze Funktion. Dann existiert nach B. 2.5 eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $|1/P(z_n)| \to \infty \, (n \to \infty)$, also $P(z_n) \to 0 \, (n \to \infty)$. Dies widerspricht aber $|P(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$.

Eines der zentralen Themen der reellen Analysis ist die Frage nach Extremstellen von Funktionen (mit Werten in $\mathbb{R}$). Da wir keine Ordnung in $\mathbb{C}$ haben, macht eine solche Fragestellung für komplexwertige Funktionen keinen Sinn. Wir können jedoch nach Extremstellen von $|f|$ suchen.
Bei holomorphen Funktionen bleibt diese meist erfolglos. Es gilt nämlich

Satz 2.8 *(Maximumprinzip; negative Formulierung)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Hat $|f|$ ein lokales Maximum, so ist $f \equiv \mathrm{const}$.

Beweis. Es sei z_0 ein lokales Maximum von $|f|$, d.h. es existiert ein $r > 0$ mit

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{für alle } z \in U_r(z_0)\,.$$

Angenommen, es existiert ein $z_1 \in U_r(z_0)$ mit $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Ist $\rho = |z_1 - z_0|$, so gilt auf Grund der Stetigkeit von $t \mapsto f(z_0 + \rho e^{it})$ auf $[0, 2\pi]$ und $|f(z_0 + \rho e^{it})| \leq |f(z_0)|$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt < |f(z_0)| \, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = |f(z_0)|\,,$$

also mit der Mittelwertformel (1.1)

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt < |f(z_0)|\,.$$

Widerspruch! Damit ist $|f| \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$.
Hieraus folgt, dass auch $f \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$ ist ([Ü]). Nach dem Identitätssatz (S. 1.7) ist damit $f \equiv \text{const}$ auf G. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Satz 2.9 *(Maximumprinzip; positive Formulierung)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und es sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig auf $\overline{G}$ und holomorph in G. Dann existiert ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)| \, .$$

Beweis. Ist $f \equiv \text{const}$, so ist die Behauptung klar.
Es sei $f \not\equiv \text{const}$. Da G beschränkt ist, ist $\overline{G} = G \cup \partial G$ kompakt. Also existiert ein $z_0 \in \overline{G}$ mit $|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|$ (beachte: $|f|$ stetig auf $\overline{G}$). Dabei ist $z_0 \notin G$ nach S. 2.8, also $z_0 \in \partial G$. □

Bemerkung und Definition 2.10 Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Wir setzen

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad (r \geq 0) \, .$$

Dann gilt mit dem Maximumprinzip für alle $r \geq 0$

$$M_f(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$$

und $M_f(r)$ ist (streng) monoton wachsend (gegen ∞ nach dem Satz von Liouville falls f nicht konstant ist).

Beispiel 2.11 Wir betrachten wieder $f(z) = \cos z$. Ist $|z| = r$, so folgt

$$|\cos z| = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu}}{(2\nu)!} \right| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu}}{(2\nu)!} = \cosh(r) = \cos(ir) \, .$$

Also ist $M_f(r) = \cosh(r)$.

Bemerkung 2.12 Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, so gilt natürlich für alle Nullstellen z_0 von f

$$|f(z_0)| = 0 \leq |f(z)| \qquad (z \in G) \, ,$$

d.h. Nullstellen sind Minima von $|f|$. Ist aber $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ (d.h. $Z(f) = \emptyset$), so hat f im Falle $f \not\equiv \text{const}$ auch kein lokales Minimum in G (Minimumprinzip; negative Formulierung).

Außerdem existiert dann im Falle, dass G beschränkt ist, stets ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \min_{z \in \overline{G}} |f(z)|$$

(Minimumprinzip; positive Formulierung).
Beides ergibt sich unmittelbar durch Anwendung obiger Maximumprinzipien auf $1/f$.

Definition 2.13 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sind $f_n, f : X \to Y$, so sagt man, die Folge (f_n) sei *lokal gleichmäßig konvergent gegen f (auf X), falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf U.*

Bemerkung 2.14 Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig konvergent (siehe Analysis).

Wir untersuchen nun Folgen holomorpher Funktionen. Es gilt

Satz 2.15 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es seien $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Ferner gelte $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω. Dann ist auch f holomorph in Ω, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \qquad (n \to \infty)$$

lokal gleichmäßig auf Ω.

Beweis. Ist $z_0 \in \Omega$, so existiert ein $R > 0$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\overline{U_R(z_0)}$. Nach der Cauchyschen Integralformel folgt für $z \in U_R(z_0)$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(z_0 + Re^{it})Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z} \, dt \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z} \, dt \quad (n \to \infty).$$

Damit gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})Re^{it}}{z_0 + Re^{it} - z} \, dt \qquad (z \in U_R(z_0))$$

und folglich ist f analytisch in $U_R(z_0)$ nach S. 1.8 (vgl. Beweis zu 1.16).
Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt weiter für alle festen $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{|z - z_0| \le R/2} |f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| \le \frac{k! 2^{k+1}}{R^k} \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \to 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Also gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf Ω. □

Beispiel 2.16 Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta : G \to \mathbb{C}$ ist für $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ definiert durch

$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z} \qquad \Big(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{e^{z \cdot \ln \nu}} \Big) .$$

Dabei konvergiert die Teilsummenfolge $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^z}$ lokal gleichmäßig auf G ([Ü]). Da die Teilsummen ganze Funktionen sind, ist ζ holomorph in G nach S. 2.15.

3 Stammfunktionen und Cauchyscher Integralsatz

Wir wenden uns nun der Frage nach der Existenz von Stammfunktionen im Komplexen zu.

Satz 3.1 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann existiert eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ (also eine Stammfunktion zu f in G).*

Beweis. Ohne Einschränkung sei G sternförmig bzgl. 0. Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_0^1 z \cdot f(zt)dt \qquad (z \in G).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}(zf(zt)) = f(zt) + zf'(zt)t \qquad (z \in G,\ t \in [0,1]).$$

Da f holomorph in G ist, ist die rechte Seite stetig auf $G \times [0,1]$. Nach S. 1.12 ist F differenzierbar auf G mit

$$\begin{aligned} F'(z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}(zf(zt))\,dt = \int_0^1 f(zt)\,dt + \int_0^1 t \cdot zf'(zt)\,dt \\ &= \int_0^1 f(zt)\,dt + t \cdot f(zt)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(zt)\,dt = f(z). \end{aligned}$$

□

Als erste Anwendung wollen wir uns mit der Frage der Existenz von Logarithmen und allgemeinen Potenzen in $\mathbb{C}$ beschäftigen. Im ersten Teil der Analysis hatten wir die reelle Logarithmusfunktion als Umkehrung der (reellen) Exponentialfunktion definiert. Schon die Tatsache, dass die Exponentialfunktion im Komplexen nicht mehr injektiv ist, deutet an, dass die Situation hier komplizierter wird. Es gilt jedenfalls

Satz 3.2 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$ mit $Z(g) = \emptyset$. Dann gilt*

1. *Ist G sternförmig, so existiert eine Funktion $f \in H(G)$ mit $e^f = g$.*
2. *Sind $f, \tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt $e^{f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}$ für alle $z \in G$ genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit*

$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

Beweis. 1. Da G sternförmig ist, existiert nach S. 3.1 eine Funktion $f \in H(G)$ mit $f' = g'/g$. Dabei kann f so gewählt werden, dass für ein vorgegebenes $z_0 \in G$ und $g(z_0) = r_0 e^{i\varphi_0}$ zusätzlich $f(z_0) = \ln(r_0) + i\varphi_0$ gilt (ggfs. addiere man zu f eine geeignete Konstante). Es folgt

$$(ge^{-f})' = g'e^{-f} + ge^{-f}(-f') \equiv 0 \quad \text{in } G.$$

Also existiert eine Konstante c mit

$$g(z) = ce^{f(z)} \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Aus $e^{f(z_0)} = g(z_0)$ ergibt sich $c = 1$ und damit die Behauptung.
2. Sind $f, \tilde{f} \in C(G)$ mit $e^{\tilde{f}} = e^f$, so gilt

$$e^{\tilde{f}(z)-f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}/e^{f(z)} \equiv 1 \text{ in } G.$$

Damit ist

$$\varphi(z) = \frac{\tilde{f}(z) - f(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

für alle $z \in G$. Da G zusammenhängend und φ stetig auf G ist, ist $\varphi(z) \equiv \text{const}$ auf G nach S. A.6, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

Die Umkehrung ist klar. □

Bemerkung und Definition 3.3 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$ mit $Z(g) = \emptyset$. Jede Funktion $f \in H(G)$ mit $e^f = g$ in G heißt *Zweig des Logarithmus* von g in G. Ist f ein solcher Zweig, so ist auch $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ein Zweig. Nach S. 3.2.2 sind durch diese (abzählbar unendlich vielen) Funktionen alle Zweige gegeben.

Beispiel 3.4 Es sei

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\,.$$

und $g(z) = z$. Dann ist $\mathbb{C}_-$ sternförmig (etwa bzgl. 1). Nach S. 3.2.1 existiert eine in Funktion $f \in H(\mathbb{C}_-)$ mit

$$e^{f(z)} = z \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_-.$$

(also ein Zweig des Logarithmus von z). Dabei kann f mit $f(1) = 0$ gewählt werden.
Ist $z \in \mathbb{C}_-$, so existieren eindeutig bestimmte $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ (Polarkoordinaten) mit $z = re^{i\varphi}$. Die Abbildung $p : \mathbb{C}_- \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ mit

$$p(z) = (r, \varphi) \qquad (z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-)$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ (siehe Analysis). Damit ist auch $\tilde{f} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) = \ln r + i\varphi \qquad (z \in \mathbb{C}_-)$$

stetig. Weiter gilt natürlich auch

$$e^{\tilde{f}(z)} = e^{\ln r + i\varphi} = re^{i\varphi} = z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Da $\tilde{f}(1) = 0 = f(1)$ gilt, ist $f(z) \equiv \tilde{f}(z)$ in $\mathbb{C}_-$. Für $z = r > 0$ haben wir insbesondere $f(r) = \ln r$, d.h. dieser Zweig setzt den „reellen Logarithmus“ ln holomorph auf $\mathbb{C}_-$ fort. Wir nennen f den Hauptzweig des Logarithmus (von z) in $\mathbb{C}_-$ und schreiben dafür auch

$$f(z) =: \log z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Nach S. 3.2.2 sind alle weiteren Zweige von der Form

$$z \mapsto \log z + 2k\pi i = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Wie sieht es mit der Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)$$

für $z, w \in \mathbb{C}_-$ aus?
Ist $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\vartheta}$ mit $\varphi, \vartheta \in (-\pi, \pi)$ und $\varphi + \vartheta \in (-\pi, \pi)$, so ist $zw = r\rho e^{i(\varphi+\vartheta)}$. Es gilt also

$$\log(zw) = \ln(r\rho) + i(\varphi + \vartheta) = \ln r + i\varphi + \ln \rho + i\vartheta = \log z + \log w\,.$$

Ist jedoch etwa $\varphi + \vartheta > \pi$, so ist $zw = r\rho e^{i(\varphi+\vartheta-2\pi)}$, also

$$\log(zw) = \ln(r\rho) + i(\varphi + \vartheta - 2\pi) = \log z + \log w - 2\pi i\,.$$

Es kommt also ein „Korrekturterm“ $2\pi i$ hinzu. Im Falle $\varphi + \vartheta = \pi$ ist $\log(zw)$ nicht einmal definiert.
Die Beispiele zeigen, dass Vorsicht im Umgang mit komplexen Logarithmen angebracht ist!

Wie im Reellen definieren wir allgemein Potenzen mit Hilfe von Logarithmen. Wir beschränken uns dabei auf Potenzen, die unter Verwendung des obigen Hauptzweiges definiert sind.

Definition 3.5 Es sei $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, und es sei $b \in \mathbb{C}$. Wir setzen

$$z^b := e^{b \cdot \log z} \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Ist speziell $b = 1/k$ für ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, so schreiben wir auch $\sqrt[k]{z}$ an Stelle von $z^{1/k}$, und ist $k = 2$, so schreiben wir kurz $\sqrt{z}$. Die Funktion $z \mapsto \sqrt[k]{z}$ heißt *Hauptzweig der k-ten Wurzel* (für $k = 2$ *Hauptzweig der Wurzel*) (von z) in $\mathbb{C}_-$. Ist $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$, so gilt $\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r}e^{i\varphi/k}$ (und damit auch $(\sqrt[k]{z})^k = z$). Für $z = r > 0$ stimmt die neu definierte Wurzel mit der reellen Wurzel überein.
Andere Zweige der k-ten Wurzel erhält man durch Verwendung anderer Zweige des Logarithmus. Außerdem kann man allgemeine Potenzen auch für allgemeinere Funktionen betrachten, für die Logarithmen existieren.

Bemerkung 3.6 Für $z \in \mathbb{C}_-$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^{b_1+b_2} = z^{b_1} z^{b_2} .$$

Weiter ist $z \mapsto z^b$ holomorph in $\mathbb{C}_-$ mit

$$(z^b)' = b \cdot z^{b-1} .$$

Wir wollen nun das lokale Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion etwas genauer beleuchten. Das Maximumprinzip wird sich dabei auch noch einmal als Konsequenz eines allgemeineren Resultats ergeben. Zunächst ergibt sich i.W. aus dem Hauptsatz über Umkehrfunktionen ([Ü]):

Satz 3.7 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ist $z_0 \in \Omega$ mit $f'(z_0) \neq 0$ (d. h. ist z_0 eine einfache Nullstelle von $f - w_0$), so existieren offene Umgebungen U von z_0 in Ω und V von $w_0 = f(z_0)$ in $f(\Omega)$ so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist mit $f'(z) \neq 0$ in U. Außerdem ist dann $g := (f_{|U})^{-1} : V \to U$ holomorph mit*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \qquad (w \in V)$$

(Umkehrregel).

Beispiel 3.8 Wir betrachten $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann gilt $f'(z) = 2z \neq 0$ für alle $z \neq 0$. Ist also $z_0 \neq 0$, so existieren offene Umgebungen U von z_0 und V von z_0^2 so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist.
Man beachte jedoch: f ist nicht injektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (da $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt).

Satz 3.9 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ferner sei $z_0 \in \Omega$ und $w_0 = f(z_0)$, wobei z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von $f - w_0$ ist. Dann existieren eine offene Umgebung U von z_0 und eine in U holomorphe Funktion φ mit $\varphi(z_0) = 0$ sowie $\varphi'(z_0) \neq 0$ und so, dass*

$$f(z) = w_0 + \varphi^m(z) \qquad (z \in U) .$$

Beweis. Es seien $U := U_r(z_0)$ und $g \in H(U)$ so, dass $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ (existieren nach B./D. 1.3). Dann existiert nach S. 3.2 ein $h \in H(U)$ mit $e^h = g$. Ist $\varphi : U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) = (z - z_0) e^{h(z)/m} \qquad (z \in U) ,$$

so gilt

$$\varphi^m(z) = (z - z_0)^m e^{h(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0 \qquad (z \in U) .$$

Dabei ist $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) \neq 0$. □

Als unmittelbare Konsequenz erhalten wir

Satz 3.10 *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, so ist f offen (d. h. Bilder offener Mengen sind offen).*

Beweis. Es seien $M \subset G$ offen und $w_0 \in f(M)$. Zu $z_0 \in M$ mit $f(z_0) = w_0$ seien $U \subset M$ und φ wie in S. 3.9 (man beachte: jede Nullstelle von $f - w_0$ hat endliche Ordnung nach dem Identitätssatz). Nach S. 3.7 kann dabei U so (klein) gewählt werden, dass $\varphi : U \to U_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$ bijektiv ist. Da $w \mapsto w^m + w_0$ die Kreisscheibe $U_\delta(0)$ **auf** $U_{\delta^m}(w_0)$ abbildet (Existenz komplexer Wurzeln; siehe Analysis) ist

$$U_{\delta^m}(w_0) = w_0 + U_{\delta^m}(0) = w_0 + \varphi^m(U) = f(U) \subset f(M) \; .$$

Also ist $f(M)$ offen. □

Bemerkung 3.11 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$.
1. Für alle $w_0 \in f(G)$ und alle $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset G$ ist die Menge $f(U_r(z_0))$, wobei z_0 so, dass $f(z_0) = w_0$, offen. Also existiert insbesondere stets ein $w_1 \in f(U_r(z_0))$ mit $|w_1| > |w_0|$. Damit hat $|f|$ keine lokalen Maxima in G. Dies zeigt, dass S. 3.10 das Maximumprinzip umfasst.
2. (Gebietstreue holomorpher Funktionen) Da f insbesondere stetig auf dem Gebiet G ist, ist nach S. A.5 und S. 3.10 auch $f(G)$ ein Gebiet.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Konzept komplexer Wegintegrale. Wir werden uns dabei auf Integrale längs Pfaden beschränken.

Definition 3.12 Ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ heißt ein *Pfad* (Dabei ist γ stückweise stetig differenzierbar, falls γ' bis auf endlich viele Punkte existiert und zu einer stückweise stetigen Funktion fortgesetzt werden kann). Ist $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig auf γ^*, so ist $f \circ \gamma \cdot \gamma'$ eine Regelfunktion auf $[\alpha, \beta]$. Wir definieren das *(Weg-)Integral von f längs γ* durch

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(\zeta) d\zeta := \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \; .$$

Außerdem setzen wir

$$\int_\gamma f(\zeta)\, |d\zeta| := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt$$

sowie $L(\gamma) := \int_\gamma |d\zeta|$. Dabei heißt $L(\gamma)$ die *Länge* von γ.

Bemerkung 3.13 Für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$, und für f stetig auf $K_R(z_0) = \gamma^*$ ist

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) iRe^{it} dt \quad \text{und} \quad \int_\gamma f(\zeta)\, |d\zeta| = \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) R\, dt$$

Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\int_{|\zeta - z_0| = R} \quad \text{bzw.} \quad \int_{K_R(z_0)} \quad \text{statt} \quad \int_\gamma \; .$$

Damit gilt für alle $R > 0$

$$\int_{K_R(z_0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^{-1}\, iRe^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Ist allgemeiner f holomorph auf einer offenen Menge Ω, so liest sich für $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ die Causchysche Integralformel kurz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in U_R(z_0)) \; .$$

Bemerkung 3.14 1. Es seien $\tilde{\gamma} : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to \mathbb{C}$ und $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ Pfade, und es sei $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, wobei $\varphi : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar mit $\varphi' > 0$ und $\varphi(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\varphi(\tilde{\beta}) = \beta$. Dann ist $\gamma^* = \tilde{\gamma}^*$, d.h. die Spuren stimmen überein, und es gilt mit der Substitutionsregel

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f \circ \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}' = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f \circ \gamma \circ \varphi \cdot \gamma' \circ \varphi \cdot \varphi' = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\gamma f \, .$$

Dies zeigt, dass die Pfadintegrale im Falle der Existenz einer Funktion φ wir oben übereinstimmen. Wir schreiben $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ falls eine Abbildung φ mit obigen Eigenschaften existiert. Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Pfade in $\mathbb{C}$. Wir können damit insbesondere zu jedem Pfad $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ und zu jeden Intervall $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ einen äquivalenten Pfad $\tilde{\gamma} : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to \mathbb{C}$ finden ($\varphi(t) = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}}(t - \alpha)$ ist geeignet).
Für die zu γ gehörige Äquivalenzklasse $[\gamma]$ ist

$$\int_{[\gamma]} f := \int_\gamma f \qquad (f \in C(\gamma^*))$$

wohldefiniert.
2. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definert durch

$$\gamma(t) := a + t(b - a) \quad (t \in [0, 1]).$$

Dann schreiben wir auch

$$\int_a^b f := \int_\gamma f \; .$$

Ist $\tilde{\gamma}(t) := b + t(a-b)$ so ergibt sich

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \; .$$

Man beachte, dass die Spuren γ^* und $\tilde{\gamma}^*$ übereinstimmen.
3. Unmittelbar aus der jeweiligen Definition ergibt sich (mit $\|f\|_\infty := \|f\|_{M,\infty} := \sup\limits_{\zeta \in M} |f(\zeta)|$)) folgende einfache, aber oft sehr nützliche Abschätzung für das Integral von f längs γ:

$$\Big| \int_\gamma f \Big| \leq \int_\gamma |f(\zeta)|\,|d\zeta| \leq \|f\|_\infty \cdot L(\gamma) \; .$$

Der folgende Satz zeigt, dass bei Existenz einer Stammfunktion Integrale wegunabhängig sind.

Satz 3.15 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Existiert eine Funktion $F \in H(G)$ mit $F' = f$ in G (d.h. F ist eine Stammfunktion zu f in G), so gilt für alle Pfade γ in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b*

$$\int_\gamma f = F(b) - F(a)\,.$$

Insbesondere ist damit

$$\int_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in G.

Beweis. Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = b$. Dann gilt

$$\int_\gamma f = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)' = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

nach dem HDI. □

Beispiel 3.16 Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ein beliebiger Pfad. Dann gilt für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$

$$\int\limits_\gamma (\zeta - z_0)^m d\zeta = \frac{1}{m+1}\big((b-z_0)^{m+1} - (a-z_0)\big)^{m+1}\big)\,,$$

wobei $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$. Also: Der Wert des Integrals hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten von γ ab, nicht aber vom Weg γ!
Insbesondere gilt für jeden geschlossenen Pfad γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$$\int\limits_\gamma (\zeta - z_0)^m d\zeta = 0\,.$$

Ist $m = -1$, so ist dies nach B. 3.13 im Allgemeinen **falsch**.
S. 3.15 zeigt darüber hinaus, dass $z \mapsto 1/(z - z_0) = (z - z_0)^{-1}$ in $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ keine Stammfunktion haben kann!

Satz 3.17 *(Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann ist

$$\int\limits_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in G.

Beweis. Nach S. 3.1 existiert ein F mit $F' = f$ in G. Also folgt die Behauptung aus S. 3.15 □

Bemerkung 3.18 Es seien $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und $f(z) = 1/(z - z_0)$. Wieder zeigt B. 3.13, dass die Aussage von S. 3.17 nicht für G und damit nicht für alle Gebiete gilt.

Bemerkung 3.19 Sind $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$, so gilt nach S. 3.17 insbesondere für jeden Kreis $U = U_R(z_0)$ in Ω und jeden geschlossenen Pfad γ in U

$$\int\limits_\gamma f = 0.$$

Ist $\Delta = \Delta(a, b, c)$ das Dreieck mit Ecken a, b, c, so gilt also insbesondere

$$\int\limits_\Delta f := \Big(\int\limits_a^b + \int\limits_b^c + \int\limits_c^a\Big) f = 0$$

falls $\Delta \subset U_R(z_0)$. Tatsächlich gilt auch folgende Umkehrung (Satz von Morera):
Ist $f \in C(\Omega)$ und existiert zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $r > 0$, so dass

$$\int_{\Delta} f = 0$$

für alle Dreiecke $\Delta = \Delta(a, b, c)$ in $U_r(z_0)$, so ist $f \in H(\Omega)$.
(Denn: Es sei $F : U := U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f \qquad (z \in U).$$

Dann gilt für $z, w \in U$

$$F(w) - F(z) = \Big(\int_{z_0}^{w} + \int_{z}^{z_0} \Big) f = \Big(\int_{\Delta(z_0,w,z)} - \int_{w}^{z} \Big) f = \int_{z}^{w} f,$$

also für $h \neq 0$ genügend klein

$$\Big| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \Big| = \frac{1}{|h|} \Big| \int_{z}^{z+h} \big(f(\zeta) - f(z) \big) d\zeta \Big| \leq \big\| f - f(z) \big\|_{I[z,z+h],\infty} \to 0 \quad (h \to 0) \; .$$

Damit ist F differenzierbar auf U mit $F' = f$ auf U. Da f stetig ist, ist F holomorph auf U und folglich auch f. Da z_0 beliebig war, ist f holomorph auf Ω.)

4 Fourier- und Laurent-Reihen

Im ersten Abschnitt haben wir uns mit Taylor-Reihen bzw. Potenzreihen beschäftigt. Wir wollen nun eine andere Art von Reihenentwicklungen untersuchen, die den wesentlichen Vorteil hat, dass keine Ableitungen von f benötigt werden. Dazu stellen wir zunächst einige Vorüberlegungen an.

Bemerkung 4.1 Wir schreiben im Weiteren kurz

$$S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \, (= K_1(0) = \partial\mathbb{D}) \, .$$

Dann sind durch

$$< f, g > := \frac{1}{2\pi} \int_S f(\zeta) \, \overline{g}(\zeta) \, |d\zeta| \qquad (f, g \in C(S))$$

ein Skalarprodukt auf $C(S)$ und durch

$$\|f\|_2 := \|f\| := (< f, f >)^{1/2} \qquad (f \in C(S))$$

eine Norm auf $C(S)$ definiert.
Ist ferner $e_k : S \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$e_k(z) := z^k \qquad (z \in S),$$

so gilt dabei

$$\begin{aligned} < e_k, e_j > &= \frac{1}{2\pi} \int_S \zeta^k \, \overline{\zeta^j} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i(k-j)} e^{i(k-j)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & , \; k \neq j \\ 1 & , \; k = j \end{cases} . \end{aligned}$$

Damit ist $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem (ONS) in $(C(S), < \cdot, \cdot >)$.
Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu := \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu z^\nu \qquad \text{gleichmäßig auf } S \, ,$$

so gilt $f \in C(S)$ und $a_k = < f, e_k >$ für alle k.
(Denn: Es ist

$$< f, e_k > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i(\nu-k)t} dt = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu-k)t} dt = a_k.)$$

Dies ist nach dem Weierstrassschen Majorantenkriterium insbesondere dann der Fall, wenn $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu| < \infty$ gilt.

Definition 4.2 Es sei $f \in C(S)$. Dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(k) := < f, e_k > := \frac{1}{2\pi} \int\limits_S f(\zeta)\,\overline{\zeta}^k\,|d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{is}) e^{-iks} ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta$$

k-ter *Fourier-Koeffizient* von f. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt weiter $s_n = s_n f$ mit

$$s_n(z) := (s_n f)(z) := \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) z^\nu = \sum_{\nu=-n}^{n} < f, e_\nu > e_\nu(z) \qquad (z \in S)$$

n-te *Fourier-Teilsumme* von f und $(s_n f)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *Fourier-Reihe* von f.

Beispiel 4.3 1. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ gleichmäßig konvergent auf $\overline{\mathbb{D}}$. Also ist $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (|z| \leq 1)\,,$$

stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und holomorph in $\mathbb{D}$. Nach B. 4.1 ergibt sich $\hat{f}(k) = a_k = f^{(k)}(0)/k!$ für $k \geq 0$ und $\hat{f}(k) = 0$ für $k < 0$. Also stimmt die Taylor-Reihe von f auf S mit der Fourier-Reihe von f (oder genauer $f_{|S}$) überein.

2. Wir betrachten $f : S \to \mathbb{R}$ mit

$$f(e^{it}) := \frac{\pi}{2} - |t| \qquad (t \in (-\pi, \pi])\,,$$

d. h $f(z) = \pi/2 - |\arg(z)|$ wobei $\mathrm{Im}(\log z) =: \arg(z)$ für $z \in S \setminus \{-1\}$ (und $\arg(-1) := \pi$). Dann gilt für $k \neq 0$

$$2\pi \hat{f}(k) = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} |s| \cos(-ks)\, ds - \underbrace{i \int\limits_{-\pi}^{\pi} |s| \sin(-ks)\, ds}_{=0} = -2 \int\limits_0^{\pi} s \cos(ks)\, ds = \frac{2}{k^2}(1 - (-1)^k)\,,$$

also

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{\pi k^2} \quad (k \text{ ungerade})\,, \qquad \hat{f}(k) = 0 \quad (k \text{ gerade}, k \neq 0)\,.$$

Außerdem ist

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |t| dt = 0\,.$$

Folglich gilt für $z = e^{it} \in S$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) z^\nu &= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu \text{ ungerade}} \frac{z^\nu}{\nu^2} = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{z^\nu + z^{-\nu}}{\nu^2} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\mathrm{Re}(z^\nu)}{\nu^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\cos(\nu t)}{\nu^2}\,.\end{aligned}$$

Dabei ist die Konvergenz (auch für die mit den Absolutbeträgen gebildete Reihe) gleichmäßig auf S.

Bemerkung 4.4 Bisher wissen wir nur wenig darüber, unter welchen Bedingungen die Fourier-Reihe die Funktion f darstellt, d.h. wann (und in welchem Sinne)

$$f = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

gilt.
Da $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS ist, ergibt sich (siehe Lineare Algebra)

$$\|f - s_n f\|_2 = \operatorname{dist}(f, T_n),$$

wobei

$$T_n := \operatorname{linspan}\{e_k : k \in \{-n, \ldots, n\}\}$$

die Menge des *trigonometrischen Polynome* vom Grad $\leq n$ bezeichnet.
Also: $s_n f \in T_n$ ist die beste Approximation an f bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm.
Wenn wir also nach Konvergenz bzgl. $||\cdot||_2$ fragen, so folgt, dass

$$||f - s_n f||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

für alle $f \in C(S)$ schon dann gilt, wenn nur $\operatorname{dist}(f, T_n) \to 0$ erfüllt ist, m.a.W., wenn $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ (die Menge der trigonometrischen Polynome) dicht in $(C(S), ||\cdot||_2)$ ist. Da für alle $f \in C(S)$

$$||f||_2 = \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_S |f(\zeta)|^2 |d\zeta|\Big)^{1/2} \leq ||f||_{S,\infty}$$

gilt, reicht es dafür zu zeigen, dass $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ dicht in $(C(S), ||\cdot||_{S,\infty})$ ist.

Bemerkung und Definition 4.5 Es seien $f, g \in C(S)$. Wir definieren die *Faltung* $f * g : S \to \mathbb{C}$ von f und g durch

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_S f(z\overline{\zeta})g(\zeta)|d\zeta| = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S f(z/\zeta)g(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (z \in S).$$

Dann ist $f * g$ stetig auf S, und es gilt

$$f * g = g * f.$$

([Ü]). Ist dabei speziell $f \in T_n$, so gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) z^\nu,$$

und damit

$$(f * g)(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) z^\nu \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \overline{\zeta}^\nu g(\zeta)|d\zeta| = \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu) z^\nu \qquad (z \in S)\ .$$

Also ist auch $f * g \in T_n$ mit

$$(f * g)\widehat{\ }(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

Wir setzen für $A \subset S$ so, dass $t \mapsto \chi_A(e^{it})$ eine Regelfunktion auf $[-\pi, \pi]$ ist (hierbei ist χ_A die Indikatorfunktion von A),

$$\int_A f(\zeta)|d\zeta| := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\chi_A(e^{it})dt.$$

Satz 4.6 *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $Q_n \in T_n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $Q_n \geq 0$ *auf* S $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_S Q_n(\zeta)|d\zeta| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$,

(iii) *Für alle* $\delta > 0$ *gilt* $\int_{S\setminus U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Ist $f \in C(S)$, so gilt

$$f * Q_n \to f \qquad \text{gleichmäßig auf } S.$$

Beweis. Mit (ii) ergibt sich zunächst

$$(f * Q_n)(z) - f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_S (f(z\overline{\zeta}) - f(z))Q_n(\zeta)|d\zeta| \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N}),$$

also mit (i)

$$|(f * Q_n)(z) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_S |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N}).$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig auf der kompakten Menge S ist, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(z\overline{\zeta}) - f(z)| < \varepsilon \qquad (z \in S, |\zeta - 1| < \delta).$$

Hieraus folgt wieder mit (ii)

$$\sup_{z\in S} \frac{1}{2\pi}\int_{U_\delta(1)} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq \varepsilon$$

Mit (iii) gilt zudem

$$\sup_{z\in S} \frac{1}{2\pi}\int_{S\setminus U_\delta(1)} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq 2\|f\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{S\setminus U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Folglich ist für n genügend groß

$$\|f * Q_n - f\|_\infty < 2\varepsilon.$$

□

Bemerkung 4.7 Es stellt sich natürlich die Frage nach der Existenz von Folgen wie in S. 4.6. Ein Beispiel ist

$$F_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) z^\nu \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N})$$

(F_n heißt n-ter *Fejér-Kern*). Es gilt dafür: $F_n \in T_n$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_S F_n(\zeta)|d\zeta| = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int\limits_S \zeta^\nu |d\zeta|}_{=\delta_{0,\nu}} = 1,$$

also ist jedenfalls (ii) erfüllt. Weiter ist für $z \in S$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 &= \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{j=0}^{n} z^j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} \overline{z}^j\Big) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j,k=0}^{n} z^{j-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=-n}^{n} (n+1-|\nu|) z^\nu = F_n(z), \end{aligned}$$

also $F_n \geq 0$ und für $z \in S \setminus U_\delta(1)$

$$F_n(z) = \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 = \frac{1}{n+1}\Big|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\Big|^2 \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{4}{\delta^2} \to 0.$$

Damit gilt $F_n \to 0$ gleichmäßig auf $S \setminus U_\delta(1)$. Also ist insbesondere auch (iii) erfüllt.
Nach S. 4.6 gilt also für alle $f \in C(S)$

$$f * F_n \to f \qquad \text{gleichmäßig auf } S.$$

Da alle $f * F_n$ trigonometrische Polynome (von Grad $\leq n$) sind, ist insbesondere $\bigcup T_n$ dicht in $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$.
Wie bereits in B. 4.4 erläutert, impliziert dies insbesondere, dass für alle $f \in C(S)$ gilt

$$||f - s_n f||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

d.h. $s_n f \to f$ „im quadratischen Mittel“. Dies bedeutet jedoch noch nicht, dass stets auch

$$s_n f(z) \to f(z)$$

für alle $z \in S$ gilt. Tatsächlich gilt dies auch nicht für alle $f \in C(S)$ (genauer ist $(s_n f(z))_n$ noch nicht einmal für alle z unf f beschränkt, was wir jedoch nicht zeigen werden).

Satz 4.8 *(Fejér)*
Es sei $f \in C(S)$. Dann gilt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu f \to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } S.$$

Beweis. Es sei F_n der n-te Fejér-Kern. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu f(z) &= \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\hat f(\mu)z^\mu = \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=-n}^{n}\hat f(\mu)z^\mu \underbrace{\sum_{\nu=|\mu|}^{n} 1}_{=n+1-|\mu|} = \sum_{\mu=-n}^{n}\Big(1-\frac{|\mu|}{n+1}\Big)\hat f(\mu)z^\mu \\ &= f*F_n(z), \end{aligned}$$

d.h. $f*F_n$ ist das arithmetische Mittel der Fourier-Teilsummen $s_0f,\ldots,s_nf$. Also folgt die Behauptung mit B. 4.7. □

Als Folgerung aus B. 4.7 erhalten wir

Satz 4.9 *Es sei $f \in C(S)$. Dann gilt*

1. $||f||_2^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\hat f(\nu)|^2$ *(Parsevalsche Gleichung).*
2. *Gilt $\hat f(\nu) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$, so ist $f \equiv 0$.*
3. *Konvergiert (s_nf) gleichmäßig auf S, so gilt*

$$s_nf \to f\,.$$

Beweis.
1. Es gilt $s_nf \in T_n$ und $f - s_nf \in T_n^\perp$ ($\to$ Lineare Algebra). Also ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras

$$||f||_2^2 \;=\; ||f-s_nf||_2^2 + ||s_nf||_2^2\,.$$

Nach B. 4.7 gilt $||f-s_nf||_2^2 \to 0\,(n\to\infty)$, d.h. $||s_nf||_2^2 \to ||f||_2^2\,(n\to\infty)$. Außerdem ist (wieder mit Pythagoras)

$$||s_nf||_2^2 \;=\; ||\sum_{\nu=-n}^{n}\hat f(\nu)e_\nu||_2^2 \;=\; \sum_{\nu=-n}^{n}|\hat f(\nu)|^2\underbrace{\|e_\nu\|_2^2}_{=1} = \sum_{\nu=-n}^{n}|\hat f(\nu)|^2\,.$$

Damit ergibt sich 1.
2. Ist $\hat f(\nu) = 0\,(\nu\in\mathbb{Z})$, so ist $||f||_2^2 = 0$ nach 1., also $f \equiv 0$.
3. Aufgrund der gleichmß̈igen Konvergenz ist $g : S \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \lim_{n\to\infty} s_nf(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\hat f(\nu)z^\nu$$

stetig auf S. Außerdem gilt nach B. 4.1

$$\hat g(k) = \hat f(k)\,,$$

also auch $(f-g)\widehat{\ }(k) = 0$. Nach 2. ist $f - g \equiv 0$. □

Wir untersuchen nun Funktionen f, die holomorph sind in einem Kreisring

$$V_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} ,$$

wobei $0 \leq r < R \leq \infty$.

Bemerkung 4.10 Es sei $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{R} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} = r \,,$$

so konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $|z - z_0| < R$ (siehe Anaysis) und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-z_0)^{-\nu}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $|z - z_0| > r$ (Potenzreihe in $1/(z - z_0)$). Also ist im Falle $r < R$ die Summe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ der beiden Reihen gleichmäßig konvergent auf jeder kompakten Teilmenge des Kreisringes $V_{r,R}(z_0)$. Ausserdem ist

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-z_0)^{-\nu}$$

holomorph in $V_{r,R}(z_0)$.

Beispiel 4.11 Für $a_\nu := 1/|\nu|!$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} = 0 \,,$$

also $r = 0$ und $R = \infty$. Hier ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu! z^\nu} = e^z + e^{1/z} - 1$$

holomorph in $V_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Wir zeigen nun, dass jede in einem Kreisring holomorphe Funktion durch eine solche Reihe dargestellt wird.

Bemerkung und Definition 4.12 Es sei $f \in H(V)$, wobei $V = V_{r,R}(z_0)$, und es sei für $k \in \mathbb{Z}$

$$a_k(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \lambda} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \qquad (\lambda \in (r, R)) \,.$$

Dann ist $\lambda \mapsto a_k(\lambda)$ konstant auf (r, R).
(Denn: O.E. können wir $z_0 = 0$ und $r < 1 < R$ annehmen (ansonsten: $\tilde{f}(z) = f(z_0 + \rho z)$ für ein $\rho \in (r, R)$ auf $V_{r/\rho, R/\rho}(0)$ betrachten).
Der gleiche Beweis wie in B. 1.13 zeigt, dass für $g \in H(V_{r,R}(0))$ und $\Phi : (r, R) \to \mathbb{C}$ mit

$$\Phi(\lambda) := \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda e^{it})\, dt \qquad (\lambda \in (r, R))$$

gilt: Φ ist konstant auf (r, R).
Damit folgt mit $g(z) := if(z)/z^k$ für alle $\lambda \in (r, R)$

$$2\pi i a_k(\lambda) = \int_{|\zeta|=\lambda} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda e^{it}) i\lambda e^{it}}{\lambda^{k+1} e^{it(k+1)}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{if(\lambda e^{it})}{\lambda^k e^{itk}}\, dt = \Phi(\lambda) .$$

Also ist $a_k(\lambda)$ unabhängig von λ.)

Wir setzen
$$\hat{f}_V(k) := a_k(\lambda) \qquad (k \in \mathbb{Z}) .$$
Dann heißen $\hat{f}_V(k)$ *k-ter Laurent-Koeffizient* von f bzgl. V und $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z - z_0)^\nu$ *Laurent-Reihe* von f bzgl. V. Ferner heißen die (Potenz-)Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z - z_0)^\nu$ *Regulärteil* (oder auch *Nebenteil*) und die Reihe $\sum_{\nu=-\infty}^{-1} \hat{f}_V(\nu)(z - z_0)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_V(-\nu)(z - z_0)^{-\nu}$ *Hauptteil* der Laurent-Reihe.

Satz 4.13 *Es seien $0 \le r < R \le \infty$ sowie $z_0 \in \mathbb{C}$, und es sei $f \in H(V_{r,R}(z_0))$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z - z_0)^\nu$$

mit gleichmäßiger Konvergenz von Regulär- und Hauptteil auf allen kompakten Teilmengen von $V_{r,R}(z_0)$.
Außerdem ist die Darstellung eindeutig, d.h. ist $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z - z_0)^\nu$ mit glokal leichmäßiger Konvergenz auf $V_{r,R}(z_0)$, so ist $b_k = \hat{f}_V(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. 1. O. E. sei wieder $z_0 = 0$ und $r < 1 < R$. Wir setzen zur Abkürzung $a_\nu := \hat{f}_V(\nu)$.
Es gilt für $r < \lambda < R$

$$|a_\nu| = \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\lambda} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta \Big| \le \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\lambda}{\lambda^{\nu+1}} ||f||_{K_\lambda(0),\infty} = \frac{||f||_{K_\lambda(0),\infty}}{\lambda^\nu} \qquad (\nu \in \mathbb{Z}) .$$

Also folgt
$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le \frac{1}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \le \lambda .$$

Da $\lambda \in (r, R)$ beliebig war, ist

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq \frac{1}{R} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \leq r\,.$$

Aus B. 4.10 ergibt sich die Konvergenzaussage.
Es sei $g(z) := \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $z \in V_{r,R}(0)$. Dann ist $g \in H(V_{r,R}(0))$ nach B. 4.10. Aus

$$\widehat{f_{|S}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta = a_k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

folgt $g_{|S} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(f_{|S})$. Dabei ist die Konvergenz gleichmäßig auf S. Also ist nach S. 4.9.3

$$g_{|S} = f_{|S}\,.$$

Nach dem Identitätssatz gilt $g = f$ (beachte: beide sind holomorph in $V_{r,R}(0)$).
2. Ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu(z-z_0)^\nu$ lokal gleichmäßig in $V_{r,R}(z_0)$, so gilt für $\lambda \in (r, R)$ und $k \in \mathbb{Z}$ nach B. 3.16

$$\hat{f}_V(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\lambda}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\lambda}(\zeta-z_0)^{\nu-k-1}d\zeta = b_k\,.$$

□

Bemerkung 4.14 1. Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega\setminus\{z_0\})$ für ein $z_0 \in \Omega$. Ist f beschränkt bei z_0, d. h. beschränkt auf $0 < |z-z_0| \leq \delta$ für ein $\delta > 0$, so gilt für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und $0 < \lambda \leq \delta$

$$|\hat{f}_V(-\nu)| \leq \max_{0<|\zeta-z_0|\leq\delta}|f(\zeta)|\lambda^\nu \to 0 \qquad (\lambda \to 0)$$

(vgl. Beweis zu S. 4.13). Also ist $\hat{f}_V(-\nu) = 0$ für $\nu \in \mathbb{N}$ und damit nach S. 4.13

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\hat{f}_V(\nu)(z-z_0)^\nu$$

für $0 < |z-z_0| < R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Also ist f zu einer in Ω holomorphen Funktion fortsetzbar und die Potenzreihenentwicklung gilt auf $U_R(z_0)$.
2. Eine kleine Modifikation des Beweises zu S. 4.10 zeigt, dass aus S. 4.9.3 auch $g_{|K_\rho(0)} = f_{|K_\rho(0)}$ für alle $\rho \in (r, R)$ folgt. Damit kommt man im Beweis zu S. 4.10 auch ohne den Identitätssatz aus. Ist $f \in H(\Omega)$ in 1., so ist natürlich f beschränkt bei z_0. Also haben wir damit einen weiteren Beweis zu S. 1.16. Außerdem gilt in diesem Fall auch $\hat{f}_V(\nu) = f^{(\nu)}(z_0)/\nu!$ für $\nu \geq 0$.

5 Isolierte Singularitäten

Bisher haben wir uns mit dem Verhalten holomorpher Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in der Menge Ω beschäftigt. Oft ist aber das Verhalten holomorpher Funktionen bei Annäherung an Randpunkte von Ω besonders interessant. Der einfachste Fall eines solchen Randpunktes ist der eines isolierten Punktes, mit dem wir uns jetzt genauer befassen.

Bemerkung und Definition 5.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ist $a \in \partial\Omega$ ein isolierter Punkt von Ω^c (d.h. $U_\delta(a) \setminus \{a\} \subset \Omega$ für ein $\delta > 0$) so heißt a eine *isolierte Singuarlität* von f. Ist dabei $R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega \setminus \{a\})$, so hat f in $V := V_{0,R}(a) = U_R(a) \setminus \{a\}$ die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-a)^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

gemäß S. 4.13. Damit heißt a

1. *hebbare Singularität* falls $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.
2. *Pol der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$ falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu > p$.
3. *wesentliche Singularität* falls $a_{-\nu} \neq 0$ für ∞ viele $\nu \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.2 1. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad (z \neq 0).$$

Hier gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+1)!} \quad \text{in} \quad V_{0,\infty}(0),$$

also ist $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Damit hat f an 0 eine hebbare Singularität.
2. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := e^z / z^p \qquad (z \neq 0).$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^{\nu-p} = \sum_{k=-p}^{\infty} \frac{1}{(k+p)!} z^k,$$

also $a_{-p} = 1$ und $a_{-\nu} = 0$ für $\nu > p$. Damit hat f an 0 einen Pol der Ordung p.
3. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0).$$

Dann ist

$$f(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^{-\nu} \quad \text{in} \quad V_{0,R}(0),$$

also ist hier $a_{-\nu} = 1/|\nu|! \neq 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Folglich hat f an 0 eine wesentliche Singularität.

Wir wollen nun für alle drei Typen isolierter Singularitäten Charakterisierungen herleiten.

Satz 5.3 *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann sind äquivalent

a) f hat an a eine hebbare Singularität.

b) f ist durch $f(a) := \hat{f}_V(0) = a_0$ zu einer auf $\Omega \cup \{a\}$ holomorphen Funktion f fortsetzbar (die wir auch f nennen).

b) Es existiert eine Umgebung U von a so, dass f in $U \setminus \{a\}$ beschränkt ist.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist a eine hebbare Singularität von f, so ist

$$\tilde{f}(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

holomorph auf $U := U_R(a)$ mit $R = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega \setminus \{a\})$, und es gilt

$$\tilde{f}(z) = f(z) \qquad (z \in U \setminus \{a\}) .$$

b) $\Rightarrow$ c) ist klar und b) $\Rightarrow$ a) ergibt sich aus B. 4.14.1. □

Für Pole der Ordnung p gilt folgende Charakterisierung.

Satz 5.4 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann sind äquivalent:*

a) f hat an a einen Pol der Ordnung p.

b) Es existiert eine Funktion $g \in H(\Omega \cup \{a\})$ mit $g(a) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \Omega)$$

c) $1/f$ ist (definiert und) holomorph auf einer offenen Umgebung U von a mit Nullstelle der Ordnung p an der Stelle a.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wir setzen $g(z) := (z-a)^p f(z)$ für $z \in \Omega$. Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad V_{0,R}(a)$$

mit $a_{-p} \neq 0$, so ist

$$g(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p} (z-a)^\nu$$

holomorph auf $\Omega \cup \{a\}$ mit $g(a) = a_{-p} \neq 0$ und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \quad (z \in \Omega)\,.$$

b) $\Rightarrow$ c): Es sei U eine offene Umgebung von a so, dass $g(z) \neq 0$ in U. Dann ist

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \, \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Also ist $1/f$ (definiert und) holomorph auf U und hat nach B./D. 1.3 eine Nullstelle der Ordnung p an a.
c) $\Rightarrow$ a): Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \cdot g_0(z) \qquad (z \in U \setminus \{a\})$$

mit einer Funktion $g_0 \in H(U)$ mit $g_0(a) \neq 0$. Dann ist auch $g_0(z) \neq 0$ auf einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von a. Also ist

$$f(z) = \frac{1/g_0(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \tilde{U} \setminus \{a\})\,.$$

Da $1/g_0$ holomoroph in $\tilde{U}$ ist, hat $1/g_0$ eine Potenzreihendarstellung

$$1/g_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad U_\delta(a)$$

für ein $\delta > 0$. Damit ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^{\nu-p} = \sum_{\nu=-p}^{\infty} b_{\nu+p} (z-a)^\nu\,,$$

in $V_{0,\delta}(a)$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen, d. h.

$$h(z) = \sum_{\nu=-p}^{-1} b_{\nu+p} (z-a)^\nu = \sum_{\nu=1}^{p} b_{p-\nu} (z-a)^{-\nu}$$

ist der Haupttteil der Laurent-Reihe, und es gilt $a_{-p} = b_0 = 1/g_0(a) \neq 0$. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz 5.5 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann hat f an a genau dann einen Pol (irgendeiner Ordnung), wenn gilt*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty\,.$$

Beweis. Hat f an a einen Pol, etwa der Ordnung p, so gilt mit g wie in S. 5.4 (da $g(a) \neq 0$)

$$|f(z)| \;=\; \frac{|g(z)|}{|z-a|^p} \to \infty \qquad (z \to a)\,.$$

Gilt umgekehrt

$$|f(z)| \to \infty \qquad (z \to \infty)\,,$$

so existiert eine offene Umgebung U von a mit $f(z) \neq 0$ in $U \setminus \{a\}$ und

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0\,.$$

also ist $1/f$ nach S. 5.3 holomorph fortsetzbar an der Stelle a mit Nullstelle, etwa der Ordnung p. Dann hat f nach S. 5.4 einen Pol der Ordnung p. □

Beispiel 5.6 Es gilt

$$Z(\sin) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad Z(\cos) = \Big\{\big(k + \frac{1}{2}\big)\pi : k \in \mathbb{Z}\Big\}\,,$$

und alle Nullstellen sind von der Ordnung 1. Damit hat auch tan an den Stellen $k\pi$ Nullstellen der Ordnung 1 und cot an den Stellen $(k + 1/2)\pi$. Nach S. 5.4 hat $\cot = 1/\tan$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $k\pi$ und $\tan = 1/\cot$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $(k + 1/2)\pi$.
Nach S. 5.5 gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z\to k\pi} |\cot z| = \lim_{z\to(k+\frac{1}{2})\pi} |\tan z| = \infty\,.$$

Bemerkung und Definition 5.7 Es sei

$$S^2 := \Big\{ s = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \Big| s - (0, 0, \frac{1}{2}) \Big| = \frac{1}{2} \Big\}.$$

Dann ist durch

$$P(z) := P(x + iy) := \frac{1}{|z|^2 + 1}\,(x, y, |z|^2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ definiert ([Ü]). Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$P^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi}{1-\zeta} + i\frac{\eta}{1-\zeta}$$

(so genannte stereographische Projektion).
Setzt man

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad P(\infty) := (0, 0, 1),$$

so ist $P : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ bijektiv, und durch

$$\chi(z, w) := |P(z) - P(w)| \qquad (z, w \in \mathbb{C}_\infty)$$

wird $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ein kompakter metrischer Raum (die so genannte Riemannsche Zahlenkugel).

Dabei gilt $\chi(z,\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$ für $z \neq \infty$, also ergibt sich für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$

$$\chi(z_n,\infty) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(d. h. $z_n \to \infty$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$) genau dann, wenn $|z_n| \to \infty\,(n \to \infty)$.
Da $P : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ und $P^{-1} : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ stetig sind, ist $M \subset \mathbb{C}$ genau dann offen in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, wenn M offen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist. Für $z_n, z \in \mathbb{C}$ folgt zudem $|z_n - z| \to 0$ genau dann, wenn $\chi(z_n, z) \to 0$.
Ist also $a \in \mathbb{C}$ und ist $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph für eine offene Umgebung U von a mit Pol an der Stelle a, so kann f durch $f(a) := \infty$ zu einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ fortgesetzt werden. (Man beachte: Nach S. 5.5 gilt

$$f(z) \to \infty \qquad (z \to a)$$

in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$).

Definition 5.8 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ heißt *meromorph* in Ω, falls

$$P(f) := \{z \in \Omega : f(z) = \infty\} = f^{-1}(\{\infty\})$$

keinen Häufungspunkt in Ω hat, $f \in H(\Omega \setminus P(f))$ gilt und f an allen Stellen $z \in P(f)$ Pole hat (d. h. f ist stetig an allen $z \in P(f)$).

Beispiel 5.9 1. Die Funktionen cot und tan (durch den Wert ∞ an den Polstellen definiert) sind meromorph in $\mathbb{C}$ (vgl. B. 5.6). Man beachte dabei: $P(\tan) = \{(k+1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und $P(\cot) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ haben keine Häufungspunkte in $\mathbb{C}$.
2. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)} \qquad \big(z \in \mathbb{C} \setminus (\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0\} \cup \{0\})\big)$$

(und $f(1/(k\pi)) = \infty$ für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$). Dann ist f meromorph in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Polstellenmenge $P(f) = \{1/(k\pi) : k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0\}$).

Bleibt noch, das Verhalten in der Nähe von wesentlichen Singularitäten zu charakterisieren. Bitte schön:

Satz 5.10 *(Casorati-Weierstrass)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

a) f hat an a eine wesentliche Singularität.

b) Für alle offenen Umgebungen U von a gilt

$$\overline{f(U \setminus \{a\})} = \mathbb{C}\,,$$

c) Zu jedem $w \in \mathbb{C}_\infty$ existiert eine Folge z_n in Ω mit $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Angenommen, es existiert eine offene Umgebung U von a mit

$$\overline{f(U \setminus \{a\})} \neq \mathbb{C}\,.$$

Dann existieren ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$ so, dass $|f(z) - w| \geq \delta$ für alle $z \in U \setminus \{a\}$ gilt. Wir definieren $g : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Dann ist $g \in H(U \setminus \{a\})$ mit $|g(z)| < 1/\delta$ für alle $z \in U, z \neq a$. Also hat g an a eine hebbare Singuarlität nach S. 5.3 (wir schreiben auch für die Fortsetzung wieder g).
Ist $g(a) \neq 0$, so ist $f(z) = w + 1/g(z)$ beschränkt in einer Umgebung von a, also hat f wieder nach S. 5.3 eine hebbare Singuarlität. Widerspruch!
Ist $g(a) = 0$, so gilt

$$|f(z) - w| = \frac{1}{|g(z)|} \to \infty \qquad (z \to a)\,,$$

also auch

$$|f(z)| \to \infty \qquad (z \to a)\,.$$

Damit hat f an a einen Pol nach S. 5.5. Widerspruch!
b) $\Rightarrow$ c): Ist $w \in \mathbb{C}$, so existiert zu jeden $n \in \mathbb{N}$ ein z_n mit $0 < |z_n - a| < 1/n$ und $|f(z_n) - w| < 1/n$. Damit gilt $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$. Ist $w = \infty$, so existiert entsprechend für alle n ein z_n mit $0 < |z_n - a| < 1/n$ und $|f(z_n) - n| < 1$, also $|f(z_n)| \to \infty$.
c) $\Rightarrow$ a): Gilt die Bedingung c), so ist f unbeschränkt in jeder Umgebung von a, und es gilt sicher nicht $|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$. Folglich hat f an a weder eine hebbare Singularität noch einen Pol (S. 5.3 bzw. S. 5.5). Also hat f an a eine wesentliche Singuarlität. □

Beispiel 5.11 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Für die Folge $(1/n)$ gilt $f(1/n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ und für die Folge $(-1/n)$ gilt $f(-1/n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Ist $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ und $w = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so gilt für die Folge

$$z_n = [\ln r + i(\varphi + 2n\pi)]^{-1}$$

$z_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$f(z_n) = e^{\ln r + i(\varphi + 2n\pi)} = re^{i\varphi} = w\,.$$

Also gilt hier sogar $f(z_n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und damit natürlich insbesondere $f(z_n) \to w$ $(n \to \infty)$). Es ist also hier tatsächlich

$$f(U \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für alle Umgebungen U von 0, d.h. in jeder (noch so kleinen) Umgebung von 0 wird jeder Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (unendlich oft) als Funktionswert angenommen!

Bemerkung 5.12 Eine ganze Funktion f heißt *transzendent*, falls f kein Polynom ist. Durch Übertragung des Satzes von Casorati-Weierstrass sieht man: Ist f transzendent, so existiert zu jedem $w \in \mathbb{C}_\infty$ eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to \infty$ und $f(z_n) \to w\,(n \to \infty)$. (Denn: Es sei $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\, (z \in \mathbb{C})$. Dann hat $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f\Big(\frac{1}{z}\Big) \qquad (z \neq 0)\,,$$

die Laurent-Entwicklung

$$g(z) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Da $a_\nu \neq 0$ für ∞ viele ν gilt (beachte: f ist kein Polynom), hat g an 0 eine wesentliche Singularität nach B./D. 5.1. Also existiert nach S. 5.10 zu jedem $w \in \mathbb{C}_\infty$ eine Folge (ζ_n) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\zeta_n \to 0$ und $g(\zeta_n) \to w\,(n \to \infty)$. Die Folge (z_n) mit $z_n = 1/\zeta_n$ erfüllt dann $z_n \to \infty$ und $f(z_n) \to w\,(n \to \infty)$.)

6 Cauchy Theorem und Residuensatz

In den vorherigen Abschnitten haben wir die Cauchysche Integralformel für Kreise und den Cauchyschen Integralsatz auf sternförmigen Gebieten kennengelernt. Wir wollen nun eine gemeinsame Verallgemeinerung herleiten.

Bemerkung und Definition 6.1 Es seien $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein Pfad und $f \in C(\gamma^*)$. Dann heißt die Funktion $Cf = C_\gamma f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(C_\gamma f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\alpha^\beta \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)\, dt \qquad (z \notin \gamma^*)$$

Cauchy-Integral von f bzgl. γ. Weiter heißt im Falle eines geschlossenen Pfades γ

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) := C_\gamma 1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Index (oder auch *Windungszahl*) von z bzgl. γ.
Nach S. 1.8 ist $Cf \in H(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$. Außerdem gilt für $z \notin \gamma^*$

$$|(Cf)(z)| \le \frac{1}{2\pi} ||f||_{\gamma^*,\infty} L(\gamma) \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \gamma^*)} \to 0 \qquad (z \to \infty)\ ,$$

d. h. mit $(Cf)(\infty) := 0$ ist Cf stetig auf $\mathbb{C}_\infty \setminus \gamma^*$.

Beispiel 6.2 Ist $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ $(t \in [-\pi, \pi])$, so gilt nach der Cauchyschen Integralformel für Kreise und dem Cauchyschen Integralsatz für alle f, die holomorph auf einer Umgebung von $\overline{U_R(z_0)}$ sind,

$$(C_{K_R(z_0)} f)(z) := (C_\gamma f)(z) = \begin{cases} f(z), & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases} .$$

(man beachte: für $|z - z_0| > R$ ist dann auch $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ holomorph auf einer (o. E. sternförmigen) Umgebung von $\overline{U_R(z_0)}$).
Insbesondere ist

$$\mathrm{ind}_{K_R(z_0)}(z) = \mathrm{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases} .$$

Der folgende Satz zeigt, dass der Index lokal konstant und ganzzahlig ist. Man beachte dabei, dass für kompakte $K \subset \mathbb{C}$ die offene Menge $\mathbb{C} \setminus K$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente hat.

Satz 6.3 *Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Pfad. Dann ist $\mathrm{ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus \gamma^*) \subset \mathbb{Z}$. Außerdem gilt $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv \mathrm{const}$ auf jeder Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ und $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Beweis. 1. Es gilt

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*)\,.$$

Für $w \in \mathbb{C}$ gilt $e^w = 1$ genau dann, wenn $w/2\pi i \in \mathbb{Z}$. Also ist die Aussage, dass ind_γ ganzzahlige Werte hat, äquivalent dazu $\varphi = \varphi_z : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) := \exp\Big(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds\Big) \qquad (t \in [\alpha,\beta])$$

für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$ die Bedingung $\varphi(\beta) = 1$ erfüllt.
Die stetige Funktion $\varphi/(\gamma - z)$ ist eine Stammfunktion zu

$$\frac{\varphi'(\gamma-z)-\varphi\gamma'}{(\gamma-z)^2} \quad \text{auf } [\alpha,\beta]$$

Weiter gilt

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,,$$

also auch

$$\varphi'(t)(\gamma(t)-z) - \varphi(t)\gamma'(t) = 0$$

für alle $t \in [\alpha,\beta]$ bis auf eine endliche Ausnahmemenge. Hieraus folgt, dass eine Konstante c existiert mit

$$\varphi(t) = c(\gamma(t)-z) \qquad (t \in [\alpha,\beta])\,.$$

Aus $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ ergibt sich

$$\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) = 1\,.$$

2. Es sei G eine Komponente von $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Da G zusammenhängend und ind_γ stetig und ganzzahlig auf G ist, ist $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv \text{const}$ in G nach S.A.6. Außerdem gilt für z in der unbeschränkten Komponente G

$$|\mathrm{ind}_\gamma(z)| \to 0 \qquad (z \to \infty)\,.$$

Also ist $|\mathrm{ind}_\gamma(z)| < 1$ für $|z|$ genügend groß. Da $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv \text{const}$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ ist, ist $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ dort. □

Definition 6.4 Es sei γ ein geschlossener Pfad in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^* : \mathrm{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$

Inneres von γ und

$$\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^* : \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0\}$$

Äußeres von γ. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein Pfad in G, so heißt γ *nullhomolog* in G, falls

$$\mathrm{Int}(\gamma) \subset G.$$

Satz 6.5 *(Cauchy Theorem; Homologieversion)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ist γ ein geschlossener Pfad in G, so sind folgende Aussagen äquivalent:

a) γ ist nullhomolog in G.

b) Für alle $f \in H(G)$ und $z \in G \setminus \gamma^*$ ist

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = (C_\gamma f)(z)$$

(Cauchysche Integralformel).

c) Für alle $f \in H(G)$ ist

$$\int\limits_\gamma f = 0.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b)
1. Wir zeigen: Für die Funktion $g : G \times G \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z,\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & z \neq \zeta \\ f'(z), & z = \zeta \end{cases}$$

gilt

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)}{(\zeta - z)^2}, & \zeta \neq z \\ \dfrac{f''(z)}{2}, & \zeta = z \end{cases}$$

und $\partial g/\partial z$ ist stetig auf $G \times G$.
Denn: Ist $(z_0, \zeta_0) \in G \times G$ mit $\zeta_0 \neq z_0$, so gilt mit der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z_0,\zeta_0) = \frac{f(\zeta_0) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta_0 - z_0)}{(\zeta_0 - z_0)^2}\,.$$

Ist $\zeta_0 = z_0$, so gilt für $z \neq z_0$

$$\begin{aligned} \frac{g(z,z_0) - g(z_0,z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{(z - z_0)^2}\big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big) \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^{\nu-2} \to \frac{f''(z_0)}{2} \quad (z \to z_0). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $\partial g/\partial z$ ist klar an allen Stellen (z_0, ζ_0) mit $z_0 \neq \zeta_0$.
Es sei also $z_0 = \zeta_0$ und $0 < R < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. Dann ist nach dem Taylor-Satz für Richtun-

gen ($\to$ Analysis) für $z, \zeta \in U_R(z_0), z \neq \zeta$ mit $w := (\zeta - z)/|\zeta - z|$ und $t = |\zeta - z|$

$$f(\zeta) = f(z + tw) = f(z) + \partial_w f(z) \cdot t + \int_0^t (t - s)\, \partial_w^2 f(z + sw)\, ds$$

$$= f(z) + f'(z) \cdot (\zeta - z) + (\zeta - z)^2 \frac{1}{t^2} \int_0^t (t - s)\, f''(z + sw)\, ds.$$

Weiter ergibt sich aus der Stetigkeit von f'' an z_0

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t (t - s) f''(z + sw)\, ds \to f''(z_0)\, \underbrace{\frac{1}{t^2} \int_0^t (t - s)\; ds}_{= 1/2}$$

für $(z, \zeta) \to (z_0, z_0)$. Also folgt für $(z, \zeta) \to (z_0, z_0)$

$$\frac{\partial g}{\partial z}\,(z, \zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{t^2} \displaystyle\int_0^t (t - s)\, f''(z + sw)\, ds, & \text{falls } z \neq \zeta \\ \dfrac{f''(z)}{2}, & \text{falls } z = \zeta \end{array} \right\} \to \frac{f''(z_0)}{2} = \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, z_0)\,.$$

Eine analoge (einfachere) Argumentation unter Nutzung des Taylor-Satzes für $n = 0$ statt $n = 1$ liefert auch die Stetigkeit von g auf $G \times G$.
2. Wir definieren $\varphi : G \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z, t) := g\big(z, \gamma(t)\big)\, \gamma'(t) \qquad \big(t \in [\alpha, \beta]\big).$$

O. E. sei γ' stetig auf $[\alpha, \beta]$ (ansonsten: geeignete Zerlegung von $[\alpha, \beta]$ betrachten). Dann ist nach S. 1.12 und 1. die Funktion $\Phi : G \to \mathbb{C}$ mit

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta \varphi(z, t)\, dt \qquad (z \in G)$$

differenzierbar auf G mit

$$\Phi'(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z, t)\, dt \qquad (z \in G).$$

Die Stetigkeit von $\partial\varphi/\partial z$ impliziet, dass auch Φ' stetig ist (Stetigkeit von Parameterintegralen; [Ü]), d. h. $\Phi \in H(G)$. Für $z \in G$ und $z \notin \gamma^*$ ist

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta g\big(z, \gamma(z)\big)\, \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma g(z, \zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i\, f(z)\, \mathrm{ind}_\gamma(z) = 2\pi i (C_\gamma f)(z) - 2\pi i\, f(z)\, \mathrm{ind}_\gamma(z).$$

Also reicht es, $\Phi \equiv 0$ zu zeigen.
Zunächst ist $C_\gamma f$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ nach B./D. 6.1 mit $\Phi(z) = 2\pi i(C_\gamma f)(z)$ für alle $z \in G \cap \operatorname{Ext}(\gamma)$. Aus $\operatorname{Int}(\gamma) \cup \gamma^* \subset G$ folgt $\partial G \subset G^c \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$. Damit ist durch

$$F(z) := \begin{cases} \Phi(z), & z \in G \\ 2\pi i(C_\gamma f)(z), & z \in G^c \end{cases}$$

eine ganze Funktion F definiert. Aus $F(z) = 2\pi i(C_\gamma f)(z)$ für $z \in \operatorname{Ext}(\gamma)$ ergibt sich zudem (wieder mit B./D. 6.1)

$$|F(z)| = |2\pi i(C_\gamma f)(z)| \to 0 \qquad (z \to \infty).$$

Mit dem Satz von Liouville folgt, dass F konstant ist und damit auch $F \equiv 0$ in $\mathbb{C}$. Also gilt für alle $z \in G$

$$\Phi(z) = F(z) = 0.$$

b) $\Rightarrow$ c) Es sei $z_0 \in G \setminus \gamma^*$. Dann gilt mit b), angewandt auf $f_0 : G \to \mathbb{C}$ mit $f_0(z) = (z - z_0)f(z)$:

$$0 = 2\pi i f(z_0) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \int_\gamma \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \int_\gamma f\,.$$

c) $\Rightarrow$ a) Folgt aus $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z} \in H(G)$ für alle $z \notin G$. $\square$

Bemerkung und Definition 6.6 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Beschränkte Komponenten von $\mathbb{C} \setminus G$ heißen *Löcher* von G. Weiter heißt G *einfach zusammenhängend*, falls G keine Löcher hat. Insbesondere ist jedes sternförmige Gebiet in $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend.
Ist γ ein beliebiger geschlossener Pfad in G so, dass $\operatorname{Int}(\gamma)$ keine Löcher von G enthält, so ist γ nullhomolog in G.
(Denn: $\operatorname{ind}_\gamma$ ist stetig und ganzzahlig auf $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, also insbesondere auf $A := \mathbb{C} \setminus G$. Da $\operatorname{ind}_\gamma$ konstant auf jeder Komponente von A ist, liegt eine Komponente entweder ganz in $\operatorname{Int}(\gamma)$ oder ganz in $\operatorname{Ext}(\gamma)$. Also liegen alle beschränkten Komponenten von A (falls existent) in $\operatorname{Ext}(\gamma)$. Aus $\operatorname{ind}_\gamma(\infty) \to 0$ für $z \to \infty$ folgt $\operatorname{ind}_\gamma \equiv 0$ auf allen unbeschränkten Komponenten von A. Folglich ist $\operatorname{Int}(\gamma) \subset G$.)
Insbesondere ergibt sich damit: Ist G einfach zusammenhängend, so ist jeder geschlossene Pfad in G nullhomolog in G. Nach dem Cauchy Theorem gilt folglich der Cauchysche Integralsatz auch für allgemeine einfach zusammenhängende Gebiete anstelle von sternförmigen!

Wir wollen nun den Residuensatz beweisen, ein Ergebnis, das man als wiederum Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel und des Cauchyschen Integralsatzes auffassen kann. Im Weiteren werden wir den Satz u. a. nutzen, um gewisse (z. T. reelle) Integrale bequem zu berechnen. Zunächst zum Begriff des Residuums.

Definition 6.7 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$. Dann heißt

$$\operatorname{Res}(f,a) := \hat{f}_{V_{0,R(a)}}(-1) \Big(= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=r} f(\zeta)d\zeta \;\text{ für } 0 < r < R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega \setminus \{a\}) \Big)$$

Residuum von f an der Stelle a.

Beispiel 6.8 (vgl. B.5.2)
1. Hat f an a eine hebbare Singularität, so gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = 0\,.$$

2. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $f(z) = e^z/z^p$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{(p-1)!};.$$

3. Für

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{z^\nu} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

gilt $\operatorname{Res}(f,0) = 1$.

Satz 6.9 *(Residuensatz)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f holomorph in $G \setminus A$ für eine Menge $A \subset G$ ohne Häufungspunkt in G. Dann gilt für alle geschlossenen Pfade γ in $G \setminus A$

$$\int\limits_\gamma f = 2\pi i \sum_{w \in A \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{Res}(f,w)\,.$$

Beweis. Es sei $A_0 := A \cap \operatorname{Int}(\gamma)$. Dann ist A_0 endlich, da ansonsten A_0 nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass einen Häufungspunkt in G hätte (man beachte $\operatorname{Int}(\gamma) \cup \gamma^*$ ist kompakt in $\mathbb{C}$).
O. E. können wir $A_0 \neq \emptyset$ annehmen (für $A_0 = \emptyset$ ergibt sich die Behauptung aus B. 6.6).
Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(w) \subset \operatorname{Int}(\gamma)$ für alle $w \in A_0$ und

$$|w - \tilde{w}| > \delta$$

für alle $w, \tilde{w} \in A_0$, $w \neq \tilde{w}$ gilt. Dann hat f für alle $w \in A_0$ nach S.4.13 eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(\nu)(z-w)^\nu$$

in $V(w) := V_{0,\delta}(w)$. Der Hauptteil

$$h_w(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(-\nu)(z-w)^{-\nu}$$

konvergiert dann gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $V_{0,\infty}(w) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$ (vgl. B. 4.10). Also folgt für $w \in A_0$

$$\begin{aligned} \int_\gamma h_w(z)dz &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(-\nu) \int_\gamma \frac{dz}{(z-w)^\nu} \\ &= \hat{f}_{V(w)}(-1) \cdot 2\pi i \,\mathrm{ind}_\gamma(w) = 2\pi i \,\mathrm{ind}_\gamma(w) \cdot \mathrm{Res}(f, w)\,. \end{aligned}$$

(Man beachte dabei: Für $\nu > 1$ ist $\int_\gamma (z-w)^{-\nu} dz = 0$ nach B.3.16.)

Die Funktion $g : G \setminus A \to \mathbb{C}$

$$g(z) := f(z) - \sum_{w \in A_0} h_w(z) \qquad (z \in G \setminus A)$$

ist holomorph in $G \setminus A$, und für $w \in A_0$ gilt in $V(w)$

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(\nu)(z-w)^\nu - \sum_{\tilde{w} \in A_0,\, w \neq \tilde{w}} h_{\tilde{w}}(z)\,.$$

Da die rechte Seite holomorph in $U_\delta(w)$ ist, hat g an w eine hebbare Singularität. Also ist g holomorph fortsetzbar nach $(G \setminus A) \cup A_0$. Da γ nach B. 6.6 nullhomolog in $(G \setminus A) \cup A_0$ ist (man beachte: $(G \setminus A) \cup A_0$ hat keine Löcher in $\mathrm{Int}(\gamma)$), ergibt sich

$$\int_\gamma g = 0$$

aus dem Cauchy Theorem. Folglich ist

$$0 = \int_\gamma f - \sum_{w \in A_0} \int_\gamma h_w = \int_\gamma f - 2\pi i \sum_{w \in A_0} \mathrm{ind}_\gamma(w) \cdot \mathrm{Res}(f, w)\,.$$

□

Um den Residuensatz anwenden zu können, ist es wichtig, Techniken zur Berechnung von Residuen zur Verfügung zu haben. Für Pole gilt:

Satz 6.10 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in H(\Omega)$.*

1. *Hat f an a einen Pol der Ordnung p, so ist $\varphi(z) := (z-a)^p f(z)$ holomorph fortsetzbar nach $\Omega \cup \{a\}$, und es gilt*

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \big((z-a)^p f(z)\big)\,.$$

2. *Existieren eine offene Umgebung U von a und Funktionen $g, h \in H(U)$ mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und $f = g/h$ in $U \setminus \{a\}$, so gilt*

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Beweis. 1. Es gilt für $z \in V := V_{0,R}(a)$, wobei $U_R(a) \subset \Omega \cup \{a\}$,

$$\varphi(z) = (z-a)^p f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_V(\nu-p)(z-a)^{\nu}\,.$$

Also ist (da die rechte Seite holomorph in $U_R(a)$ ist)

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\big((z-a)^p f(z)\big)\,.$$

2. Ist $g(a) \neq 0$, so hat nach Voraussetzung h/g eine Nullstelle der Ordnung 1 an a, also hat f einen Pol der Ordnung 1 an a. Nach 1. ist

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to a} g(z) \lim_{z\to a}\frac{1}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Ist $g(a) = 0$, so hat g/h eine hebbare Singularität an a, da h eine Nullstelle der Ordnung 1 an a hat ([Ü]). Also ist dann $\operatorname{Res}(f,a) = 0$. □

Beispiel 6.11 1. Es sei $f(z) = \cot z = \cos z/\sin z$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$. Dann gilt mit $g(z) = \cos z, h(z) = \sin z$ nach S.6.10.2

$$g(k\pi) = (-1)^k, \qquad h(k\pi) = 0, \qquad h'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

und damit

$$\operatorname{Res}(f,k\pi) = \frac{g(k\pi)}{h'(k\pi)} = 1 \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

2. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm i\})$. Dann gilt mit $g(z) = 1$, $h(z) = 1+z^2$ nach S.6.10.2

$$\operatorname{Res}(f,\pm i) = \pm\frac{1}{2i} = \mp\frac{i}{2}\,.$$

Dies sieht man auch leicht direkt mittels Partialbruchzerlebung: Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i}{2}\,\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i}\,,$$

also

$$\operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=1} f(z)dz = -\frac{i}{2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=1}\frac{dz}{z-i} = -\frac{i}{2}$$

(und entsprechend für $-i$).

3. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ $(z \neq \pm i)$. Dann hat f an $\pm i$ Pole der Ordnung 2. Es gilt nach S.6.10.1

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\big((z-i)^2 f(z)\big) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{(z+i)^2}\Big) = \lim_{z\to i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}\,.$$

7 Anwendungen des Residuensatzes

Wir werden nun zeigen, dass man den Residuensatz insbesondere dafür nutzen kann, uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

zu berechnen. Vorbereitend betrachten wir geeignete geschlossene Pfade.

Bemerkung 7.1 Für $R > 0$ seien

$$\gamma_R^+(t) := \begin{cases} Re^{it}, & t \in (0, \pi] \\ R\cos t, & t \in (-\pi, 0] \end{cases}$$

und

$$\gamma_R^-(t) := \begin{cases} Re^{it}, & t \in (-\pi, 0] \\ R\cos t, & t \in (0, \pi] \end{cases}$$

Dann sind $\gamma_R^\pm$ geschlossene Pfade in $\mathbb{C}$ und nach der Substitutionsregel gilt

$$\int_{-\pi}^{0} f(\gamma_R^+(t))(\gamma_R^+)'(t)\,dt = \int_{-R}^{R} f \quad \text{und} \quad \int_{0}^{\pi} f(\gamma_R^-(t))(\gamma_R^-)'(t)\,dt = -\int_{-R}^{R} f\,.$$

Also ergibt sich für f stetig auf $K_R(0) \cup [-R, R]$

$$\int_{\gamma_R^+} f + \int_{\gamma_R^-} f = \int_{K_R(0)} f$$

Insbesondere ist für $z \in U_R(0)$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ (da $z \in \mathrm{Ext}(\gamma_R^-)$)

$$\mathrm{ind}_{\gamma_R^+}(z) = \mathrm{ind}_{K_R(0)}(z) - \mathrm{ind}_{\gamma_R^-}(z) = 1\,.$$

Satz 7.2 *Es sei $E := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, und es sei $A \subset E^0$ endlich. Ferner sei $f \in H(G \setminus A)$, wobei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $E \subset G$ ist, und so, dass Konstanten $R_0, M > 0$ und $\alpha > 1$ existieren mit*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha} \qquad (z \in E, |z| \geq R_0)\,.$$

Dann existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \,=\, 2\pi i \sum_{w \in A} \mathrm{Res}(f, w)\,.$$

Beweis. Zunächst folgt aus $|f(x)| \leq M/|x|^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}, |x| \geq R_0$ und der Existenz der Integrale $\int_1^\infty dx/x^\alpha$ und $\int_{-\infty}^{-1} dx/|x|^\alpha$ auch die Existenz der Integrale $\int_0^\infty f(x)dx$ und $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ (man beachte dabei: f ist stetig auf $\mathbb{R}$).
O.E. können wir davon ausgehen, dass $|w| < R_0$ für alle $w \in A$ gilt. Für $R \geq R_0$ betrachten wir den Pfad γ_R^+ aus B. 7.1. Dann folgt aus dem Residuensatz und B. 7.1

$$\int_{\gamma_R^+} f = 2\pi i \sum_{w \in A} \operatorname{Res}(f, w) \qquad \text{für alle } R \geq R_0.$$

Weiter gilt

$$\Big| \int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it}\, dt \Big| \leq \frac{M}{R^\alpha} \cdot \pi R = \frac{M\pi}{R^{\alpha-1}} \to 0 \qquad (R \to \infty)\,.$$

Also erhalten wir

$$2\pi i \sum_{w \in A} \operatorname{Res}(f, w) - \int_{-R}^{R} f = \int_{\gamma_R^+} f - \int_{-R}^{R} f = \int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it}\, dt \to 0$$

für $R \to \infty$, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 7.3 Insbesondere lässt sich S.7.2 bei Integranden der Form

$$f(x) = e^{iax} \frac{P(x)}{Q(x)} = \cos(ax) \frac{P(x)}{Q(x)} + i \sin(ax) \frac{P(x)}{Q(x)}$$

anwenden, wobei $a \geq 0$ ist und wobei P und Q Polynome sind mit $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ und $Q(x) \neq 0\, (x \in \mathbb{R})$.
(Denn: Es sei

$$A := Z(Q) \cap E^0$$

die Menge der Nullstellen von Q in der oberen Halbebene E^0. Dann ist

$$f(z) := e^{iaz} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

holomorph in $G_\delta \setminus A$, für $G_\delta := \{z : \operatorname{Im}(z) > -\delta\}$ mit einem $\delta > 0$. Außerdem gilt für $\operatorname{Im}(z) \geq 0, z = x + iy$ mit einem $M > 0$

$$|f(z)| = \underbrace{e^{-ay}}_{\leq 1} \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{M}{|z|^2}$$

für $|z|$ genügend groß. Damit sind alle Voraussetzungen von S.7.2 erfüllt.)

Beispiel 7.4 Für $a > 0$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})\,.$$

Dann ist f wie in B. 7.3. Also gilt nach S.7.2 (man beachte, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ax)/(1+x^2)\,dx = 0$$

gilt, da der Integrand ungerade ist)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx \;=\; 2\pi i \operatorname{Res}(f,i)\,.$$

Weiter ist (etwa nach S.6.10.2)

$$\operatorname{Res}(f,i) = \left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2i}\,,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-a}\,.$$

Eine weitere interessante Klasse von Integralen, die mittels des Residuensatzes oft leicht berechnet werden können, sind Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t)dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^{2\pi} R(\sin t)dt\,,$$

wobei R eine rationale Funktion ist. Beachtet man, dass

$$\cos t = \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\,, \qquad \sin t = \frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)$$

für $z = e^{it}$ gilt, so ergibt sich mit

$$R^*(z) = \frac{1}{z}\,R\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big) \qquad \text{bzw.} \qquad R^{**}(z) = \frac{1}{z}\,R\Big(\frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)\Big)$$

dabei (falls R^* bzw. R^{**} stetig auf $|z| = 1$ sind)

$$\int_{|z|=1} R^*(z)dz \;=\; i \int_{|z|=1} R\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big)\frac{dz}{iz} \;=\; i\int_0^{2\pi} R(\cos t)dt \tag{7.1}$$

bzw.

$$\int_{|z|=1} R^{**}(z)dz \;=\; i \int_{|z|=1} R\Big(\frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)\Big)\frac{dz}{iz} \;=\; i\int_0^{2\pi} R(\sin t)dt \tag{7.2}$$

Dies beweist schon im Wesentlichen folgenden

Satz 7.5 *Es sei R eine rationale Funktion.*

1. *Ist*
$$R^*(z) := \frac{1}{z} R\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big)\Big)$$
holomorph in $U_r(0)\setminus A^*$ für eine endliche Menge $A^*\subset\mathbb{D}$ und ein $r>1$, so gilt
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t)dt = 2\pi \sum_{w\in A^*} \mathrm{Res}(R^*, w)\,.$$

2. *Ist*
$$R^{**}(z) := \frac{1}{z} R\Big(\frac{1}{2i}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big)$$
holomorph in $U_r(0)\setminus A^{**}$ für eine endliche Menge $A^{**}\subset\mathbb{D}$ und ein $r>1$, so folgt
$$\int_0^{2\pi} R(\sin t)dt = 2\pi \sum_{w\in A^{**}} \mathrm{Res}(R^{**}, w)\,.$$

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus (7.1) bzw. (7.2) und dem Residuensatz, angewandt auf R^* bzw. R^{**} und $G = U_r(0)$ sowie $\gamma(t) = e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$. □

Beispiel 7.6 1. Für $0<\rho<1$ betrachten wir das Integral
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\rho\cos t+\rho^2}\,.$$
Ist
$$R(\cos t) = \frac{1}{1-2\rho\cos t+\rho^2}$$
und
$$R^*(z) = \frac{1}{z}R\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big)\Big) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\rho(z+1/z)+\rho^2} = \frac{1}{(z-\rho)(1-\rho z)}\,,$$
so hat R^* die beiden einfachen Pole $\rho<1$ und $1/\rho>1$. Also gilt nach S.7.5 und S.6.10.1
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\rho\cos t+\rho^2} = 2\pi\cdot\mathrm{Res}(R^*,\rho) = 2\pi\cdot\frac{1}{1-\rho z}_{|z=\rho} = \frac{2\pi}{1-\rho^2}\,.$$
Für die Funktion
$$P(\rho,t) := \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} \quad (0<\rho<1, 0\le t\le 2\pi)$$
folgt also
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,t)dt = 1$$

für alle ρ. Diese Funktion, der sogenannte Poisson-Kern, spielt eine wichtige Rolle in der Theorie harmonischer Funktionen.
2. Für $p \in \mathbb{N}$ und $a > 1$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^p} .$$

Hier ist

$$R(\cos t) = \frac{1}{(a+\cos t)^p} ,$$

also

$$R^*(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(a+(z+1/z)/2)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z^2+2az+1)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z-w_1)^p (z-w_2)^p}$$

mit $w_1 = -a + \sqrt{a^2-1} \in (-1,0)$ und $w_2 = -a - \sqrt{a^2-1} < -1$.
Also ergibt sich aus S.7.5 und S.6.10.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^p} = 2\pi \cdot \operatorname{Res}(R^*, w_1) = \frac{2\pi}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left(\frac{2^p z^{p-1}}{(z-w_2)^p} \right)_{|z=w_1} .$$

Für $p = 1$ erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = 2\pi \cdot \frac{2}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} ,$$

und für $p = 2$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{(a+\cos t)^2} &= 2\pi \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{4z}{(z-w_2)^2} \right)_{|z=w_1} \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{-w_1-w_2}{(w_1-w_2)^3} = \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-1}^3} . \end{aligned}$$

Wir kommen zum Schluss dieses Abschnittes zu zwei interessanten funktionentheoretischen Anwendungen des Residuensatzes.

Satz 7.7 *(Argumentprinzip)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei f meromorph in G. Ist γ ein geschlossener Pfad in $G \setminus (Z(f) \cup P(f))$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w \in Z(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot n(w) - \sum_{w \in P(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot p(w) ,$$

wobei $n(w) = n_f(w)$ die Ordnung der Nullstelle w von f und $p(w) = p_f(w)$ die Ordnung der Polstelle w von f bezeichnet.

Beweis. 1. Ist a eine Nullstelle von f der Ordnung $n(a)$, so existiert eine in einer offenen Umgebung U von a holomorphe Funktion g mit $g(z) \neq 0$ in U und

$$f(z) = (z-a)^{n(a)} g(z) \qquad (z \in U)\,.$$

Also folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \frac{n(a)}{z-a} \;+\; \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{in } U \setminus \{a\}\,.$$

d.h. f'/f hat an a einen Pol der Ordnung 1, und es gilt

$$\operatorname{Res}\big(\frac{f'}{f}, a\big) = n(a)\,.$$

2. Ist a ein Pol der Ordnung $p(a)$ von f, so existiert ein in einer Umgebung U von a holomorphe Funktion g mit $g(z) \neq 0$ in U und

$$f(z) \;=\; \frac{g(z)}{(z-a)^{p(a)}} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Aus

$$f'(z) = g'(z) \cdot \frac{1}{(z-a)^{p(a)}} \;+\; g(z) \cdot \frac{-p(a)}{(z-a)^{p(a)+1}} \qquad (z \in U \setminus \{a\})$$

folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \frac{g'(z)}{g(z)} \;-\; \frac{p(a)}{z-a} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,,$$

d.h. f'/f hat wieder einen Pol 1. Ordnung an a mit

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f'}{f}, a\Big) = -p(a)\,.$$

3. Ist γ ein geschlossener Pfad in $G \setminus (Z(f) \cup P(f))$, so gilt nach S. 6.9 und 1. und 2. (man beachte: $Z(f) \cup P(f)$ hat keine Häufungspunkte in G)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'}{f} \;=\; \sum_{w \in Z(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot n(w) \;-\; \sum_{w \in P(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot p(w)\,. \qquad \square$$

Bemerkung und Definition 7.8 Für geschlossene Pfade γ mit $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$ (wir nennen solche Pfade *einfach geschlossen*) ergibt sich unter den Voraussetzungen von S. 7.7

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'}{f} \;=\; \sum_{w \in Z(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} n(w) \;-\; \sum_{w \in P(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} p(w)\,. \tag{7.3}$$

d.h. das Integral auf der linken Seite gibt die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Polstellen von f in $\operatorname{Int}(\gamma)$ (inkl. Vielfachheiten) an.

Ist unter den Voraussetzungen von S. 7.7 zusätzlich f holomorph in G (m. a. W. $P(f) = \emptyset$) und ist γ ein einfach geschlossener Pfad in $G \setminus Z(f)$, so erhalten wir aus (7.3)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'}{f} \;=\; \sum_{w \in Z(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} n(w)\,. \tag{7.4}$$

d.h. das Integral auf der linken Seite „zählt“ die Nullstellen von f in $\mathrm{Int}(\gamma)$ (inkl. Vielfachheiten).

Als Folgerung aus dem Argument-Prinzip (bzw. (7.4)) erhalten wir

Satz 7.9 *(Rouché)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es seien $f, g \in H(G)$. Ferner sei γ ein einfach geschlossener Pfad in G so, dass

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \textit{für alle } z \in \gamma^* .$$

Dann haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\mathrm{Int}(\gamma)$ (incl. Vielfachheiten), d. h.

$$\sum_{w \in Z(f) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_f(w) = \sum_{w \in Z(g) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_g(w) .$$

Beweis. Für $t \in [0,1]$ betrachten wir die Funktionen $\varphi_t \in H(G)$ mit

$$\varphi_t := f + t(g - f) = f - th$$

mit $h := f - g$. Für $z \in \gamma^*$ gilt

$$|\varphi_t(z)| \geq |f(z)| - t|h(z)| \geq |f(z)| - |h(z)| > 0 ,$$

so dass φ_t auf γ^* keine Nullstellen hat. Nach (7.4) gilt für $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi_t'(z)}{\varphi_t(z)} dz \ = \sum_{w \in Z(\varphi_t) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_{\varphi_t}(w) \ =: \ N(t) .$$

Die Funktion $N : [0,1] \to \mathbb{N}_0$ ist stetig.
(Denn: Sind $t_1, t_2 \in [0,1]$, so gilt

$$\big|2\pi i\big(N(t_2) - N(t_1)\big)\big| = \Big| \int_\gamma \frac{(t_2 - t_1)(f'h - fh')}{(f - t_1 h)(f - t_2 h)} \Big| \leq |t_2 - t_1| \, \Big\| \frac{fh' - f'h}{(|f| - |h|)^2} \Big\|_{\infty, \gamma^*} L(\gamma) .$$

Dies zeigt die (Lipschitz-)Stetigkeit von N.)
Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, ist $N(t) \equiv$ const auf $[0,1]$, also insbesondere

$$\sum_{w \in Z(g) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_g(w) \ = N(1) = N(0) = \sum_{w \in Z(f) \cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_f(w) .$$

□

Wir geben einige typische Anwendungsbeispiele zum Satz von Rouché.

Beispiel 7.10 1. Wir beweisen noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra. Also: Es sei $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{w \in Z(P)} n(w) = n$, d.h. P hat n Nullstellen inkl. Vielfachheiten.
(Denn: Ist $Q(z) := a_n z^n$, so gilt für R genügend groß

$$|P(z) - Q(z)| = \Big|\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu\Big| < |a_n z^n| = |Q(z)| \qquad (|z| = R)\,.$$

Also ergibt sich aus S. 7.9 (mit $\gamma(t) = Re^{it}$)

$$\sum_{w \in Z(P) \cap U_R(0)} n_P(w) = \sum_{w \in Z(Q) \cap U_R(0)} n_Q(w) = n_Q(0) = n\,.)$$

2. Wir betrachten die (transzendente) Gleichung

$$e^z = 1 + 2z\,.$$

Wir suchen alle Lösungen in $\mathbb{D}$. Offensichtlich ist $z = 0$ eine Lösung. Mit $f(z) = 2z$ und $g(z) = 1 + 2z - e^z$ gilt für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = |e^z - 1| < 2 = |f(z)|$$

(beachte: für $|z| \le 1$ gilt

$$|e^z - 1| \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z|^\nu}{\nu!} = e^{|z|} - 1 \le e - 1 < 2\,)\,.$$

Also haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{D}$, nämlich eine. Folglich ist $z = 0$ die einzige Lösung der Gleichung in $\mathbb{D}$.

Wir studieren zum Abschluss einige Auswirkungen des Satzes von Rouché auf Funktionenfolgen.

Satz 7.11 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es seien $f_n \in H(G)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G. Ist γ ein einfach geschlossener Pfad in G und ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \gamma^*$, so haben f und f_n für n genügend groß die gleiche Anzahl von Nullstellen (inkl. Vielfachheiten) in* $\mathrm{Int}(\gamma)$.

Beweis. Da f stetig auf γ^* ist, gilt

$$\delta := \min_{z \in \gamma^*} |f(z)| > 0\,.$$

Da $\gamma^* \subset G$ kompakt ist, existiert ein $N = N(\delta) > 0$ so, dass

$$\max_{z \in \gamma^*} |f(z) - f_n(z)| < \delta$$

für alle $n \ge N$ gilt. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Rouché (S. 7.9). □

Beispiel 7.12 Es sei

$$f(z) = e^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Dann gilt für die n-ten Teilsummen $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z^\nu/\nu!$ nach S. 7.11, angewandt mit $\gamma(t) = Re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$: Für alle $R > 0$ existiert ein $N = N(R)$ so, dass s_n für alle $n \geq N$ in $|z| < R$ keine Nullstelle hat (d.h. die Nullstellen, die nach dem Fundamentalsatz der Algebra ja existieren, rücken mit wachsendem n immer weiter „Richtung ∞").

Als Folgerung aus S. 7.11 erhalten wir insbesondere

Satz 7.13 *(Hurwitz)*
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G und $Z(f_n) = \emptyset$ für ∞ viele n, so ist entweder $f \equiv 0$ in G oder es ist $Z(f) = \emptyset$.

Beweis. Es sei $f \not\equiv 0$ in G. Angenommen, f habe eine Nullstelle z_0, etwa der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Ist $r > 0$ so, dass $f(z) \neq 0$ in $\overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ gilt, so folgt aus S. 7.11 (angewandt auf $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$), dass f_n für n genügend groß in $U_r(z_0)$ ebenfalls m Nullstellen hat. Widerspruch! □

8 Harmonische Funktionen und Dirichlet Problem

Ist $f \in C^1(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen ist, so wisssen wir bereits, dass f genau dann holomorph in Ω ist, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

gilt, also genau dann, wenn f die homogene partielle Differenzialgleichung $\overline{\partial} f = 0$ mit

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2i}\big(i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\big) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)$$

löst. Wir betrachten jetzt Lösungen einer anderen homogenen partiellen Differenzialgleichung, der sog. Laplace-Gleichung.

Definition 8.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Eine Funktion $f \in C^2(\Omega, \mathbb{K})$ heißt *harmonisch*, falls

$$\Delta f := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 f \equiv 0 \text{ auf } \Omega$$

gilt. Wir setzen

$$\mathrm{Har}(\Omega) := \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ harmonisch}\}.$$

Wir werden uns im Folgenden auf den Fall $d = 2$ (also $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) beschränken. Hier gibt es enge Verbindungen zu holomorphen Funktionen:

Bemerkung 8.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gilt

1. $H(\Omega) \subset \mathrm{Har}(\Omega)$.
2. Ist $f \in \mathrm{Har}(\Omega)$, so ist
$$\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y} \in H(\Omega).$$
3. Ist $f = u + iv$ mit $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, so sind äquivalent
   a) $f \in \mathrm{Har}(\Omega)$,
   b) $\overline{f} \in \mathrm{Har}(\Omega)$,
   c) $u, v \in \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{R})$.

   Dies zeigt, dass man sich (anders als im Falle holomorpher Funktionen) im Wesentlichen auf die Untersuchung reellwertiger harmonischer Funktionen beschränken kann.

(Denn:
1. Ist f holomorph in Ω, so gilt nach S. 1.19

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x} = if' \text{ auf } \Omega.$$

Da auch f' holomorph ist, erhält man wieder mit S. 1.19

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\,(if') = -\,\frac{\partial f'}{\partial x} = -\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

2. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C^1(\Omega)$ und

$$i\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = i\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -i\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y} \in H(\Omega)$ nach S. 1.19.
3. [Ü].)

Als Folgerung erhalten wir

Satz 8.3 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $u \in \mathrm{Har}(G, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:*

a) $u = \mathrm{Re} f$ für ein $f \in H(G)$.

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$ hat eine Stammfunktion in G.

In diesem Fall ist f aus a) eine Stammfunktion.

Beweis. Zunächst gilt für beliebiges $f \in H(G)$

$$\frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial x} = \mathrm{Re}\,\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{Re} f'$$

und

$$\frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial y} = \mathrm{Re}\,\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{Re}(if') = -\mathrm{Im}(f').$$

a) $\Rightarrow$ b): Ist $u = \mathrm{Re} f$, so folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{Re} f' + i\,\mathrm{Im} f' = f'.$$

b) $\Rightarrow$ a): Ist f eine Stammfunktion zu $\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$ auf G (ohne Einschränkung so, dass $\mathrm{Re} f(z_0) = u(z_0)$ für ein $z_0 \in G$), so gilt

$$\mathrm{Re} f' + i\,\mathrm{Im} f' = f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

also

$$\frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

und damit ist (siehe Analysis) $u - \mathrm{Re} f \equiv \mathrm{const} = u(z_0) - \mathrm{Re} f(z_0) = 0$. □

Bemerkung 8.4 1. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, so hat $\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \in H(G)$ nach S. 3.1 eine Stammfunktion, also ist $u = \mathrm{Re} f$ für ein $f \in H(G)$.
2. Im Allgemeinen ist nicht jede Funktion $u \in \mathrm{Har}(G, \mathbb{R})$ von der Form $u = \mathrm{Re} f$ für ein $f \in H(G)$. Ist etwa $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $u : G \to \mathbb{R}$ mit

$$u(z) := \ln|z| \qquad (z \neq 0)$$

harmonisch in G mit
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0).$$

Bekanntlich hat $z \mapsto 1/z$ keine Stammfunktion in G, und damit existiert kein $f \in H(G)$ mit $u = \mathrm{Re} f$.

Satz 8.5 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $f \in \mathrm{Har}(G)$.*

1. *(Mittelwert-Formel)*

   Ist $z_0 \in G$, so gilt für alle $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt. \tag{8.1}$$

2. *(Identitätssatz)*

   Ist $g \in \mathrm{Har}(G)$ und gilt $f_{|U} = g_{|U}$ für eine offene Menge $U \subset G$, so ist $f = g$.

Beweis.
1. Es sei $u = \mathrm{Re} f$, und es sei $z_0 \in G$. Da $U_\rho(z_0)$ mit $\rho := \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$ sternförmig ist, existiert eine Funktion $h \in H\big(U_\rho(z_0)\big)$ mit $u = \mathrm{Re}\, h$ auf $U_\rho(z_0)$ (B. 8.4). Also ergibt sich nach der Mittelwert-Formel (1.1) für $0 < r < \rho$

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\big(h(z_0)\big) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{it})dt\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, h(z_0 + re^{it})dt.$$

Eine entsprechende Argumentation gilt für $\mathrm{Im} f$. Zusammensetzen liefert dann die Behauptung für f.
2. Ohne Einschränkung sei $g \equiv 0$ (ansonsten betrachte man $\tilde{f} = f - g$).
Wieder sei $u := \mathrm{Re} f$. Dann ist nach B. 8.2.3

$$h := \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \in H(G).$$

Da U offen ist, folgt aus $f_{|U} = 0$ auch $h_{|U} = 0$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ist $h \equiv 0$ auf G, also ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{auf } G$$

und damit (siehe Analysis) $u \equiv \text{const}$ auf G. Aus $u(z) = 0$ auf U folgt $u \equiv 0$.
Entsprechendes gilt wieder für $\text{Im} f$. □

Bemerkung 8.6 Für analytische – und damit für holomorphe – Funktionen gilt bekanntlich eine stärkere Version des Identitätssatzes (S. 1.7). Ein entsprechendes Resultat ist im Allgemeinen nicht gültig für harmonische Funktionen. So gilt etwa für $u, v \in \text{Har}(\mathbb{C})$ mit

$$u(z) = \text{Re}\, z, \qquad v(z) \equiv 0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

zwar für $u(z) = v(z)$ für $z \in i\mathbb{R}$, aber $u \not\equiv v$.

Satz 8.7 *(Maximum-Prinzip)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt:

1. *Ist $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch und hat u ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, so ist $u \equiv \text{const}$.*
2. *Ist G beschränkt und ist $u \in C(\overline{G}, \mathbb{R})$ harmonisch in G, so existieren $\zeta^*, \zeta_* \in \partial G$ mit*

$$u(\zeta^*) = \max_{z \in \overline{G}} u(z) \quad \textit{und} \quad u(\zeta_*) = \min_{z \in \overline{G}} u(z)\ .$$

Beweis.
1. Wie im Beweis zu S. 2.8 sieht man unter Verwendung der Mittelwert-Formel (8.1): Hat u ein lokales Maximum an $z_0 \in G$, so gilt $u(z) = u(z_0)$ auf $U_r(z_0)$ für ein $r > 0$. Nach S. 8.5.2 ist dann $u(z) \equiv u(z_0)$ auf G.
Da mit u auch $-u$ harmonisch ist, gilt dies auch im Falle der Existenz eines lokalen Minimums.
2. Wie Beweis zu S. 2.9. □

Bemerkung 8.8 Ist G sei beschränktes Gebiet und ist $f \in C(\overline{G})$ harmonisch in G, so folgt aus $f_{|\partial G} = 0$ schon $f \equiv 0$.
(Denn: Ist $u := \text{Re}\, f$, so ist $u = 0$ auf ∂G. Damit ist nach S. 8.7.2 auch $u = 0$ auf G Entsprechendes gilt für $\text{Im}\, f$.)

Eine der zentralen Fragestellungen ist die nach der „harmonischen Fortsetzbarkeit“ stetiger Funktionen.

Definition 8.9 Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, und es sei $\varphi : \partial G \to \mathbb{K}$ stetig. Unter dem Dirichlet-Problem $D(G, \varphi)$ versteht man die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Funktionen $f \in C(\overline{G})$ mit

$$\Delta f = 0 \quad \text{auf } G$$

und

$$f_{|\partial G} = \varphi$$

(also f harmonisch in G mit Randwerten φ).

Wir betrachten wieder nur den Fall $d = 2$. Die Frage der Eindeutigkeit lässt sich – jedenfalls für beschränkte Gebiete – leicht klären.

Satz 8.10 *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, so existiert für alle $\varphi \in C(\partial G)$ höchstens eine Lösung von $D(G, \varphi)$.*

Beweis. Es seien f_1, f_2 Lösungen. Dann ist $f_1 - f_2 \in C(\overline{G})$ mit $f_1 - f_2 \in \mathrm{Har}(G)$ sowie $(f_1 - f_2)_{|\partial G} = 0$. Also ist $f_1 - f_2 \equiv 0$ auf G nach B. 8.8. □

Bei der Suche nach Lösungen werden wir (aus Zeitgründen) sehr bescheiden. Wir betrachten speziell den Fall $G = \mathbb{D}$. Wie könnte eine Lösung aussehen?
Wir betrachten eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in $\mathbb{K}$ mit

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq 1 \quad \text{und} \quad \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \leq 1 \, .$$

Dann haben die beiden Potenzreihen

$$\Phi^+(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

und

$$\Phi^-(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{a_{-\nu}} \, z^\nu$$

Konvergenzradius ≥ 1, d.h. es gilt $\Phi^+, \Phi^- \in H(\mathbb{D})$. Setzt man

$$\Phi := \Phi^+ + \overline{\Phi^-},$$

so ist $\Phi \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$ nach B. 8.2, und es gilt

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \overline{z}^\nu \qquad (z \in \mathbb{D})$$

mit gleichmäßiger Konvergenz der Reihen auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$.
Konvergiert die Reihe

$$\varphi(w) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \overline{w}^\nu$$

für gewisse $w \in S = \partial\mathbb{D}$, so kann man zumindest die Hoffnung hegen, dass für solche w gilt

$$\Phi(z) \to \varphi(w) \qquad (z \to w).$$

Dies wollen wir genauer untersuchen.

Bemerkung und Definition 8.11 1. Wir setzen

$$R(S) := R(S, \mathbb{K}) := \left\{\varphi : S \to \mathbb{K} : t \mapsto \varphi(e^{it}) \in R[-\pi, \pi]\right\}$$

und betrachten – etwas allgemeiner als früher – für $\varphi \in R(S)$ die Fourier-Koeffizienten

$$\hat{\varphi}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_S \varphi(\zeta)\overline{\zeta}^{\nu} |d\zeta| := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it}) e^{-i\nu t} dt.$$

Es gilt dabei

$$\left|\hat{\varphi}(\nu)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi(e^{it})\right| dt \qquad (\nu \in \mathbb{Z}),$$

d.h. die Folge $\left(\hat{\varphi}(\nu)\right)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ ist beschränkt.
2. Es seien $f \in C(\mathbb{D})$ und $g \in R(S)$. Dann setzen wir

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_S f(z\overline{\zeta}) g(\zeta) |d\zeta| \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

(Man beachte: Für $z \in \mathbb{D}$ fest ist

$$t \mapsto f(ze^{-it}) g(e^{it}) \in R[-\pi, \pi],$$

also existiert das Integral.)
Weiter betrachten wir $P : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^{\nu}.$$

Dann ist $P \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$ (nach der Vorbemerkung mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$), und es gilt für $\varphi \in R(S)$ und für $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} (P * \varphi)(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \overline{\zeta}^{\nu} \right) \varphi(\zeta) |d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^{\nu} \zeta^{\nu} \right) \varphi(\zeta) |d\zeta| \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \hat{\varphi}(\nu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^{\nu} \hat{\varphi}(-\nu) \end{aligned} \tag{8.2}$$

(da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \overline{\zeta}^{\nu}$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^{\nu} \zeta^{\nu}$ gleichmäßig auf S konvergieren.)
Wie in der Vorbemerkung gesehen ist damit auch $P * \varphi \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$.

Satz 8.12 *Es sei $\varphi \in R(S)$. Ist φ stetig an $w \in S$, so ist*

$$\lim_{z\to w}(P * \varphi)(z) = \varphi(w).$$

Insbesondere ist im Falle $\varphi \in C(S)$ die Funktion $P * \varphi$ Lösung des Dirichlet-Problems $D(\mathbb{D}, \varphi)$.

Beweis.
1. Es gilt zunächst

(i) $P(z) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \qquad (z \in \mathbb{D})$,

(ii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_S P(z\overline{\zeta})|d\zeta| = 1 \qquad (z \in \mathbb{D})$,

(iii) Für alle $w \in S$ und $\delta > 0$ gilt $\displaystyle\lim_{z\to w} \sup_{|\zeta-w|\geq\delta} P(z\overline{\zeta}) = 0$.

Zu (i): Für $z \in \mathbb{D}$ ist

$$P(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1-\overline{z}+\overline{z}(1-z)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0.$$

Zu (ii): Es gilt mit $\varphi(z) \equiv 1$ und (8.2) (da $\hat{\varphi}(\nu) = \delta_{0,\nu}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})|d\zeta| = (P * \varphi)(z) \equiv 1.$$

Zu (iii): Ist $|z-w| < \delta/2$, so folgt für alle ζ mit $|\zeta - w| \geq \delta$

$$P(z\overline{\zeta}) = \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} \leq \frac{1-|z|^2}{(|\zeta-w|-|w-z|)^2} \leq \frac{1-|z|^2}{\delta^2/4}$$

und damit

$$(0 \leq) \sup_{|\zeta-w|\geq\delta} P(z\overline{\zeta}) \leq \frac{1-|z|^2}{\delta^2/4} \to 0 \qquad (z \to w)\ .$$

2. Es sei nun φ stetig an w, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(w)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \zeta \in S \text{ mit } |\zeta - w| < \delta.$$

Für $z \in \mathbb{D}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\big|(P*\varphi)(z) - \varphi(w)\big| &\overset{\text{(ii)}}{=} \Big|\frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})\big(\varphi(\zeta)-\varphi(w)\big)|d\zeta|\Big| \\ &\overset{\text{(i)}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})\big|\varphi(\zeta)-\varphi(w)\big||d\zeta|.\end{aligned}$$

Dabei ist für $\lambda \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - w| < \delta} P(z\bar{\zeta}) \underbrace{|\varphi(\zeta) - \varphi(w)|}_{<\varepsilon} |d\zeta| < \varepsilon.$$

Außerdem existiert nach (iii) ein $\delta' > 0$ mit

$$\sup_{|\zeta - w| \geq \delta} P(z\bar{\zeta}) < \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \text{ mit } |z - w| < \delta'.$$

Also gilt für $|z - w| < \delta'$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - w| \geq \delta} \underbrace{P(z\bar{\zeta})}_{<\varepsilon} \underbrace{|\varphi(\zeta) - \varphi(w)|}_{\leq 2\|\varphi\|_{\infty,S}} |d\zeta| \leq 2\varepsilon \cdot \|\varphi\|_{\infty,S}.$$

Insgesamt ist damit für $z \in \mathbb{D}$ mit $|z - w| < \delta'$

$$|(P * \varphi)(z) - \varphi(w)| \leq \varepsilon(1 + 2\|\varphi\|_{\infty,S}) .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 8.13 1. Ist $z = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{D}$ und $\zeta = e^{it}$, so ist

$$\begin{aligned} P(z\bar{\zeta}) &= \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\bar{\zeta}|^2} = \frac{1 - \rho^2}{|1 - \rho e^{i(\vartheta - t)}|^2} = \\ &= \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\vartheta - t) + \rho^2} =: \tilde{P}(\rho, \vartheta - t), \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{P}(\rho, s) := \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(s) + \rho^2}$$

als Poisson-Kern bezeichnet wird (vgl. B. 7.6).

2. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Ist $h : G \to \mathbb{D}$ holomorph und bijektiv und so, dass h zu einer stetigen und bijektiven Funktion von $\overline{G}$ nach $\overline{\mathbb{D}}$ forgesetzt werden kann, so ist für $\varphi \in C(\partial G)$ mit $\psi := \varphi \circ (h^{-1}_{|S})$

$$(P * \psi) \circ h$$

die Lösung des Dirichlet-Problems $D(G, \varphi)$.

(Denn: ψ ist stetig auf S. Nach S. 8.12 ist $P \circ \psi$ Lösung von $D(\mathbb{D}, \psi)$. Da h holomorph in G ist, ist $(P * \psi) \circ h$ harmonisch in G ([Ü]). Außerdem gilt

$$(P * \psi)\big(h(z)\big) \to \psi\big(h(w)\big) = \varphi(w) \qquad (z \to w)$$

für alle $w \in \partial G$, da h stetig auf $\overline{G}$ ist.)

Ist speziell $G = U_r(z_0)$ für $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$, so hat h mit

$$h(z) = \frac{z - z_0}{r} \qquad (z \in \overline{U_r(z_0)})$$

offenbar obige Eigenschaften. Ist also $\varphi \in C\big(K_r(z_0)\big)$, so ist durch

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S P\Big(\frac{z - z_0}{r}\,\overline{\zeta}\Big)\, \varphi(z_0 + r\zeta)|d\zeta| \qquad \big(z \in U_r(z_0)\big)$$

die Lösung von $D\big(U_r(z_0), \varphi\big)$ gegeben.
3. Ist f stetig auf $\overline{U_r(z_0)}$ und harmonisch in $U_r(z_0)$, so gilt nach 2.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S P\Big(\frac{z - z_0}{r}\,\overline{\zeta}\Big) f(z_0 + r\zeta)|d\zeta| \qquad \big(z \in U_r(z_0)\big) \tag{8.3}$$

da beide Seiten Lösungen von $D\big(U_r(z_0), f_{|K_r(z_0)}\big)$ sind. Die Darstellung (8.3) heißt Poisson-Integralformel für f.
Wie im Beweis zu S. 2.15 ergibt sich damit auch: Ist (f_n) eine Folge in $\mathrm{Har}(\Omega)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so ist auch $f \in \mathrm{Har}(\Omega)$. ([Ü])

9 Konforme Abbildungen und Möbius-Transformationen

Es seien G und D Gebiete in $\mathbb{C}$. Dann nennt man eine bijektive, holomorphe Funktion $\varphi : G \to D$ auch eine konforme Abbildung von G auf D. Wir beweisen zunächst:

Satz 9.1 *Ist $\varphi : G \to D$ konform, so ist $Z(\varphi') = \emptyset$ (d. h. $\varphi'(z_0) \neq 0$ für alle $z_0 \in G$) und $\varphi^{-1} : D \to G$ ist ebenfalls konform.*

Beweis. Es sei $z_0 \in G$. Nach S. 3.9 ist $\varphi(z) = w_0 + \psi^m(z) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$ für eine Umgebung U von z_0 und ein $m \in \mathbb{N}$. Angenommen, $\varphi'(z_0) = 0$. Dann ist $m \geq 2$. Da $\psi(U)$ eine Umgebung von 0 ist (S. 3.10), existieren $w, we^{2\pi i/m} \in \psi(U)$. Sind $z_1, z_2 \in U$ mit $\psi(z_1) = w, \psi(z_2) = we^{2\pi i/m}$, so ist $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Widerspruch.
Damit ist (wieder nach S. 3.10) φ^{-1} holomorph auf einer Umgebung von $w_0 = \varphi(z_0)$. Da $z_0 \in G$ beliebig war, ist $\varphi^{-1} \in H(D)$. □

Bemerkung 9.2 Zwei Gebiete G, D heißen *konform äquivalent*, falls eine konforme Abbildung $\varphi : G \to D$ existiert. Nach S. 9.1 und der Kettenregel ist durch

$$G \sim D :\Leftrightarrow G, D \text{ konform äquivalent}$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete in $\mathbb{C}$ definiert.

Beispiel 9.3 1. Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ sei $\varphi(z) = \varphi_\vartheta(z) = e^{i\vartheta} z$ $(z \in \mathbb{D})$. Dann ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ konform mit $\varphi(0) = 0$. Umgekehrt folgt aus dem Schwarzschen Lemma (siehe [Ü], A16): Ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(0) = 0$, so ist $\varphi(z) = e^{i\vartheta} z$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ ([Ü]).
2. Es seien $G = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$ und $D = \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Dann ist $\exp : G \to D$ konform (vgl. B. 3.4).
3. Es seien $G = \mathbb{D}^* := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und $D := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Dann ist durch

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (z \in G)$$

eine konforme Abbildung $\varphi : G \to D$ definiert (die sogenannte Joukowski-Abbildung; [Ü]).

Bemerkung und Definition 9.4 Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Dann heißt die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (z \in \mathbb{C}_\infty)$$

(wobei $\varphi\big(-\frac{d}{c}\big) := \infty$, $\varphi(\infty) := \frac{a}{c}$ mit $\frac{\alpha}{\infty} := 0$, $\frac{\alpha}{0} := \infty$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) eine *Möbius-Transformation*.

Jede Möbius-Transformation φ bildet $\mathbb{C}_\infty$ bijektiv auf $\mathbb{C}_\infty$ ab. Ist $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, so gilt dabei

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} \qquad (w \in \mathbb{C}_\infty)$$

(nachrechnen). Offensichtlich ist φ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \big\{-\frac{d}{c}\big\}$, und damit ist φ eine konforme Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \big\{-\frac{d}{c}\big\}$ auf $\mathbb{C} \setminus \big\{\frac{a}{c}\big\}$. Außerdem ist $\varphi : (\mathbb{C}_\infty, \chi) \to (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ein Homöomorphismus.

Spezielle Klassen von Möbius-Transformationen ergeben wichtige konforme Abbildungen auf die Einheitskreisscheibe:

Satz 9.5 *1. Für $\alpha \in \mathbb{D}$ ist durch*

$$\varphi(z) = \varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definiert mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ und $\varphi_\alpha^{-1}(w) = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w}$ $(w \in \mathbb{D})$, d. h. $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$.

2. Für $\beta \in \mathbb{H} := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ ist durch

$$\varphi(z) = \varphi_\beta(z) = \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\beta : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ definiert mit $\varphi_\beta(\beta) = 0$ und $\varphi_\beta^{-1}(w) = \frac{\beta-\overline{\beta}w}{1-w}$ $(w \in \mathbb{D})$.

Beweis. 1. Es gilt für $|z| = 1$

$$|z-\alpha| = \underbrace{|z|}_{=1}\,|1-\alpha\overline{z}| = |1-\overline{\alpha}z|,$$

also $\big|\varphi(z)\big| = 1$, d. h. $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$. Weiter ist nach B/D 9.4

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w} \qquad (w \in \mathbb{D}),$$

also von der gleichen Form. Damit ist auch $\varphi^{-1}(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ und folglich $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Aus $\varphi(\alpha) = 0 \in \mathbb{D}$ und der Gebietstreue holomorpher Funktionen (B. 3.11.2) folgt dann $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ (!)

2. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x-\beta| = |x-\overline{\beta}|$, d. h. $\varphi(\mathbb{R}) \subset \partial\mathbb{D}$. Außerdem ist $\varphi(\infty) = 1$, also $\varphi(\partial_\infty\mathbb{H}) = \varphi\big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big) \subset \partial\mathbb{D}$ (∂_∞ bezeichnet den Rand in $\mathbb{C}_\infty$). Da $\varphi\big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big)$ zusammenhängend ist und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 1$ gilt, folgt $\varphi(\partial_\infty\mathbb{H}) = \partial\mathbb{D}$. Aus $\varphi(\beta) = 0 \in \mathbb{D}$ ergibt sich wie in 1. damit auch $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. $\square$

Beispiel 9.6 1. Durch
$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} \qquad (z \in \mathbb{H})$$
ist eine konforme Abbildung von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{D}$ definiert. Dabei gilt $\varphi(i) = 0$ und
$$\varphi^{-1}(w) = i \cdot \frac{1+w}{1-w} \qquad (w \in \mathbb{D}).$$
2. Durch
$$\varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \;\Big(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^\nu \Big) \qquad (z \in \mathbb{D})$$
ist eine konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ definiert, die sogenannte Koebe-Funktion.
(Denn: Es gilt
$$4\varphi(z) = \frac{4z}{(1-z)^2} = \Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)^2 - 1.$$
Also ist $4\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$, wobei
$$\varphi_1(z) = \frac{1+z}{1-z} \qquad (z \in \mathbb{D}),$$
also $\varphi_1 : \mathbb{D} \to \{w : \text{Re } w > 0\}$ konform nach 1. und $\varphi_2(w) = w^2$, also $\varphi_2 : \{\text{Re } w > 0\} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ konform, und $\varphi_3(\zeta) = \zeta - 1$, also $\varphi_3 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ konform.)

Bemerkung 9.7 Man kann sich fragen, ,,wieviele" konforme Abbildungen zwischen G und $\mathbb{D}$ (wenn überhaupt) existieren.
Sind $\varphi_1, \varphi_2 : G \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi_1(z_0) = 0$ und $\varphi_2(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in G$, so ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(0) = 0$. Also ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ nach B. 9.3.1 eine Drehung, d. h.
$$\varphi_2(z) = e^{i\vartheta}\varphi_1(z) \qquad (z \in G)$$
für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$. Umgekehrt gilt natürlich auch: Ist $\varphi_1 : G \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi_1(z_0) = 0$ und ist $\varphi_2 = e^{i\vartheta}\varphi_1$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$, so ist $\varphi_2 : G \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi_2(z_0) = 0$. Durch geeignete Wahl von ϑ lässt sich φ also stets so normieren, dass $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$ gilt (dadurch ist φ eindeutig festgelegt).

Beispiel 9.8 Nach S. 9.5.1 und B. 9.7 ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{D}$ genau dann, wenn φ von der Form
$$\varphi(z) = e^{i\vartheta}\, \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$
für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ ist.

10 Der Riemannsche Abbildungssatz

Wir werden nun den Satz von Arzela-Ascoli verwenden, um einen wichtigen Satz von Montel zu beweisen. Dieser wird wiederum die Grundlage zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes über die konforme Äquivalenz einfach zusammenhängender Gebiete sein.

Satz 10.1 *(Montel für holomorphe Funktionen)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ist $\mathcal{F} \subset H(G)$ beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge K von G (d. h. $\mathcal{F}_K$ ist beschränkt in $C(K, \mathbb{C})$), so ist $\mathcal{F}$ normal (in $C(G, \mathbb{C})$).

Beweis. Nach B. B.6.2 reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist. Es sei $z_0 \in G$. Ist $U_R[z_0] \subset G$, so ist $c := \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\infty, U_R[z_0]} < \infty$. Ist $0 < r < R$, so ergibt sich aus S. 2.1 für $f \in \mathcal{F}$

$$\|f'\|_{\infty, U_r[z_0]} \leq \frac{R}{(R-r)^2} \cdot c.$$

und damit für $z \in U_r(z_0)$

$$\big|f(z) - f(z_0)\big| = \Big|\int\limits_{z_0}^{z} f'(\zeta) d\zeta\Big| \leq \frac{R}{(R-r)^2} c \cdot |z - z_0|.$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig (Lipschitz-) stetig an z_0. □

Vorbereitend zum Riemannschen Abbildungssatz benötigen wir noch ein Ergebnis über einfach zusammenhängende Gebiete. Dazu ist es sinnvoll, den Begriff des Pfadintegrals etwas zu erweitern.

Bemerkung und Definition 10.2 Es seien $\gamma_j : [\alpha_j, \beta_j] \to \mathbb{C}$ Pfade $(j = 1, \ldots, n)$. Das Tupel $\Gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ heißt dann eine *Kette*. Weiter heißt $\Gamma^* := \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j^*$ die *Spur* von Γ. Wir definieren für $f \in C(\Gamma^*)$

$$\int\limits_{\Gamma} f = \int\limits_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta := \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma_j} f$$

(und

$$\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)|d\zeta| := \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma_j} f(\zeta)|d\zeta|.)$$

Die Kette Γ heißt *geschlossen*, falls

$$\gamma_j(\beta_j) = \gamma_{j+1}(\alpha_{j+1}) \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

und

$$\gamma_n(\beta_n) = \gamma_1(\alpha_1).$$

Es gilt damit: Ist Γ geschlossen, so existiert ein geschlossener Pfad γ so, dass $\gamma^* = \Gamma^*$ und

$$\int_\gamma f = \int_\Gamma f \qquad \big(f \in C(\gamma^*)\big).$$

(Denn: Zunächst existieren Pfade $\widetilde{\gamma}_j : [j-1, j] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_j \sim \widetilde{\gamma}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Wir definieren $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \widetilde{\gamma}_j(t), & \text{falls } t \in [j-1, j), j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \widetilde{\gamma}_n(t), & \text{falls } t \in [n-1, n] \end{cases}.$$

Dann ist γ ein geschlossener Pfad mit $\gamma^* = \widetilde{\gamma}_1^* \cup \cdots \cup \widetilde{\gamma}_n^* = \Gamma^*$ und

$$\int_\gamma f = \sum_{j=1}^n \int_{\widetilde{\gamma}_j} f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f = \int_\Gamma f \qquad \big(f \in C(\gamma^*)\big).$$

Weiter sei für einen Pfad $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ der Pfad $-\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$-\gamma(t) := \gamma(\beta + \alpha - t) \qquad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Dann ist $-\gamma^* = \gamma^*$ und für alle $f \in C(\gamma^*)$

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f.$$

Satz 10.3 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und es sei $f \in H(G)$. Dann gilt*

1. *Es existiert eine Stammfunktion F zu f auf G.*
2. *Ist $Z(f) = \emptyset$, so existieren eine Funktion $g \in H(G)$ mit $f = e^g$ und zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $h = h_k \in H(G)$ mit $h^k = f$.*

Beweis. 1. Nach B./D. 6.6 gilt: Ist γ ein geschlossener Pfad in G, so ist γ nullhomolog in G, also ist $\int_\gamma f = 0$ für alle $f \in H(G)$ nach dem Cauchy-Theorem. Damit gilt auch $\int_\Gamma f = 0$ für alle geschlossenen Ketten in G.
Es sei $z_* \in G$ fest. Durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f \qquad (z \in G),$$

wobei γ_z einen beliebigen Pfad in G mit Anfangspunkt z_* und Endpunkt z bezeichnet, ist eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ (wohl-)definiert.
(Wichtig: Der Wert ist unabhängig von der Wahl des Pfades γ_z, denn ist $\widetilde{\gamma}_z$ ein weiterer solcher Pfad, so ist $\Gamma = (\gamma_z, -\widetilde{\gamma}_z)$ eine geschlossene Kette, also gilt

$$0 = \int_\Gamma f = \int_{\gamma_z} f - \int_{\widetilde{\gamma}_z} f.)$$

Wir zeigen: $F' = f$ auf G.
Denn: Ist $z_0 \in G$ und $U_R(z_0) \subset G$, so gilt für $z \in U_R(z_0)$ mit

$$\gamma_{z_0,z}(t) = z_0 + t(z - z_0) \ (t \in [0,1])$$

und $\Gamma = (\gamma_{z_0}, \gamma_{z_0,z}, -\gamma_z)$

$$0 = \int_\Gamma f = \int_{\gamma_{z_0}} f + \int_{z_0}^{z} f - \int_{\gamma_z} f = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f - F(z).$$

Also folgt $F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^z f$ und damit

$$\Big|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\Big| = \Big|\frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^{z} \big(f(\zeta) - f(z_0)\big)\, d\zeta\Big| \le \big\|f - f(z_0)\big\|_{\gamma^*_{z_0,z}} \to 0 \quad (z \to z_0).$$

2. Ist g eine Stammfunktion zu f'/f (existiert nach 1., da $f'/f \in H(G)$) ohne Einschränkung so, dass $e^{g(z_*)} = f(z_*)$ für ein $z_* \in G$, so folgt

$$(fe^{-g})' = f'e^{-g} - fe^{-g}f'/f \equiv 0 \text{ auf } G,$$

also $f/e^g \equiv$ const $= 1$ auf G.
Weiter gilt für $h = h_k = e^{g/k}$ dann auch $h^k = e^g = f$. □

Satz 10.4 *(Riemannscher Abbildungssatz)*
Ist $G \subset \mathbb{C}, G \neq \mathbb{C}$, einfach zusammenhängend, so ist G konform äquivalent in $\mathbb{D}$.

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{\psi \in H(G) : \psi(G) \subset \mathbb{D}, \psi \text{ injektiv}\}.$$

Zu zeigen ist: Es existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $\varphi(G) = \mathbb{D}$.
1. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Denn: Es sei $\zeta \notin G$. Dann existiert nach S. 10.3 ein $\varphi \in H(G)$ mit $\varphi^2(z) = z - \zeta$ für alle $z \in G$. Ist $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, so ist $\varphi^2(z_1) = \varphi^2(z_2)$, also auch $z_1 = z_2$. Damit ist φ injektiv. Genauso existieren keine Punkte z_1, z_2 mit $z_1 \neq z_2$ und $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$. Aus der Gebietstreue holomorpher Funktionen folgt, dass $\varphi(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Insbesondere existiert ein Kreis $U_r(a)$ mit $U_r[a] \subset \varphi(G)$ und $0 < r < |a|$.
Damit ist $U_r[-a] \cap \varphi(G) = \emptyset$, und folglich ist $\psi := \frac{r}{\varphi + a} \in \mathcal{F}$ beachte: $|\varphi + a| > r$).

2. Wir zeigen: Ist $\psi \in \mathcal{F}$ mit $\psi(G) \neq \mathbb{D}$ und ist $z_0 \in G$, so existiert ein $\psi_1 \in \mathcal{F}$ mit $\big|\psi_1'(z_0)\big| > \big|\psi'(z_0)\big|$.
Denn: Die Funktionen $\varphi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$,

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

bilden $\mathbb{D}$ konform auf $\mathbb{D}$ ab (S. 9.5.1) mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ und

$$\varphi_{-\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}.$$

Es sei $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(G)$. Dann ist auch $\varphi_\alpha \circ \psi \in \mathcal{F}$ und $(\varphi_\alpha \circ \psi)(z) \neq 0$ $(z \in G)$. Also existiert ein $g \in H(G)$ mit $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. Wie in 1. sieht man, dass g injektiv ist, d. h. $g \in \mathcal{F}$. Ist $\psi_1 := \varphi_\beta \circ g$, wobei $\beta = g(z_0)$, so ist auch $\psi_1 \in \mathcal{F}$. Ist $s(w) := w^2$ $(w \in \mathbb{C})$, so folgt

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta} \circ \psi_1.$$

Da $\psi_1(z_0) = \varphi_\beta(\beta) = 0$ ist, ergibt sich aus der Kettenregel mit $h := \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}$:

$$\psi'(z_0) = h'(0) \cdot \psi_1'(z_0).$$

Weiter ist $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und h ist nicht injektiv. Nach dem Schwarz-Pick Lemma (siehe [Ü]) ist $|h'(0)| < 1$, also $|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$.

3. Es sei $z_0 \in G$ fest. Wir definieren

$$\eta := \sup\left\{ \left|\psi'(z_0)\right| : \psi \in \mathcal{F} \right\}.$$

Nach 2. reicht es, zu zeigen: „sup = max", d. h., es existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}$ mit $\left|\varphi'(z_0)\right| \geq \left|\psi'(z_0)\right|$ für alle $\psi \in \mathcal{F}$.
Nach Definition von η existiert eine Folge (φ_n) in $\mathcal{F}$ mit

$$\left|\varphi_n'(z_0)\right| \to \eta \qquad (n \to \infty).$$

Da $\psi(G) \subset \mathbb{D}$ $(\psi \in \mathcal{F})$, ist $\mathcal{F}$ normal nach S. 10.1. Also existiert eine Teilfolge (φ_{n_j}), die lokal gleichmäßig auf G gegen eine Funktion $\varphi \in H(G)$ konvergiert. Dabei gilt auch $\varphi_{n_j}' \to \varphi'$ lokal gleichmäßig auf G, also insbesondere $\left|\varphi'(z_0)\right| = \eta$. Außerdem folgt aus $\varphi_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\varphi \not\equiv \text{const}$ (beachte $\eta > 0$) und dem Satz von Hurwitz auch $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Schließlich folgt aus der Injektivität von φ_n auch die Injektivität von φ, wieder mit dem Satz von Hurwitz (vgl. [Ü]). □

Bemerkung 10.5 1. $G = \mathbb{C}$ ist nicht konform äquivalent zu $\mathbb{D}$, denn nach dem Satz von Liouville ist eine ganze Funktion φ mit $\varphi(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}$ schon konstant.

2. Ist $G \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und ist $z_0 \in G$, so existiert genau eine konforme Abbildung $\varphi_0 : G \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$.
(Denn: Ist $\varphi : G \to \mathbb{D}$ konform, so ergibt sich φ_0 durch „Nachschalten" einer geeigneten Möbiustransformation der Form

$$z \mapsto e^{i\vartheta} \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

(vgl. B. 9.8. Die Eindeutigkeit folgt aus B. 9.7)).

3. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das konform äquivalent ist zu $\mathbb{D}$, so gilt die Cauchysche Integralformel in G, d. h., für alle $f \in H(G)$ und alle geschlossenen Pfade γ in G ist $\int_\gamma f = 0$.

(Denn: Ist $\varphi : \mathbb{D} \to G$ konform, so ist $\widetilde{\gamma} := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ein geschlossener Pfad in $\mathbb{D}$. Also gilt für $f \in H(G)$

$$\int_\gamma f = \int_{\varphi\circ\widetilde{\gamma}} f = \int_{\widetilde{\gamma}} \underbrace{(f \circ \varphi) \cdot \varphi'}_{\in H(\mathbb{D})} = 0.)$$

Da wir im Beweis zu S. 10.4 lediglich die Aussage 3. aus S. 10.3 (für $k = 2$) genutzt haben, ergibt sich aus dem Beweis zu S. 10.3 auch: Ist $G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet, für das der Cauchysche Integralsatz gilt, so ist G konform äquivalent zu $\mathbb{D}$. Man kann zeigen (was wir nicht tun werden, da uns der Begriff der Homotopie fehlt), dass dies wiederum genau dann der Fall ist, wenn G einfach zusammenhängend ist.

Bemerkung 10.6 1. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Dann ist $\mathbb{C}_\infty \setminus K \subset \mathbb{C}_\infty$ zusammenhängend genau dann, wenn $\mathbb{C} \setminus K$ in $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist.

2. Es sei $G \subset \mathbb{C}_\infty$ ein Gebiet. Dann heißt G *einfach zusammenhängend*, falls $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ in $\mathbb{C}_\infty$ zusammenhängend ist. Man sieht damit: Ist $G \subset \mathbb{C}$, so ist G genau dann ein Gebiet in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, wenn G ein Gebiet in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist. Außerdem ist G genau dann einfach zusammenhängend in $\mathbb{C}$, wenn dies in $\mathbb{C}_\infty$ der Fall ist.

3. Oft verwendet man den Riemannschen Abbildungssatz in folgender Variante:
Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge so, dass K und $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend sind und dass K nicht einpunktig ist. Dann ist $\mathbb{C} \setminus K$ konform äquivalent zu $\mathbb{D}^* = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.
(Denn: Ohne Einschränkung sei $0 \in K$. Definiert man $\frac{1}{M} := \left\{\frac{1}{\zeta} : \zeta \in M\right\} \subset \mathbb{C}_\infty$ für $M \subset \mathbb{C}_\infty$, so ist $G = \mathbb{C}_\infty \setminus \frac{1}{K} = \frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus K}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}_\infty$, da

$$\mathbb{C}_\infty \ni \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta} \in \mathbb{C}_\infty$$

homöomorph ist. Aus $\infty \notin G$ folgt, dass G auch ein Gebiet in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$ ist. Außerdem ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, da $\mathbb{C}_\infty \setminus G = \frac{1}{K}$ zusammenhängend ist (wieder $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ stetig) und $G \neq \mathbb{C}$, da $|K| \geq 2$. Damit existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \to G$ mit $\varphi(0) = 0$ (beachte $0 \in G$, da $0 \notin \frac{1}{K}$). Ist $\psi : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\psi(z) := \frac{1}{\varphi(1/z)} \qquad (z \in \mathbb{D}^*),$$

so ist $\psi : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C} \setminus K$ konform.)

11 Die Klasse $\mathcal{S}$

Definition 11.1 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine injektive Funktion $f \in H(G)$ heißt *schlicht* (f ist dann eine konforme Abbildung von G auf $f(G) \subset \mathbb{C}$). Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &:= \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ schlicht},\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}\\ &= \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ injektiv},\ f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu \ (z \in \mathbb{D})\}.\end{aligned}$$

Beispiel 11.2 Für $|\alpha| \leq 1$ sei $f_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \alpha^{\nu-1} z^\nu \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Für $\alpha \neq 0$ ist $f_\alpha = \frac{1}{\alpha} k(\alpha z)$, wobei k die Koebe-Funktion aus B. 9.6.2 bezeichnet. Damit ist $f_\alpha \in H(\mathbb{D})$ injektiv (da k injektiv auf $\mathbb{D}$ ist; für $\alpha = 0$ ist $f_0(z) = z$). Außerdem ist

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(0) = 1,$$

also ist $f_\alpha \in \mathcal{S}$.

Bemerkung 11.3 Ist $f \in \mathcal{S}$, so existiert ein $g \in \mathcal{S}$ mit

$$g^2(z) = f(z^2) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

(Denn: Es sei $f(z) = z\varphi(z)$ $(z \in \mathbb{D})$. Dann ist $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(z) \neq 0$ $(z \in \mathbb{D})$. Also existiert ein $\psi \in H(\mathbb{D})$ mit $\psi^2 = \varphi$ (und ohne Einschränkung so, dass $\psi(0) = 1$). Dann gilt für $g \in H(\mathbb{D})$, definiert durch $g(z) := z\psi(z^2)$ $(z \in \mathbb{D})$, einerseits

$$g^2(z) = z^2\psi^2(z^2) = z^2\varphi(z^2) = f(z^2) \qquad (z \in \mathbb{D})$$

und außerdem $g \in \mathcal{S}$, denn

1. $g(0) = 0$ und $g'(0) = \psi(0) = 1$.
2. Aus $z, w \in \mathbb{D}$ mit $g(z) = g(w)$ folgt $f(z^2) = f(w^2)$, d. h. $z^2 = w^2$, da f injektiv, also $z = w$ oder $z = -w$. Im zweiten Fall ergibt sich $g(z) = -w\psi(w^2) = -g(w)$, also $g(z) = \pm\, g(w)$ und damit $g(z) = g(w) = 0$. Da $Z(\psi) = Z(\varphi) = \emptyset$, folgt $z = w = 0$.)

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass für jede Funktion $f \in \mathcal{S}$

$$f(\mathbb{D}) \supset U_{1/4}(0)$$

gilt (Koebescher 1/4-Satz). Dazu betrachten wir zunächst eine andere Klasse holomorpher Funktionen.

Bemerkung und Definition 11.4 Es sei $f \in H(\mathbb{D}^*)$. Dann hat f in $\mathbb{D}^*$ eine Laurent-Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu z^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu / z^\nu \qquad (z \in \mathbb{D}^* = V_{1,\infty}(0)).$$

Wir setzen

$$\mathcal{U} := \big\{ f \in H(\mathbb{D}^*) : f \text{ schlicht, } \beta_1 = 1, \beta_\nu = 0 \ (\nu \geq 2) \big\}.$$

Funktionen $f \in \mathcal{U}$ haben also in $\mathbb{D}^*$ die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = z + \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu / z^\nu.$$

Außerdem ist f eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}^*$ auf $f(\mathbb{D}^*)$. Dabei ist $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}^*)$ kompakt in $\mathbb{C}$. Schließlich gilt

$$\mathcal{U} = \{ f \in H(\mathbb{D}^*) : f(z) = 1/g(1/z) + c \text{ für ein } g \in \mathcal{S}, c \in \mathbb{C} \}.$$

(Denn:
„$\supset$“: Für $g \in \mathcal{S}$ gilt mit auf einer Umgebung von 0 beschränkten r_j

$$g(w) = w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \cdots = w + a_2 w^2 + r_1(w) w^3 \qquad (w \in \mathbb{D}),$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(w)} &= \frac{1}{w} \, \frac{1}{1 + a_2 w + r_1(w) w^2} = \frac{1}{w} \, \frac{1}{1 + a_2 w} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r_1(w)}{1 + a_2 w} w^2} \\ &= \frac{1}{w} \, (1 - a_2 w + r_2(w) w^2)(1 + r_3(w) w^2) \\ &= \frac{1}{w} \, (1 - a_2 w)(1 + r_4(w) w^2) \qquad \big(w \in \mathbb{D}\big) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)\left(\frac{1}{z}\right) &= z \left(1 - \frac{a_2}{z}\right) \left(1 + \frac{r_4(1/z)}{z^2}\right) \\ &= z - a_2 + \frac{r_5(1/z)}{z} \qquad \big(z \in \mathbb{D}^*\big). \end{aligned}$$

Also ist

$$f(z) = \frac{1}{g(1/z)} + c = z + (c - a_2) + r_5(1/z) \, \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{D}^*),$$

wobei $r_5(1/z)/z$ der Hauptteil der Laurent-Entwicklung ist. Da g schlicht ist, ist auch f schlicht.
Im Weiteren schreiben wir kurz $\mathcal{O}(w^k)$ für $w \to 0$ bzw. $\mathcal{O}\big(\frac{1}{z^k}\big)$ für $z \to \infty$ statt $r_j(w) w^k$ bzw. $r_j\big(\frac{1}{z}\big)\frac{1}{z^k}$, wenn die konkrete Form von r_j unwichtig ist.
„$\subset$“: [Ü])

Bemerkung 11.5 (Jordanscher Kurvensatz)
Ist $\sigma : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ stetig und injektiv, so heißt $\sigma^* := \sigma(\partial\mathbb{D})$ eine Jordankurve. Der Jordansche Kurvensatz besagt, dass $\mathbb{C}\backslash\sigma^*$ in zwei Komponenten zerfällt, wobei die beschränkte das Innere von σ^* und die unbeschränkte das Äußere von σ^* heißt (Bezeichnung $\operatorname{Int}(\sigma^*), \operatorname{Ext}(\sigma^*)$).
Dabei ist

$$\sigma^* = \partial(\operatorname{Int}(\sigma^*)) = \partial(\operatorname{Ext}(\sigma^*)) \ .$$

Satz 11.6 *(Flächensatz)*
Für $f \in \mathcal{U}$ gilt

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|a_\nu|^2 \leq 1}$$

(und insbesondere $|a_1| \leq 1$).

Beweis. Für $R > 1$ sei

$$\sigma_R(\zeta) = f(R\zeta) \qquad (\zeta \in \partial\mathbb{D}).$$

Dann ist $\sigma_R^* = \sigma_R(\partial\mathbb{D})$ eine Jordankurve. Außerdem ist $\sigma_R^* = \gamma_R^*$ mit

$$\gamma_R(t) = f(Re^{it}) \qquad \big(t \in [-\pi, \pi]\big),$$

und es gilt $\operatorname{ind}_{\gamma_R}(z) = 1$ ($z \in \operatorname{Int}(\sigma_R^*)$) (also insbesondere $\operatorname{Int}(\sigma_R^*) = \operatorname{Int}(\gamma_R)$).
Nach dem Greenschen Satz ($\to$ Analysis) gilt weiter mit $k(\zeta) = \overline{\zeta}$

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma_R} \overline{\zeta} d\zeta = \int_{\operatorname{Int}(\sigma_R^*)} \underbrace{\overline{\partial} k(\zeta)}_{=1} d\lambda_2(\zeta) = \lambda_2\big(\operatorname{Int}(\sigma_R^*)\big)$$

(wobei λ_2 das zweidimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet).
Also folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der entsprechenden Reihen und der Orthgonalität von $(e^{im\cdot})_{m\in\mathbb{Z}}$ auf $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lambda_2\big(\operatorname{Int}(\sigma_R^*)\big) \\
&= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_R} \overline{\zeta} d\zeta = \frac{R}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(Re^{it}) f'(Re^{it}) e^{it} dt \\
&= \frac{R}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(R + \overline{\beta}_0 e^{it} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_\nu}}{R^\nu}\, e^{i(\nu+1)t}\Big)\Big(1 - \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu\,\frac{\alpha_\mu}{R^{\mu+1}}\, e^{-i(\mu+1)t}\Big)\, dt \\
&= \frac{R}{2}\left(R - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu|\alpha_\nu|^2}{R^{2\nu+1}}\right) 2\pi = \pi R^2 \left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu|\alpha_\nu|^2}{R^{2\nu+2}}\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|\alpha_\nu|^2/R^{2\nu+2} \leq 1 \qquad (R > 1).$$

Hieraus folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu|\alpha_\nu|^2/R^{2\nu+2} \leq 1 \qquad (R > 1),$$

also auch $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu|\alpha_\nu|^2 \leq 1$ für $R \to 1^+$. □

Bemerkung 11.7 Aus $\operatorname{Int}(\sigma^*_{R_n}) \downarrow \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}^*) =: K$ für $R_n \downarrow 1$ ergibt sich aus der Stetigkeit von unten des Lebesgue-Maßes λ_2 und dem Beweis zu S. 11.6 sowie dem Abelschen Grenzwertsatz

$$\begin{aligned}\lambda_2(K) &= \lim_{n\to\infty} \lambda_2\big(\operatorname{Int}(\sigma^*_{R_n}\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi R_n^2 \left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|\alpha_\nu|^2/R_n^{2\nu+2}\right) = \pi\Big(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|\alpha_\nu|^2\Big),\end{aligned}$$

also eine Formel für die Fläche von K.
Im Falle $f(z) = z$ ist $\alpha_\nu = 0$ $(\nu \in \mathbb{N})$ und $\lambda_2(K) = \lambda_2(\overline{\mathbb{D}}) = \pi$ und im Falle $f(z) = z + 1/z$ ist $\alpha_\nu = \delta_{\nu 1}$ und $\lambda_2(K) = \lambda_2([-2, 2]) = 0$.

Satz 11.8 *Es sei $f \in \mathcal{S}$ mit $f(z) = z + \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ $(z \in \mathbb{D})$. Dann gilt*

1. $|a_2| \leq 2$,
2. $U_{1/4}(0) \subset f(\mathbb{D})$ *(Koebescher 1/4-Satz).*

Beweis. 1. Es sei $g \in \mathcal{S}$ mit $g^2(z) = f(z^2)$ (existiert nach B. 11.3).
Aus

$$f(z^2) = z^2\big(1 + a_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3)\big) \qquad (z \to 0)$$

folgt ([Ü]):

$$g(z) = z\Big(1 + \frac{a_2}{2}\, z^2 + \mathcal{O}(z^3)\Big) \qquad (z \to 0).$$

Ist $h(\zeta) = 1/g(1/\zeta)$ für $\zeta \in \mathbb{D}^*$, so ist $h \in \mathcal{U}$ mit

$$\begin{aligned}h(\zeta) &= \zeta \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_2}{2}\,\zeta^{-2} + \mathcal{O}(\zeta^{-3})} = \\ &\underset{\text{geom. Reihe}}{=} \zeta \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_2}{2}\,\zeta^{-2}} \cdot \frac{1}{1 + \mathcal{O}(\zeta^{-3})} \\ &= \zeta - \frac{a_2}{2}\,\zeta^{-1} + \mathcal{O}(\zeta^{-2}) = \zeta + \alpha_1 \zeta^{-1} + \mathcal{O}(\zeta^{-2})\end{aligned}$$

für $\zeta \to \infty$. Nach dem Flächensatz ist

$$1 \geq |\alpha_1| = \left| -\frac{a_2}{2} \right|,$$

also $|a_2| \leq 2$.

2. Es sei $w \notin f(\mathbb{D})$. Wir betrachten

$$g(z) = g_w(z) := \frac{f(z)}{1 - f(z)/w} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Dann ist $g \in H(\mathbb{D})$. Außerdem ist g schlicht in $\mathbb{D}$.
(Denn: Es gilt $g = \varphi \circ f$, wobei

$$\varphi(\zeta) := \frac{\zeta}{1 + \zeta/w} \qquad (\zeta \in \mathbb{C}_\infty)$$

eine Möbius-Transformation ist.) Schließlich ist

$$\begin{aligned} g(z) &\underset{\text{geom. Reihe}}{=} \Big(z + a_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3)\Big)\Big(1 + \frac{f(z)}{w} + \mathcal{O}(z^2)\Big) \\ &= \big(z + a_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3)\big)\Big(1 + \frac{z}{w} + \mathcal{O}(z^2)\big)\Big) \\ &= z + \Big(a_2 + \frac{1}{w}\Big) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \end{aligned}$$

und damit zunächst $g \in \mathcal{S}$ und nach 1. dann auch

$$\left| a_2 + \frac{1}{w} \right| \leq 2$$

(und $|a_2| \leq 2$). Aus den beiden Ungleichungen folgt $|1/w| \leq 4$ mit der Dreiecksungleichung.
□

Bemerkung 11.9 Beide Abschätzungen in S. 11.8 sind bestmöglich, denn für die Koebe-Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots$$

gilt $|a_2| = 2$ und $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \big(-\infty, -\frac{1}{4} \big]$.

12 Sätze von Montel und Picard

Wir setzen für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit ∞_G, definiert durch $\infty_G(z) = \infty$ $(z \in G)$, und $M(G) := \{f : G \to \mathbb{C}_\infty : f \text{ meromorph in } G\}$

$$M_\infty(G) := M(G) \cup \{\infty_G\} \subset C(G, \mathbb{C}_\infty)$$

(dann ist $f \in M_\infty(G)$ genau dann wenn $1/f \in M_\infty(G)$). Außerdem setzen wir $H_\infty(G) := H(G) \cup \{\infty_G\}$.

Satz 12.1 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge in $M_\infty(G)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G. Dann ist auch $f \in M_\infty(G)$. Ist $f_n \in H(G)$ für ∞ viele n, so ist $f \in H_\infty(G)$.*

Beweis. Ist $f \equiv \infty$, so ist nichts zu zeigen, d.h., wir können $f \not\equiv \infty$ voraussetzen. Zunächst ist $f \in C(G, \mathbb{C}_\infty)$, da $f_n \in C(G, \mathbb{C}_\infty)$.
1. Es sei $z_0 \in G$ so, dass $f(z_0) \neq \infty$. Dann existiert ein $R > 0$ so, dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf $K := U_R[z_0]$ (d. h. in $C(K, \mathbb{C}_\infty)$), und so, dass $f(z) \neq \infty$ für alle $z \in K$. Aus der Kompaktheit von $f(K)$ folgt

$$\delta := \operatorname{dist}(f(K), \infty) > 0.$$

Für n genügend groß ist dann

$$\chi\big(f_n(z), f(z)\big) < \delta/2 \qquad (z \in K),$$

und damit $\operatorname{dist}(f_n(K), \infty) \geq \delta/2$. Folglich konvergiert $(f_{n|K})_n$ auch gleichmäßig als Folge in $C(K, \mathbb{C})$. Damit ist $f_{|K^0}$ holomorph, da $f_{n|K^0}$ holomorph $(n \in \mathbb{N})$.
Ist $f(z_0) = \infty$, so ist $(1/f)(z_0) = 0$. Wie oben sieht man, dass $1/f \in H(U)$, für eine Umgebung$U$ von z_0. Damit hat f einen Pol an z_0 (beachte: $1/f \not\equiv$ const).
Insgesamt ergibt sich $f \in M(G)$.

2. Es sei nun $f_n \in H(G)$ für ∞ viele $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es existiert ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = \infty$. Dann ist $(1/f)(z_0) = 0$ und wie in 1. gilt

$$1/f_n \to 1/f$$

in $C(K, \mathbb{C})$, wobei $K := U_R[z_0]$ für R genügend klein. Nach dem Satz von Hurwitz ([Ü])) ist

$$0 \in \Big(\frac{1}{f}\Big)(K^0) \subset \underline{\lim}\Big(\frac{1}{f_n}\Big)(K^0),$$

also $0 \in \big(\frac{1}{f_n}\big)(K^0)$ für n genügend groß und damit $\infty \in f_n(K^0)$ für n genügend groß. Widerspruch. □

Wir verwenden im Weiteren folgende Kurzschreibweise: Sind X, Y (vollständige) metrische Räume und sind $f_n,\ f \in C(X, Y)$, so schreiben wir

$$f_n \to f \text{ in } C(X, Y),$$

falls $f_n \to f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge K von X, d. h.

$$d_{\infty,K}(f_n, f) = \max_{x \in K} d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Damit kann man etwa die erste Aussage von S. 12.1 auch so schreiben: Sind $f_n \in M_\infty(G)$ so, dass

$$f_n \to f \text{ in } C(G, \mathbb{C}_\infty),$$

so ist $f \in M_\infty(G)$.
(Man beachte: Hier ist lokal gleichmäßige Konvergenz dasselbe wie gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen.)

Bemerkung und Definition 12.2 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in M(G)$. Dann ist die auf $G \setminus P(f)$ (wobei $P(f)$ die Menge der Polstellen von f bezeichnet) stetige Funktion $\frac{|f'|}{1+|f|^2}$ zu einer auf G stetigen Funktion $f^\# : G \to [0, \infty)$ fortsetzbar, $f^\#$ heißt dann *sphärische Ableitung* von f.
(Denn: Ohne Einschränkung sei $f \not\equiv$ const. Ist $a \in P(f)$ mit Ordnung $p = p(a) \in \mathbb{N}$, so gilt (Laurent-Entwicklung)

$$f(z) \sim \frac{c}{(z-a)^p} \qquad (z \to a)$$

und damit

$$f'(z) \sim \frac{-cp}{(z-a)^{p+1}} \qquad (z \to a)$$

sowie

$$\big|f^2(z)\big| \sim \frac{|c|^2}{|z-a|^{2p}} \qquad (z \to a).$$

Folglich ist

$$\frac{|f'(z)|}{1+\big|f^2(z)\big|} \sim \frac{p}{|c|}|z-a|^{p-1} \qquad (z \to a),$$

also

$$f^\#(a) := \lim_{z \to a} \frac{\big|f'(z)\big|}{1+\big|f^2(z)\big|} = \begin{cases} 1/|c|, & \text{falls } p = 1 \\ 0, & \text{falls } p > 1 \end{cases} .)$$

Man rechnet leicht nach, dass $(1/f)^\# = f^\#$ gilt (mit $\infty_G^\# :\equiv 0$).
Die sphärische Ableitung spiegelt das „Verzerrungsverhalten" der Funktion f als Abbildung von $G \subset \mathbb{C}$ in die Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$ wider, wenn man $\mathbb{C}_\infty$ mit der sogenannten *sphärischen Metrik* σ versieht, die man folgendermaßen definieren kann:
Zunächst sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}_\infty$ stetig. Existieren eine Zerlegung $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ von $[\alpha, \beta]$ und meromorphe Funktionen g_k auf U_k, wobei U_k eine offene Umgebung von $[t_{k-1}, t_k]$ mit $g_{k|[t_{k-1},t_k]} = \gamma_{|[t_{k-1},t_k]}$, so heißt γ ein *stückweise meromorpher Pfad*. Weiter heißt

$$L_\#(\gamma) := \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{1+|\zeta|^2} = \int_\gamma \mathrm{id}^\#(\zeta)\,|d\zeta| = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{|\gamma'(t)|}{1+|\gamma(t)|^2}\,dt$$

sphärische Länge von γ. Damit definieren wir für $a, b \in \mathbb{C}_\infty$

$$\sigma(a,b) = \inf\big\{L_\#(\gamma) : \gamma \text{ stückweise meromorph}, \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b\big\}.$$

Man kann sich überlegen, dass σ eine Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$ definiert (äquivalent zu χ, genauer gilt

$$\chi(a,b) \le \sigma(a,b) \le \frac{\pi}{2}\,\chi(a,b).)$$

Ist $f \in M(U)$ für ein konvexes Gebiet $U \subset \mathbb{C}$, so ergibt sich für $z, w \in U$ mit $\gamma_{z,w}(t) := z + t(w-z)\big(t \in [0,1]\big)$

$$\sigma\big(f(z), f(w)\big) \le L_\#(f \circ \gamma_{z,w}) = \int\limits_z^w f^\#(\zeta)|d\zeta|.$$

Damit haben wir die Basis geschaffen für

Satz 12.3 *(Marty's Theorem)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es sei $\mathcal{F} \subset M_\infty(G)$. Dann sind äquivalent:

a) $\mathcal{F}$ ist normal (in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$).

b) $\{f^\# : f \in \mathcal{F}\}$ ist beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge K von G, d. h., für alle $K \Subset G$ ist

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f^\#\|_{\infty,K} < \infty.$$

Beweis. b) $\Rightarrow$ a): Es sei $z_0 \in G$. Dann gilt für $R > 0$ mit $U_R(z_0) \subset G$ und $z \in U_R(z_0)$

$$\sigma\big(f(z), f(z_0)\big) \le \int\limits_{z_0}^{z} f^\#(\zeta)|d\zeta| \le \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f^\#\|_{\infty,\gamma^*_{z,z_0}} \cdot |z - z_0|.$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig an z_0. Nach B. B.6 ist $\mathcal{F}$ normal, (man beachte: $(\mathbb{C}_\infty, \sigma)$ ist wie $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ein kompakter metrischer Raum).
a) $\Rightarrow$ b): Man kann zeigen ([Ü]): Ist (f_n) eine beliebige Folge in $M_\infty(G)$, so folgt aus $f_n \to f$ in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$ auch $f_n^\# \to f^\#$ in $C(G, [0,\infty))$.
Angenommen, $\{f^\#_{|K} : f \in \mathcal{F}\}$ ist unbeschränkt für eine kompakte Teilmenge K von G. Dann existieren eine Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ mit

$$\|f_n^\#\|_{\infty,K} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Da $\mathcal{F}$ normal ist, existieren eine Teilfolge (f_{n_j}) und ein $f \in M_\infty(G)$ mit

$$f_{n_j} \to f \text{ in } C(G, \mathbb{C}_\infty).$$

Dann gilt auch

$$f_{n_j}^\# \to f^\# \text{ in } C(G, [0,\infty))$$

und damit

$$\|f_{n_j}^{\#}\|_{\infty,K} \to \|f^{\#}\|_{\infty,K} \qquad (j \to \infty).$$

Widerspruch. □

Beispiel 12.4 Wir betrachten $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f_n(z) = z^n$. Dann ist

$$f_n^{\#}(z) = \frac{n|z|^{n-1}}{1+|z|^{2n}} \leq \begin{cases} n|z|^{n-1} & (z \in \mathbb{D}) \\ \dfrac{n}{|z|^{n+1}} & (z \in \mathbb{D}^*) \end{cases}.$$

Hieraus folgt, dass $\{f_n^{\#} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}$ und von $\mathbb{D}^*$. Also ist $\mathcal{F}$ normal in $C(\mathbb{D}, \mathbb{C}_\infty)$ und $C(\mathbb{D}^*, \mathbb{C}_\infty)$. Aus $f_n^{\#}(z) = n/2$ für $|z| = 1$ folgt, dass $\mathcal{F}$ nicht normal ist in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$ für alle Gebiete G mit $\partial\mathbb{D} \cap G \neq \emptyset$.

Bekanntermaßen gilt

$$e^\zeta = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} f_n(1 + \rho_n\zeta)$$

mit $\rho_n = 1/n$, wobei die Konvergenz lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ ist. Man sieht also, dass bei $z = 1$ (wo $\mathcal{F}$ nicht normal ist) eine geeignete Skalierung im Argument der f_n zu einer (sogar auf ganz $\mathbb{C}$) konvergenten Folge führt. Eine entsprechende Aussage gilt ganz allgemein:

Satz 12.5 *(Zalcman-Lemma)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset M_\infty(G)$. Ist $\mathcal{F}$ nicht normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$, so existieren Folgen (z_n) in G mit $z_n \to z_0 \in G$, (ρ_n) mit $0 < \rho_n \to 0$ und (f_n) in $\mathcal{F}$ sowie ein $g \in M(\mathbb{C})$ mit $g^{\#}(0) = 1$, $g^{\#} \leq 1$ auf $\mathbb{C}$ und so, dass für alle $K \subset \mathbb{C}$ kompakt

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n\zeta) \qquad (\zeta \in K)$$

für n genügend groß definiert ist und $f_n \to g$ gleichmäßig auf K gilt. Ist dabei $\mathcal{F} \subset H(G)$, so ist g ganz.

Beweis. Nach S. B.5 existiert ein $z \in G$ so, dass $\mathcal{F}$ nicht normal ist auf jeder offenen Umgebung von z. Ohne Einschränkung sei $z = 0$ und $\overline{\mathbb{D}} \subset G$.
Dann existiert nach Marty's Theorem eine Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ mit

$$\|f_n^{\#}\|_{\infty, U_{1/2}[0]} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Wir setzen

$$R_n := \max_{|z|\leq 1} f_n^{\#}(z)\big(1 - |z|\big).$$

Dann gilt

$$R_n \geq \|f_n^\#\|_{\infty,U_{1/2}[0]} \cdot \frac{1}{2} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Es sei $z_n \in \overline{\mathbb{D}}$ so, dass $f_n^\#(z_n)\big(1-|z_n|\big) = R_n$. Dann gilt $f_n^\#(z_n) \geq R_n$, also auch $f_n^\#(z_n) \to \infty$. Wir setzen

$$\rho_n := \frac{1}{f_n^\#(z_n)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Damit gilt $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$R_n\rho_n = \frac{R_n}{f_n^\#(z_n)} = 1 - |z_n|,$$

also $U_{R_n\rho_n}(z_n) = z_n + \rho_n U_{R_n}(0) \subset \mathbb{D}$. Folglich ist

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n\zeta) \qquad \big(|\zeta| < R_n\big)$$

definiert. Aus $R_n \to \infty$ folgt, dass für jedes $K \subset \mathbb{C}$ kompakt damit g_n für n genügend groß auf K definiert ist. Nach der Kettenregel gilt (beachte $g_n \in M\big(U_{R_n}(0)\big)$)

$$g_n^\#(\zeta) = \rho_n f_n^\#(z_n + \rho_n\zeta) \qquad \big(|\zeta| < R_n\big).$$

Wir wählen eine Teilfolge $(n_j^{(0)})$ von (n) so, dass $z_{n_j^{(0)}} \to z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ und definieren induktiv Teilteilfolgen:
Dazu sei $m \in \mathbb{N}$ und $(n_j^{(m-1)})$ bereits definiert. Ist $|\zeta| < R_m$, so gilt für $n \geq m$

$$f_n^\#(z_n + \rho_n\zeta)\big(1 - |z_n + \rho_n\zeta|\big) \leq R_n\ .$$

Also folgt für $n \geq m$

$$g_n^\#(\zeta) \leq \rho_n \frac{R_n}{1 - |z_n + \rho_n\zeta|} \leq \frac{\rho_n R_n}{1 - |z_n| - \rho_n|\zeta|} = \frac{\rho_n R_n}{\rho_n R_n - \rho_n|\zeta|} = \frac{1}{1 - |\zeta|/R_n}.$$

Ist $0 < R < R_m$, so ist $\big(\frac{1}{1-R/R_n}\big)_{n\geq m}$ beschränkt und damit ist

$$\sup_{n\geq m} \|g_n^\#\|_{\infty,U_R[0]} < \infty.$$

Nach Marty's Theorem ist $\{g_n : n \geq m\}$ eine normale Familie in $C(U_{R_m}(0), \mathbb{C}_\infty)$. Folglich existiert eine Teilfolge $(n_j^{(m)})$ von $(n_j^{(m-1)})$ (mit $n_j^{(m)} \geq m$) so, dass $(g_{n_j^{(m)}})_j$ in $C(U_{R_m}(0), \mathbb{C}_\infty)$ konvergiert.
Nach Konstruktion konvergiert damit die Diagonalfolge $(\tilde{g}_j)$, also $\tilde{g}_j := g_{n_j^{(j)}}$ $(j \in \mathbb{N})$, gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ und für die Grenzfunktion $g \in M_\infty(\mathbb{C})$ gilt mit $\tilde{f}_j := f_{n_j^{(j)}}, \tilde{z}_j := z_{n_j^{(j)}}, \tilde{\rho}_j = \rho_{n_j^{(j)}}$

$$1 = \tilde{f}_j^\#(\tilde{z}_j + \tilde{\rho}_j)\tilde{\rho}_j = \tilde{g}_j^\#(0) \to g^\#(0),$$

also auch $g^\#(0) = 1$. Ist $\zeta \in \mathbb{C}$, so gilt für j genügend groß

$$1 \leftarrow \frac{1}{1 - |\zeta|/R_j} \geq \tilde{g}_j^\#(\zeta) \to g^\#(\zeta) \qquad (j \to \infty)$$

und damit $g^{\#}(\zeta) \leq 1$.
Sind die f_n holomorph in G, so ist nach obigen Überlegungen g holomorph in $\mathbb{C}$.

□

Satz 12.6 *(Montel)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset M_\infty(G)$. Ist

$$\Big|\mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(G)\Big| \geq 3,$$

so ist $\mathcal{F}$ normal (in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$).

Beweis. Es reicht, zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist normal an z_0 für alle $z_0 \in G$ (nach S. B.5). Wir können daher ohne Einschränkung $z_0 = 0$ und $G = \mathbb{D}$ annehmen. Außerdem können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$0, 1, \infty \notin \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(\mathbb{D})$$

gilt. Ansonsten betrachte man statt $\mathcal{F}$ die Familie $\{\varphi \circ f : f \in \mathcal{F}\}$, wobei $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation, die die (mindestens) 3 Werte $w_1, w_2, w_3 \notin \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(G)$ nach $0, 1, \infty$ abbildet ($\varphi(z) = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_2} \cdot \frac{z - w_2}{z - w_1}$ ist geeignet).
Dann ist $\mathcal{F} \subset H(\mathbb{D})$. Aus $0 \notin f(\mathbb{D})$ folgt die Existenz m-ter Wurzeln von $f \in \mathcal{F}$, d. h., für alle $m \in \mathbb{N}$ existieren $g \in H(\mathbb{D})$ mit $g^m = f$. Wir setzen für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_k := \{g \in H(\mathbb{D}) : g^{2^k} = f \text{ für ein } f \in \mathcal{F}\}.$$

Angenommen, $\mathcal{F}$ ist nicht normal. Dann ist auch $\mathcal{F}_k$ nicht normal ($k \in \mathbb{N}$).
(Denn: Ist $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{F}$, die keine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, und sind $g_n \in \mathcal{F}_k$ so, das $g_n^{2^k} = f_n$, so hat auch $(g_n)_n$ keine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.)
Es sei $h_k \in M(\mathbb{C})$ die Grenzfunktion aus dem Zalcman-Lemma. Dann ist $h_k \in H(\mathbb{C})$ und $h_k \not\equiv \text{const}$. Damit ergibt sich aus dem Satz von Hurwitz, dass $h_k(\mathbb{C})$ keine 2^k-ten Einheitswurzeln enthält (jede Funktion $g \in \mathcal{F}_k$ ist so, dass $g(\mathbb{D})$ keine 2^k-ten Einheitswurzeln enthält).
Weiter ist $h_k^{\#} \leq 1$ auf $\mathbb{C}$. Damit ist nach Martys Theorem $\{h_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine normale Familie in $C(\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty)$. Ist $h \in H_\infty(\mathbb{C})$ lokal gleichmäßiger Grenzwert einer Teilfolge von $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so enthält wieder nach dem Satz von Hurwitz $h(\mathbb{C})$ keine 2^k-te Einheitswurzel, jetzt aber für alle $k \in \mathbb{N}$ (beachte $h \not\equiv \text{const}$, da $h^{\#}(0) = 1$). Da

$$\{w \in \mathbb{C} : w^{2^k} = 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$$

dicht in $\partial\mathbb{D}$ ist und da $h(\mathbb{C})$ ein Gebiet ist, gilt $h(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}$ oder $h(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}^*$. Im ersten Fall ist h konstant nach dem Satz von Liouville. Widerspruch. Im zweiten Fall liefert die

Anwendung von Liouville auf $1/h$ den gleichen Widerspruch. $\square$

Bemerkung und Definition 12.7 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in \partial G$ ein isolierter Punkt von G^c. Hat $f \in H(G)$ an a eine wesentliche Singularität, so folgt aus dem Satz von Casorati-Weierstrass

$$\overline{f\big(U_\delta(a) \setminus \{a\}\big)}^{\mathbb{C}_\infty} = \mathbb{C}_\infty$$

für alle $\delta > 0$ (mit $U_\delta(a) \setminus \{a\} \subset G$).
Ein Punkt $w \in \mathbb{C}_\infty$ mit

$$w \notin f\big(U_\delta(a) \setminus \{a\}\big)$$

für ein $\delta > 0$ heißt *(Picardscher) Ausnahmewert* von f an a. Wir verwenden diesen Begriff auch im Falle $f \in M(G)$ und schreiben $E_{\infty,f}(a)$ für die Menge der Ausnahmewerte von f in $\mathbb{C}_\infty$. Für Funktionen $f \in H(G)$ ist der Wert ∞ offenbar stets ein Ausnahmewert. In diesem Fall schreiben wir $E_f(a) := E_{\infty,f}(a) \cap \mathbb{C}$.

Beispiel 12.8 Ist $f(z) = e^{1/z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, so hat f an 0 eine wesentliche Singularität. Hier ist $E_f(0) = \{0\}$. Dasselbe gilt für $f(z) = e^{1/z}(z-1)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, obwohl hier $0 \in f\big(\mathbb{C} \setminus \{0\}\big)$.

Satz 12.9 *(Picard; groß)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in M(G)$. Ist $a \in \partial G$ ein isolierter Punkt von G^c und ist $|E_{\infty,f}(a)| \geq 3$, so ist f meromorph fortsetzbar nach $G \cup \{a\}$. Ist $f \in H(G)$ mit $|E_f(a)| \geq 2$, so hat f an a eine hebbare Singularität oder einen Pol.

Beweis. Es reicht, die Behauptung für $f \in M(G)$ zu zeigen. Ohne Einschränkung seien zudem $a = 0$ und $0, 1, \infty$ Ausnahmewerte (ansonsten: Möbius-Transformation „nachschalten"). Dann sind insbesondere f und $1/f$ in $H(U)$, wobei $U := U_r(0) \setminus \{0\}$ und $r > 0$ genügend klein. Wir definieren für eine beliebige Folge (ρ_n) in $(0,1)$ mit $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$

$$g_n(z) := f(\rho_n z) \qquad (n \in \mathbb{N}, z \in U).$$

Aus dem Satz von Montel folgt, dass $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H(U)$ normal in $C(U, \mathbb{C}_\infty)$ ist. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir $g_n \to g$ lokal gleichmäßig auf U annehmen.

1. Fall: $g \not\equiv \infty$. Dann ist $g \in H(U)$ nach S. 12.1. Es sei $0 < \rho < r$ fest und $M > 0$ so, dass

$$\big|f(z)\big| \leq M \quad \text{und} \quad \big|g(z)\big| < M \qquad \big(|z| = \rho\big).$$

Dann ist auch $\big|g_n(z)\big| \leq M$ $\big(|z| = \rho\big)$ für n genügend groß ($g_n \to g$ gleichmäßig auf $K_\rho(0)$), also

$$\big|f(z)\big| \leq M \text{ für } |z| = \rho\rho_n.$$

Nach dem Maximumprinzip ist damit sogar

$$\big|f(z)\big| \le M \text{ für } \rho\rho_n \le |z| \le \rho,$$

also auch auf $U_\rho(0) \setminus \{0\}$. Folglich hat f an a eine hebbare Singularität (Riemannscher Hebbarkeitssatz).
2. Fall: $g \equiv \infty$. Dann argumentiert man entsprechend mit $1/f$ statt f (beachte $1/f \in H(U)$). Damit hat $1/f$ eine hebbare Singularität an 0 und folglich f einen Pol oder eine hebbare Singularität an 0. □

Bemerkung und Definition 12.10 Es sei $f \in M(\mathbb{C})$. Ein Punkt $w \in \mathbb{C}_\infty$ heißt *(Picardscher) Ausnahmewert* von f (an ∞), falls w Ausnahmewert von $z \mapsto f(1/z)$ an der Stelle 0 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\big|f^{-1}\big(\{w\}\big)\big| < \infty$ ist (nach dem Identitätssatz existieren keine Häufungspunkte von w-Stellen in $\mathbb{C}$).
Ist f ganz und transzendent, so hat $z \mapsto f(1/z)$ an 0 eine wesentliche Singularität. Also ist die Menge der Ausnahmewerte höchstens 2-elementig nach dem Satz von Picard! Da ∞ bei ganzen Funktionen stets Ausnahmewert ist, gibt es höchstens einen Ausnahmewert in $\mathbb{C}$. Wir schreiben $E_f \subset \mathbb{C}$ für die (leere oder einpunktige) Menge der Picardschen Ausnahemwerte $\neq \infty$.
Etwa für $f(z) = e^z$ oder $f(z) = e^z z$ ist $0 \in E_f$, d. h. ein Ausnahmewert in $\mathbb{C}$ kann tatsächlich auftreten.

13 Komplexe Dynamik

Wir untersuchen nun – in Ansätzen – das „Langzeitverhalten" diskreter dynamischer Systeme, die durch ganze Funktionen und insbesondere durch Polynome definiert sind. Dazu setzen wir für eine ganze Funktion f

$$f^n := f^{\circ n} := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{mal}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

mit $f^0 := \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ und betrachten die Folge $(f^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Bemerkung und Definition 13.1 Wir setzen

$$\mathcal{E} := H(\mathbb{C}) \setminus \{f : f(z) = az + b : a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Dann heißt für $f \in \mathcal{E}$

$$F := F_f := \{z \in \mathbb{C} : \exists \text{ offene Umgebung } U \text{ von } z : \{(f^n)_{|U} : n \in \mathbb{N}\} \text{ normal in } C(U, \mathbb{C}_\infty)\}$$

die *Fatou-Menge* von f. Außerdem heißt $J := J_f := \mathbb{C} \setminus F$ die *Julia-Menge* von f. Man beachte: Nach Definition ist F offen und damit auch J abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Außerdem ist $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ normal in $C(F, \mathbb{C}_\infty)$ nach S. B.5.
Schließlich setzen wir $I = I_f = \big\{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \to \infty \ (n \to \infty)\big\}$ (*Attraktionsmenge* von ∞).

Beispiel 13.2 Es sei $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$.
Hier gilt (vgl. B. 12.4)

$$f^n(z) = z^{2^n} \to \begin{cases} 0 & \text{in } C(\mathbb{D}, \mathbb{C}_\infty) \\ \infty & \text{in } C(\mathbb{D}^*, \mathbb{C}_\infty) \end{cases}$$

und folglich ist $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}^* \subset F_f$. Andererseits hat $((f^n)_{|U})_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge für alle offenen U mit $\partial\mathbb{D} \cap U \neq \emptyset$. Damit ist $\partial\mathbb{D} \subset J_f$ also $\partial\mathbb{D} = J_f$ und $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}^* = F_f$. Schließlich ist $I_f = \mathbb{D}^*$.

Bemerkung und Definition 13.3 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Ferner sei $z^* \in G$ ein Fixpunkt von f, d. h. $f(z^*) = z^*$. Dann heißt z^*

1. *superattraktiv*, falls $f'(z_0) = 0$,
2. *attraktiv*, falls $0 < \big|f'(z_0)\big| < 1$,
3. *abweisend*, falls $\big|f'(z_0)\big| > 1$,
4. *neutral*, falls $\big|f'(z_0)\big| = 1$.

Ist z^* (super-)attraktiv, so existiert zu jede $\alpha \in \big(|f'(z^*)|, 1\big)$ ein $r > 0$ so, dass $f : U \to U$, wobei $U = U_r(z^*)$, eine α-Kontraktion ist.
(Denn: Es sei $r > 0$ so, dass $\|f'\|_{\infty, U_r[z^*]} \le \alpha$. Dann gilt $\big|f(z) - f(w)\big| \le \alpha|z - w|$ für $z, w \in U$ und speziell für $w = z^*$

$$\big|f(z) - z^*\big| = \big|f(z) - f(z^*)\big| \le \alpha|z - z^*|.)$$

Induktiv ergibt sich für $z \in U$

$$|f^n(z) - z^*| \le \alpha^n |z - z^*| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Hieraus folgt $f^n \to 0$ gleichmäßig auf U. Insbesondere ist dann $z^* \in F_f$ im Falle $f \in \mathcal{E}$.
Ist dagegen z^* abweisend, so gilt stets $z^* \in J_f$.
(Denn: Angenommen, es existiert eine offene Umgebung U von z^* (ohne Einschränkung U Gebiet) so, dass $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ normal in $C(U, \mathbb{C}_\infty)$ ist. Ist (n_j) so, dass

$$f^{n_j} \to g \text{ lokal gleichmäßig auf } U,$$

so ist entweder $g \equiv \infty$ oder $g \in H(U)$ nach S. 12.1.
Im 1. Fall ergibt sich ein Widerspruch zu

$$f^{n_j}(z^*) = z^* \to z^* \qquad (j \to \infty),$$

und im 2. Fall folgt mit der Kettenregel

$$\infty \leftarrow (f')^{n_j}(z^*) = (f^{n_j})'(z^*) \to g'(z^*) \qquad (j \to \infty),$$

also auch ein Widerspruch.)

Beispiel 13.4 1. Für $f(z) = z^2$ ist $z^* = 0$ superattraktiver Fixpunkt.
2. Für $f(z) = \lambda \sin z$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$, ist $z^* = 0$ Fixpunkt mit $f'(0) = \lambda$. Also ist $0 \in F_f$, falls $|\lambda| < 1$, und $0 \in J_f$, falls $|\lambda| > 1$. Außerdem kann man sich überlegen, dass für $\lambda = 1$ ebenfalls $0 \in J_f$ gilt ([Ü]).

Bemerkung und Definition 13.5 Es seien X eine Menge und $f : X \to X$. Dann heißt eine Menge $M \subset X$

1. *(vorwärts-)invariant (unter f)*, falls $f(M) \subset M$,
2. *rückwärts-invariant (unter f)*, falls $f^{-1}(M) \subset M$,
3. *vollständig invariant (unter f)*, falls $f(M) \subset M$ und $f^{-1}(M) \subset M$.

Man kann sich leicht überlegen ([Ü]): M ist genau dann vollständig invariant, wenn M und M^c invariant sind. Weiter setzen wir

$$O^+(M) := O_f^+(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(M), \qquad O^-(M) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^n)^{-1}(M)$$

sowie

$$O(M) := O^+(M) \cup O^-(M) \cap MO_f^+(M) \quad \text{und} \quad O^{(\pm)}(x) := O^{(\pm)}\big(\{x\}\big) \text{ für } x \in X.$$

Satz 13.6 *Für $f \in \mathcal{E}$ sind F_f, J_f und I_f vollständig invariant.*

Beweis. Die Behauptung für I_f ergibt sich sofort aus der Definition. Es reicht also, zu zeigen: F_f ist vollständig invariant (da $J_f = F_f^c$).
1. Wir zeigen $f^{-1}(F) \subset F$. Dazu sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $w_0 = f(z_0) \in F$. Zu zeigen ist $z_0 \in F$.
Es sei V eine offene Umgebung von w_0 so, dass $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ normal in $C(V, \mathbb{C}_\infty)$ ist. Ist (n_j) eine Folge in $\mathbb{N}$, so existieren eine Teilfolge $(f^{n_{j_k}})$ von (f^{n_j}) und ein $g \in H_\infty(V)$ (ohne Einschränkung V Gebiet) mit

$$f^{n_{j_k}-1} \to g \quad \text{ in } C(V, \mathbb{C}_\infty).$$

Dann gilt auch

$$f^{n_{j_k}} = f^{n_{j_k}-1} \circ f \to g \quad \circ f \text{ in } C(f^{-1}(V), \mathbb{C}_\infty).$$

2. Wir zeigen: $f(F) \subset F$. Ist $z_0 \in F$, so existiert eine offene Umgebung U von z_0 so, das für jede Folge (n_j) in $\mathbb{N}$ eine gleichmäßige Cauchy-Teilfolge $(f^{n_{j_k}+1})$ von (f^{n_j+1}) auf U existiert. Ist $w \in f(U)$, so existiert ein $z \in U$ mit $f(z) = w$. Also ist

$$\sup_{w \in f(U)} \chi\big(f^{n_{j_k}}(w), f^{n_{j_\ell}}(w)\big) \leq \sup_{z \in U} \chi\big(f^{n_{j_k}+1}(z), f^{n_{j_\ell}+1}(z)\big).$$

Damit ist $(f^{n_{j_k}})$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $f(U)$. Da $f(U)$ eine offene Umgebung von $w_0 = f(z_0)$ ist, ist $w_0 \in F$. □

Bemerkung 13.7 Es sei f ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu$. Dann gilt

$$f(z) \sim a_d z^d \qquad (z \to \infty),$$

und damit existiert ein $R > 0$ so, dass $\big|f(z)\big| \geq 2|z|$ für $z \in V := V_{R,\infty}(0)$. Induktiv ergibt sich $|f^n(z)| \geq 2^n|z|$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in V$. Damit ist $V \subset I_f$. Außerdem ist nach Definition von I_f auch

$$I_f = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(V) \quad \big(= O^-(V)\big).$$

Folglich ist I_f offen, und nach Definition von F_f ist $I_f \subset F_f$ (beachte: $f^n \to \infty$ gleichmäßig auf $f^{-k}(V)$ für alle $k \in \mathbb{N}$). Damit ist $J_f \subset V^0$ kompakt. Wir zeigen

$$0 \neq \partial I \subset J_f.$$

(Denn: Ist z^* ein Fixpunkt von f (existiert, da f Polynom vom Grad ≥ 2), so ist $z^* \notin I$, also ist $\partial I \neq \emptyset$. Da $I = I_f$ vollständig invariant ist, gilt $f(\partial I) \cap I = \emptyset$ und $f(\partial I) \subset \partial I$ (ist $w \in f(\partial I)$ und $z \in \partial I$ mit $f(z) = w$, so existiert eine Folge (z_n) in I mit $z_n \to z$. Also gilt auch $I \ni f(z_n) \to f(z) = w$ und damit $w \in \overline{I} \setminus I = \partial I$.)
Induktiv ergibt sich $f^n(\partial I) \subset \partial I$ $(n \in \mathbb{N})$, und damit ist $\big(\|f^n\|_{\infty,\partial I}\big)_n$ beschränkt.

Ist $z_0 \in \partial I$, so ist $\{(f^n)_{|U} : n \in \mathbb{N}\}$ nicht normal in $C(U, \mathbb{C}_\infty)$ für alle offenen Umgebungen U von z_0 (da $\big(f^n(z_0)\big)_n$ beschränkt und $f^n(z_0) \to \infty$ auf $U \cap I$). Also ist $z_0 \in J$. Man kann zeigen (mit etwas Aufwand), dass tatsächlich $J_f = \partial I_f$ ist.

Nach diesen eher elementaren Überlegungen nutzen wir nun die Sätze von Montel und Picard, um weitergehende Aussagen auch für allgemeine ganze Funktionen zu machen.
Wesentlich für die gesamte Theorie ist folgende Beobachtung: Ist $z \in J$ und ist U eine offene Umgebung von z, so ist nach dem Satz von Montel $\mathbb{C} \setminus O^+(U)$ höchstens 1-punktig. Daraus ergibt sich schon einmal unmittelbar:

Satz 13.8 *Ist $f \in \mathcal{E}$, so ist $J_f = \mathbb{C}$ oder $(J_f)^0 = \emptyset$.*

Beweis. Es sei $z_0 \in (J_f)^0$. Ist $U := U_\delta(z_0) \subset J_f$, so ist (da J_f invariant)

$$O^+(U) \subset J_f,$$

also $1 \geq \big|\mathbb{C} \setminus O^+(U)\big| \geq |\mathbb{C} \setminus J_f|$ und damit $J_f = \mathbb{C}$, da J_f abgeschlossen ist. □

Bemerkung 13.9 Für Polynome f ist nach B. 13.7 und S. 13.8 stets $(J_f)^0 = \emptyset$.

Nach B. 13.7 ist für Polynome f stets $J_f \neq \emptyset$. Man kann zeigen (nicht leicht), dass auch für transzendente f stets $J_f \neq \emptyset$ ist. Außerdem kann man zeigen (auch nicht leicht): Ist $f(z) = \lambda e^z$, wobei $\lambda > 0$, so ist $J_f = \mathbb{C}$ genau dann, wenn $\lambda > 1/e$.

Bemerkung 13.10 Es sei $z \in J_f$ und es sei U eine (offene) Umgebung von z. Ist $w \notin O^+(U)$, so ist

$$O^-(w) \cap O^+(U) = \emptyset.$$

(Denn: Angenommen, es existiert ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f^n(z_1) = w$ und $f^k(z_1) \in U$ für gewisse $n, k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f^k(w) = f^{n+k}(z_1) = f^n\big(f^k(z_1)\big) \in f^n(U) \subset O^+(U).$$

Widerspruch!)
Also ist $\big|O^-(w) \cup \{w\}\big| \leq 1$ nach dem Satz von Montel und daher

$$O^-(w) = \emptyset,$$

d. h., w ist ein sogenannter ausgelassener Wert von f (wie etwa $w = 0$ bei $f(z) = e^z$) oder aber

$$O^-(w) = \{w\}$$

und damit ist w ein Fixpunkt mit $O(w) = \{w\}$ (wie etwa $w = 0$ bei $f(z) = z^2$). In beiden Fällen ist $w \in \mathbb{C}$ ein Picardscher Ausnahmewert (wovon es nur höchstens einen gibt).
Wir nennen w einen *Montelschen Ausnahmewert* und schreiben $\widetilde{E}_f$ für die Menge der Montelschen Ausnahmewerte (also $|\widetilde{E}_f| \leq 1$). Dann gilt: Ist U offen mit $U \cap J_f \neq \emptyset$, so ist $O^+(U) \supset \mathbb{C} \setminus \widetilde{E}_f$.

Satz 13.11 *Es sei $f \in \mathcal{E}$. Dann gilt für alle $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $U \cap J_f \neq \emptyset$*

$$O^+(U \cap J_f) \supset J_f \setminus \widetilde{E}_f.$$

Ist f ein Polynom, so ist $\widetilde{E}_f \cap J_f = \emptyset$ und es gilt $\bigcup\limits_{n=1}^{N} f^n(U \cap J_f) = J_f$ für N genügend groß.

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich aus B. 13.10 und der Tatsache, dass $O^+(J_f \cap U) = J_f \cap O^+(U)$ gilt (vollständige Invarianz).
Ist f ein Polynom, so hat f keinen ausgelassenen Wert (Fundamentalsatz der Algebra).
Es sei $w \in \mathbb{C}$ mit $O(w) = \{w\}$. Dann hat die Gleichung $f(z) = w$ nur die Lösung w, d. h.

$$f(z) - w = c(z - w)^d, \qquad d = \deg f$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist aber $w \in F_f$ als superattraktiver Fixpunkt ($f'(w) = 0$). Damit ist $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f^n(U \cap J_f) = O^+(U \cap J_f) = J_f$. Da J_f kompakt und $f^n(U)$ offen in $\mathbb{C}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ (und damit $f^n(U \cap J_f) = J_f \cap f^n(U)$ offen in J), ist $\bigcup\limits_{n=1}^{N} f^n(U \cap J_f) = J_f$ für N genügend groß. $\square$

Bemerkung 13.12 Es sei $f \in \mathcal{E}$. Ist $z \in J_f \setminus \widetilde{E}_f$, so ergibt sich aus S. 13.11 unmittelbar, dass $O^-(z)$ dicht in J_f ist. Ist f ein Polynom, so gilt dies für alle $z \in J_f$.
Dies kann genutzt werden, um Bilder von J_f zu erzeugen. Man startet mit einem beliebigen $z \in J_f$ (kein Montel-Ausnahmewert) und berechnet sukzessive die entsprechenden Urbilder. Die Vereinigung „füllt J_f dicht auf".

Ist $X = \emptyset$ und ist $f : X \to X$, so heißt $x_0 \in X$ *periodisch*, falls $f^n(x_0) = x_0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so heißt X *perfekt*, falls X kompakt ist und jeder Punkt Häufungspunkt ist.

Satz 13.13 *Es sei f ein Polynom. Dann gilt $J_f = J_{f^m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und J_f ist perfekt.*

Beweis. 1. $J_f = J_{f^m}$ als [Ü].
2. Wir zeigen zunächst: Ist $z \in J$, so existiert ein $\widetilde{z} \in J$ mit $z \in O^+(\widetilde{z})$ und $\widetilde{z} \notin O^+(z)$, d. h. $\tilde{z} \in O^-(z) \setminus O^+(z)$.
Ist z nicht periodisch, so kann man $\widetilde{z} \in O^-(z)$ beliebig wählen.
Es sei z periodisch und $n \in \mathbb{N}$ die minimale Periode von z. Nach S. 13.11 hat f^n keinen Montelschen Ausnahmewert in $J_{f^n} = J_f$. Also existiert ein $\widetilde{z} \in O^-_{f^n}(z) \setminus \{z\}$. Dann ist $\widetilde{z} \notin O^+(z)$ (sonst wäre $\widetilde{z} = f^k(z)$ für ein $k < n$ wegen $f^n(z) = z$). Damit wäre mit m so, dass $f^{nm}(\widetilde{z}) = z$,

$$f^k(z) = f^k\big(f^{nm}(z)\big) = f^{nm}\big(f^k(z)\big) = f^{nm}(\widetilde{z}) = z.$$

Widerspruch zur Minimalität von n.)
Es seien $z \in J$ und U eine Umgebung von z. Ist $\widetilde{z}$ wie oben, so ist $\widetilde{z} \in f^N(U \cap J_f)$ für ein $N \in \mathbb{N}$ nach S. 13.11. Ist $\zeta \in U \cap J_f$ mit $f^N(\zeta) = \widetilde{z}$, so ist $\zeta \neq z$ da $\widetilde{z} \notin O^+(z)$. Damit ist z ein Häufungspunkt von J_f. Da J_f kompakt ist, ist J_f perfekt. □

Bemerkung 13.14 1. Die Aussage von S. 13.13 gilt auch für transzendente Funktionen f in dem Sinne, das jedes $z \in J_f$ Häufungspunkt ist. Die ist allerdings schwieriger zu beweisen (wie oben erwähnt ist schon $J_f \neq \emptyset$ schwer zu zeigen).
2. Ist X ein perfekter metrischer Raum, so ist X „lokal überabzählbar", d. h. jede offene (nichtleere) Menge $U \subset X$ ist überabzählbar. ([Ü])

Satz 13.15 *Es seien $(X, d = d_X)$ ein vollständiger metrischer Raum und $(Y, d = d_Y)$ ei separabler metrischer Raum. Ist (T_n) eine Folge stetiger Abbildungen $T_n : X \to Y$, so sind äquivalent*

a) Für alle $\emptyset \neq U \subset X, \emptyset \neq V \subset Y$ offen existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$T_n(U) \cap V = \emptyset \qquad (\Leftrightarrow T_n^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset).$$

b) Die Menge $M := \{x \in X : \{T_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $Y\}$ ist dicht in X.

In diesem Fall ist M eine (dichte) G_δ-Menge.

Beweis. Es sei $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ dicht in Y. Dann ist

$$\mathcal{U} := \{U_{1/k}(y_j) : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$$

eine abzählbare Basis von Y (d. h., jede offene, nichtleere Menge ist Vereinigung solcher Kreise). Es sei $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathcal{U}$. Dann gilt a) genau dann, wenn $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} T_n^{-1}(W_m)$ dicht in X ist für alle $m \in \mathbb{N}$.

Weiter ist $x \in M$ genau dann, wenn zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $T_n(x) \in W_m$, d. h. $x \in T_n^{-1}(W_m)$. Also ist

$$M = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(W_m).$$

a) $\Rightarrow$ b): Nach Voraussetzung ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(W_m)$ dicht in X für alle $m \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(W_m)$ offen. Nach dem Satz von Baire ist damit M dicht in X.
b) $\Rightarrow$ a): Da M dicht in X ist, ist auch $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(W_m)$ dicht in X für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Satz 13.16 *Ist $f \in \mathcal{E}$ mit $\widetilde{E}_f \cap J_f = \emptyset$, so ist $\{z \in J_f : O^+(z)$ dicht in $J_f\}$ eine dichte G_δ-Menge in J_f.*

Beweis. Es sei $T_n : J_f \to J_f, T_n(z) = f^n(z)$. Nach S. 13.11 ist $O^+(U \cap J_f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n(U \cap J_f) = J_f$ für alle U offen in $\mathbb{C}$ mit $U \cap J_f = \emptyset$. Also existiert zu jeder offenen Menge V in $\mathbb{C}$ mit $V \cap J_f \neq \emptyset$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T_n(U \cap J_f) \cap V \neq \emptyset$. Damit ist a) aus S. 13.15 erfüllt (man beachte: $A \subset J_f$ ist offen genau dann, wenn $A = A_0 \cap J_f$ für eine offene Menge $A_0 \subset \mathbb{C}$).
□

Bemerkung 13.17 Der Satz gilt auch ohne die Voraussetzung $\widetilde{E}_f \cap J_f = \emptyset$, allerdings braucht man dann f ür den Beweis, dass J_f keine isolierten Punkte hat (damit ist insbesondere $w \in \widetilde{E}_f \cap J_f$ nicht isoliert in J_f). Dies haben wir bemerkt (B. 13.14), aber nicht bewiesen.

14 Die Rungeschen Approximationssätze für Kompakta

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und ist $f \in H(\Omega)$, so gilt für jedes $z_0 \in \Omega$ mit $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu = \lim_{n\to\infty} s_n(z)$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $U_R(z_0)$, wobei

$$s_n(z) = s_n(f, z_0, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu$$

das n-te Taylor-Polynom von f bezüglich z_0 bezeichnet.
Wir wollen der Frage nachgehen, inwiefern f auf allgemeineren kompakten Mengen durch Polynome oder rationale Funktionen (gleichmäßig) approximiert werden kann.

Beispiel 14.1 Es sei $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = 1/z\,(z \in G)$. Für $r > 0$ existiert keine Folge (P_n) von Polynomen mit

$$P_n \to f \text{ gleichmäßig auf } K_r(0).$$

(Angenommen, doch. Dann folgt

$$0 = \int\limits_{K_r(0)} P_n(\zeta) d\zeta \to \int\limits_{K_r(0)} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \qquad (n \to \infty)$$

Widerspruch!). Andererseits gilt für die n-te Teilsumme s_n der Laurent-Entwicklung von $f \in H(G)$

$$s_n \to f \quad \text{ in } C(G, \mathbb{C}).$$

Damit ist f auf allen kompakten Mengen $K \subset G$ gleichmäßig approximierbar durch rationale Funktionen mit Polen ausschließlich in 0 und ∞.

Definition 14.2 Ist (X, d) ein metrischer Raum , so schreiben wir im Weiteren kurz $K \Subset X$, falls $K \subset X$ kompakt ist. Damit setzen wir für $K \Subset \mathbb{C}$

$$H(K) := \{f : K \to \mathbb{C} : \exists U \supset K \text{ offen und } F \in H(U) : F_{|K} = f\}$$

sowie

$$P(K) := \overline{\operatorname{span}}^K \{z \mapsto z^\nu : \nu \in \mathbb{N}_0\},$$

wobei $\overline{\operatorname{span}}^K M := \overline{\operatorname{span} M}^{C(K,\mathbb{C})}$.
Weiter sei

$$g_a(z) := \begin{cases} \frac{1}{a-z}, & \text{falls } a \in \mathbb{C} \\ z, & \text{falls } a = \infty \end{cases}$$

und für $A \subset \mathbb{C}_\infty$

$$R_A(K) := \overline{\operatorname{span}}^K\{g_a^\nu : a \in A, \nu \in \mathbb{N}\}$$

(damit ist $P(K) = R_{\{\infty\}}(K)$).
Mit diesen Bezeichnungen ist in der Situation von B. 14.1

$$H(G) \subset R_{\{0,\infty\}}(K)$$

für alle $K \Subset G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g_0 \notin P(K)$ für $K = K_r(0)$.

Eine erste Version eines Runge-Satzes ist die folgende

Satz 14.3 *(Runge für rationale Approximation)*
Für jedes $K \Subset \mathbb{C}$ ist

$$H(K) \subset \overline{\operatorname{span}}^K\{g_a : a \in \mathbb{C} \setminus K\}.$$

Für den Beweis benötigen wir eine Version der Cauchyschen Integralformel für allgemeine Kompakta. Für $a, b \in \mathbb{C}$ nennen wir den Pfad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \gamma_{a,b}(t) := a + t(b-a)$ die *orientierte Strecke* von a nach b.

Satz 14.4 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $K \Subset \Omega$. Dann existieren orientierte Strecken $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ in $\Omega \setminus K$ so, dass mit $\Gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_M)$ für alle $z \in K$ und alle $f \in H(\Omega)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

gilt.

Beweis. Es sei

$$\delta := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) \; (> 0).$$

Wir betrachten das Gitter $d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$, wobei die „Maschenweite" d so ist, dass $d\sqrt{2} < \delta$ (hier ist $d\mathbb{Z} + d\mathbb{Z} = \{dx + idy : x, y \in \mathbb{Z}\}$). Es seien $Q_1, \ldots, Q_n$ die (endlich vielen) kompakten Quadrate mit Ecken in $d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$, die K „treffen" (also nichtleeren Schnitt mit K haben). Dann gilt

$$K \subset \bigcup_{n=1}^N Q_n \subset \Omega.$$

(Denn: Nach Definition gilt $K \subset \bigcup_{n=1}^N Q_n$. Ist $n \in \{1, \ldots, N\}$ und ist $z_n \in Q_n \cap K$, so gilt $U_\delta(z_n) \subset \Omega$.Da $\operatorname{diam}(Q_n) = d\sqrt{2} < \delta$ ist, folgt $Q_n \subset \Omega$.)
Ist Q ein beliebiges (kompaktes) Quadrat mit Ecken a, b, c, d (positiv orientiert), so ist $\partial Q = \Gamma_Q^*$, wobei

$$\Gamma_Q := (\gamma_{a,b}, \gamma_{b,c}, \gamma_{c,d}, \gamma_{d,a})$$

eine geschlossene Kette ist. Dabei ist ([Ü])

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z)\left(:= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = 1 \qquad (z \in Q^0). \tag{14.4}$$

Wir betrachten nun diejenigen orientierten Strecken, deren Spur Seite genau eines der Quadrate $Q_1, \dots, Q_N$ ist (also nicht gemeinsame Seite von zwei der Q_n) und bezeichen diese mit $\gamma_1, \dots, \gamma_M$. Es gilt dann für $\Gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_M)$

$$\Gamma^* = \bigcup_{m=1}^{M} \gamma_m^* \subset \Omega \setminus K$$

(beachte: keines der γ_m^* trifft K, da ansonsten γ_m^* zum Rand zweier der Q_n gehören würde). Nach Konstruktion gilt weiterhin

$$\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_{Q_n}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{\gamma_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \left(= \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right)$$

für alle $z \in \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^N \partial Q_n$ (die auf der rechten Seite „fehlenden" Strecken werden je zweimal in entgegengesetzter Orientierung durchlaufen).
Ist $z \in Q_n^0$ für ein $n \in \{1, \dots, N\}$, so gilt nach B./D. 10.2, dem Cauchy-Theorem sowie (14.4)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{Q_\ell}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{falls } \ell = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

für alle $z \in \bigcup_{n=1}^N Q_n^0$.
Da die linke wie die rechte Seite stetige Funktionen auf $\Omega \setminus \Gamma^*$ sind, ergibt sich die Gleichheit auch für beliebiges $z \in \left(\bigcup_{n=1}^N Q_n\right) \setminus \Gamma^* \supset K$. □

Bemerkung 14.5 Die Konstruktion der $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ zeigt, dass für eine geeignete Zerlegung $I_1, \dots, I_q$ von $\{1, \dots, M\}$ die Ketten $\Gamma_j = (\gamma_j)_{j \in J_\ell}$ $(\ell \in \{1, \dots, q\})$ geschlossen sind, d. h. Γ^* besteht aus q (paarweise disjunkten) „Polygonzügen" mit achsenparallelen Seiten.

Beweis zu S. 14.3 Wir wählen eine offene Umgebung Ω von K so, dass ein $F \in H(\Omega)$ existiert mit $F_{|K} = f$. Ist $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_M)$ wie in S. 14.4, so gilt nach S. 14.4

$$f(z) = F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \left(= \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_m} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right) \qquad (z \in K).$$

Daher reicht es, zu zeigen: Ist $\gamma = \gamma_{a,b}$ eine orientierte Strecke in $\mathbb{C} \setminus K$ und ist $g \in C(\gamma^*)$, so ist

$$z \mapsto \int\limits_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \in \overline{\operatorname{span}}^K \{g_a : a \in \gamma^*\}$$

(man beachte $\Gamma^* = \bigcup_{n=1}^N \gamma_m^* \subset \mathbb{C} \setminus K$).
Es sei $\varepsilon > 0$. Da

$$\gamma^* \times K \ni (\zeta, z) \mapsto \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \in \mathbb{C}$$

(gleichmäßig) stetig auf $\gamma^* \times K \Subset \mathbb{C}^2$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{g(\zeta')}{\zeta' - z} \right| < \varepsilon \qquad (\zeta, \zeta' \in \gamma^*, |\zeta - \zeta'| < \delta; z \in K).$$

Weiter existiert eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

vo $[0,1]$ so, dass für

$$\gamma_j := \gamma_{|[t_{j-1}, t_j]} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

gilt

$$|\zeta - \zeta'| < \delta \qquad (\zeta, \zeta' \in \gamma_j^*; j = 1, \ldots, n).$$

Wählt man $Q_j \in \gamma_j^*$, so folgt für $z \in K$

$$\left| \int\limits_{\gamma_j} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int\limits_{\gamma_j} \frac{g(a_j)}{a_j - z}\, dz \right| < \varepsilon L(\gamma_j).$$

Also erhalten wir mit

$$c_j := g(a_j) \int\limits_{\gamma_j} d\zeta \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

für alle $z \in K$

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \sum_{j=1}^n c_j \frac{1}{a_j - z} \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^n \left(\int\limits_{\gamma_j} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int\limits_{\gamma_j} \frac{g(a_j)}{a_j - z}\, d\zeta \right) \right| \\
&\le \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^n L(\gamma_j) = \varepsilon \cdot L(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Der Beweis zeigt, dass in der Situation von S. 14.3 die Pole a in Γ^* gewählt werden können, wenn Γ wie in S. 14.4 ist. Wir wollen nun eine wesentlich genauere Aussage hinsichtlich der Wählbarkeit der Pole machen.

Satz 14.6 *(Runge für rationale Approximation mit vorgegebenen Polen)*
Es sei $K \Subset \mathbb{C}$. Ist $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ so, dass $A \cap G \neq \emptyset$ für jede Komponente G von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, so ist

$$H(K) \subset R_A(K).$$

Beweis. Es sei G eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Dann ist $G_0 := G \setminus \{\infty\}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Nach S. 14.3 reicht es, zu zeigen: Für alle $a \in G_0$ ist $g_a \in R_A(K)$. Wir definieren $\varphi : G_0 \to C(K)$ durch

$$\varphi(a) := g_a \qquad (a \in G_0).$$

Dann ist φ stetig.
(Denn: Ist $a \in G_0$ und $\delta := \operatorname{dist}(a, K)$ und ist (a_n) eine Folge in G_0 mit $a_n \to a$, so ist $\operatorname{dist}(a_n, K) \geq \delta/2$ für n genügend groß, also auch

$$\|g_{a_n} - g_a\|_{\infty,K} \leq \frac{2}{\delta^2}\,|a - a_n| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(man beachte
$$\frac{1}{a_n - z} - \frac{1}{a - z} = \frac{a - a_n}{(a_n - z)(a - z)}\ ).$$

Wir setzen $V := \varphi^{-1}\big(R_A(K)\big)$. Dann ist $V \subset G_0$ abgeschlossen, da $R_A(K) \subset C(K)$ abgeschlossen ist.
Wir zeigen: $\emptyset \neq V$ offen. Da G_0 ein Gebiet ist, ist dann schon $V = G_0$ und damit $g_a \in R_A(K)$ für alle $a \in G_0$.
<u>Zu $V \neq \emptyset$:</u> Ist G_0 beschränkt, so existiert ein $b \in A \cap G_0$ (beachte $G = G_0$ dann). Damit ist $g_b \in R_A(K)$, also $b \in V$. Ist G_0 unbeschränkt (d. h. G die Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, die ∞ enthält) und $b \in A \cap G$, so ist $g_b \in R_A(K)$, also im Falle $b \neq \infty$ (d. h. $b \in G_0$) wieder $b \in V$. Ist $b = \infty$, so ist für $|a| > \max_{z \in K} |z|$

$$g_a(z) = \frac{1}{a - z} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1 - z/a} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\nu+1}}\, z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\nu+1}}\, g_\infty^\nu(z)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf K. Damit ist $g_a \in P(K) \subset R_A(K)$.
<u>Zu V offen:</u> Es sei $b \in V$, d. h. $g_b \in R_A(K)$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ auch $g_b^n \in R_A(K)$. (Tatsächlich ist $R_A(K)$ eine Funktionenalgebra, d.h. mit $f, g \in R_A(K)$ ist auch $fg \in R_A(K)$; [Ü]). Es sei $\delta := \operatorname{dist}(b, K)$. Dann gilt für $a \in U_{\delta/2}(b)$

$$g_a(z) = \frac{1}{b - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b-a}{b-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b - a)^\nu \frac{1}{(b - z)^{\nu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b - a)^\nu g_b^{\nu+1}(z)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf K (beachte: $\left|\frac{b-a}{b-z}\right| \leq 1/2$). Also ist auch $g_a \in R_A(K)$. $\square$

Bemerkung 14.7 Als Spezialfall für $A = \{\infty\}$ ergibt sich aus S. 14.6 unmittelbar: Ist $K \Subset \mathbb{C}$ mit zusammenhängendem Komplement (in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}_\infty$, egal), so ist

$$H(K) \subset P(K)$$

(Runge für polynomiale Approximation). B. 14.1 zeigt, dass für K mit nicht zusammenhängendem Komplement die Aussage im Allgemeinen falsch ist.

Beispiel 14.8 1. Es existiert eine Folge (P_n) von Polynomen mit

$$P_n(0) \to \infty \text{ und } P_n(z) \to 0 \text{ für alle } z \neq 0.$$

(Denn: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$L_n := V_{\frac{1}{n},n}(0) \cap \{z = re^{i\varphi} : -\pi + \frac{1}{n} \leq \varphi \leq \pi\}$$

und

$$K_n := L_n \cup \{0\}.$$

Dann ist $K \Subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend. Nach B. 14.7, angewandt auf $f_n \in H(K_n)$ mit

$$f_n(z) := \begin{cases} 0, & z \in L_n \\ n, & z \in M_n \end{cases},$$

existiert ein Polynom P_n mit

$$\|f_n - P_n\|_{\infty,K_n} < \frac{1}{n}.$$

Die Folge (P_n) ist dann wie behauptet ([Ü]).
2. Es existiert eine Folge (P_n) von Polynomen mit

$$P_n(z) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und so, dass

$$\|P_n\|_{\infty,U_\delta(0)} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

für alle $\delta > 0$. Insbesondere ist damit (P_n) in keiner Umgebung von 0 gleichmäßig konvergent.
(Denn: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$L_n := U_n[0] \cap \big(\{\text{Im } z \leq 0\} \cup \{\text{Im } z \geq 2/n\}\big)$$

und

$$M_n := U_n[0] \cap \{\text{Im } z = 1/n\}$$

sowie $K_n := L_n \cup M_n$. Dann ist $K \Subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend. Also existiert nach B. 14.7, angewandt auf

$$f_n(z) := \begin{cases} 0, & z \in L_n \\ n, & z \in M_n \end{cases}$$

(beachte: $f_n \in H(K_n)$), ein Polynom P_n mit

$$\|f_n - P_n\|_{\infty,K_n} < \frac{1}{n}.$$

Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist $z \in L_n$ für n genügend groß, also gilt für diese n

$$\big|P_n(z)\big| = \big|P_n(z) - f_n(z)\big| < \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ist $\delta > 0$, so ist $U_\delta(0) \cap M_n \neq \emptyset$ für n genügend groß. Ist $z_n \in U_\delta(0) \cap M$, so gilt

$$\|P_n\|_{\infty,U_\delta(0)} \geq \big|P_n(z_n)\big| \geq \big|f_n(z_n)\big| - \big|f_n(z_n) - P_n(z_n)\big| \geq n - \frac{1}{n} \to \infty$$

für $n \to \infty$.

Bemerkung 14.9 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $A \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω. Weiter seien P_w $(w \in A)$ Polynome. Wir sagen, eine Funktion $f \in H(\Omega \setminus A)$ habe die Partialbruchzerlegung $(P_w)_{w\in A}$ in Ω, wenn für alle $w \in A$ die Laurent-Entwicklung um w (also auf $V_{0,\delta}(w)$) den Hauptteil

$$\frac{1}{z-w} P_w\Big(\frac{1}{z-w}\Big)$$

hat. Es stellt sich die Frage, ob für jedes Tupel $(P_w)_{w\in A}$ ein solches f existiert. Eine naheliegende Idee wäre, die ,,Reihe"

$$\sum_{w\in A} \frac{1}{z-w}\, P_w\Big(\frac{1}{z-w}\Big)$$

zu betrachten. Im Falle $|A| = \infty$ ist die jedoch im Allgemeinen nicht konvergent. Ist etwa $\Omega = \mathbb{C}, A = \mathbb{Z}$ und $P_w = 1 (w \in A)$, so ist $\sum_{w\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-w}$ nicht konvergent. ,,Gruppiert" man jedoch geeignet, so ist

$$\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{z+m}\Big) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2} =: f(z)$$

auf allen kompakten $K \subset \Omega \setminus A$ gleichmäßig konvergent. Man kann zeigen (mit Hilfe des Residuensatzes), dass hier gilt

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

Wir wollen zeigen, dass durch Hinzufügen geeigneter ,,konvergenzerzeugender Summanden" eine Konvergenz erzwungen werden kann.

Bemerkung und Definition 14.10 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(K_m) = \big(K_m(\Omega)\big)$ die Standardausschöpfung von Ω aus dem Beweis zu S. B.5. Es gilt dann: Ist G eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$, so existiert ein $\zeta \in G \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega)$.
(Denn: Ist G die Komponente, die ∞ enthält. so ist $\zeta = \infty$ geeignet. Ist G eine weitere Komponente (falls existent), so gilt nach Definition: Ist $z \in G$, so existiert ein $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ mit $|z - \zeta| < 1/m$ (beachte: $G \subset U_m[0]$). Dabei gilt $U_{1/m}(\zeta) \subset G$, also insbesondere $\zeta \in G$.)

Damit ist auch

$$Z_{\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega}(\zeta) \subset Z_{\mathbb{C}_\infty \setminus K_m}(\zeta) = G,$$

wobei $Z_M(\zeta)$ die Zusammenhangskomponente von $M \subset \mathbb{C}$ bzgl. ζ bezeichnet.

Satz 14.11 *(Mittag-Leffler)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $A \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω. Ferner seien P_w $(w \in A)$ Polynome. Dann existiert ein $f \in H(\Omega \setminus A)$ mit Partialbruchzerlegung $(P_w)_{w\in A}$, d.h. für alle $w \in A$ ist der Hauptteil der Laurent-Entwicklung auf $V_{0,\delta}(w)$ gegeben durch

$$\frac{1}{z-w}\, P_n\Big(\frac{1}{z-w}\Big)\,.$$

Beweis. Es sei $(K_m)_m = \big(K_m(\Omega)\big)_m$ die Standardausschöpfung von Ω. Für $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir (mit $K_0 := \emptyset$)

$$B_m := A \cap (K_{m+1} \setminus K_m)$$

und (mit $\sum_\emptyset := 0$)

$$f_m(z) := \sum_{w \in B_m} \frac{1}{z-w}\, P_w\Big(\frac{1}{z-w}\Big) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus B_m)$$

(man beachte: B_m ist endlich, da A keinen Häufungspunkt in Ω hat). Dann ist $f_m \in H(\mathbb{C} \setminus B_m)$ und damit insbesondere $f_{m|K_m} \in H(K_m)$. Da jede Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$ einen Punkt aus $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ enthält, gilt

$$f_{m|K_m} \in R_{\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega}(K_m)$$

nach S. 14.6, d. h., es existiert eine rationale Funktion $R_m \in H(\Omega)$ (also Pole nur in $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$) mit

$$\|f_{m|K_m} - R_m\|_{\infty, K_m} < \frac{1}{m^2}$$

(dabei sei $R_m = 0$, falls $K_m = \emptyset$). Also konvergiert

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} \big(f_\nu(z) - R_\nu(z)\big)$$

gleichmäßig auf K_m. Daher ist durch

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \big(f_\nu(z) - R_\nu(z)\big) \qquad (z \in \Omega \setminus A)$$

eine Funktion $f \in H(\Omega \setminus A)$ definiert (beachte: die Reihe konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge vo $\Omega \setminus A$). Dabei ist für alle $m \in \mathbb{N}$

$$f = \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu + \underbrace{\sum_{\nu=m}^{\infty} (f_\nu - R_\nu) - \sum_{\nu=0}^{m-1} R_\nu}_{=:g_m}$$

mit $g_m \in H(\Omega \setminus \bigcup_{\nu=m}^\infty B_\nu)$. Da $K_m \subset \Omega \setminus \bigcup_{\nu=m}^\infty B_\nu$ ist, hat f in K_m genau die vorgeschriebenen Pole mit entsprechenden Hauptteilen. Da m beliebig war, folgt die Behauptung. □

15 Der Raum $H(\Omega)$ und universelle Funktionen

Bemerkung und Definition 15.1 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(K_m) = \big(K_m(\Omega)\big)$ die Standardausschöpfung von Ω. Wir definieren für $f, g \in C(\Omega, \mathbb{C}) = C(\Omega)$

$$d(f,g) := d_\Omega(f,g) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \min\left(\frac{1}{m}, \|f-g\|_{\infty,K_m}\right) \quad (\leq 1)$$

(mit $\|f-g\|_{\infty,\emptyset} := 0$).
Dann rechnet man nach, dass d eine Metrik auf $C(\Omega)$ ist; [Ü].
Außerdem erhält man: Ist (f_n) eine Folge in $C(\Omega)$, so gilt $f_n \to f$ in $(C(\Omega), d)$ genau dann, wenn $f_n \to f$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Ω. Dies rechtfertigt auch die schon früher dafür verwandte Schreibweise

$$f_n \to f \text{ in } C(\Omega, \mathbb{C}).$$

(Denn: „$\Rightarrow$" Gilt $f_n \to f$ in $(C(\Omega), d)$ und ist $K \Subset \Omega$, so wählen wir $M \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_M$. Aus $d(f_n, f) \to 0$ folgt

$$\min\left(\frac{1}{M}, \|f-f_n\|_{\infty,K_M}\right) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also auch

$$\|f-f_n\|_{\infty,K_M} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

und damit

$$\|f-f_n\|_{\infty,K} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

„$\Leftarrow$" Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $M = M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Also ist

$$\sup_{m \geq M} \min\left(\frac{1}{m}, \|f-f_n\|_{\infty,K_m}\right) < \varepsilon.$$

Weiter existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f-f_n\|_{\infty,K_{M_\varepsilon}} < \varepsilon \qquad (n \geq N).$$

Damit ist

$$\max_{1 \leq m \leq M} \min\left(\frac{1}{m}, \|f-f_n\|_{\infty,K_m}\right) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, also auch $d(f, f_n) < \varepsilon$ für $n \geq N$.)
Entsprechend sieht man, dass (f_n) genau dann eine Cauchy-Folge in $C(\Omega)$ ist, wenn (f_n) gleichmäßige Cauchy-Folge auf allen kompakten Teilmengen von Ω ist. Damit ist $(C(\Omega), d)$ vollständig.
(Ist (f_n) C-Folge in $(C(\Omega), d)$, so gilt für alle $K \Subset \Omega$

$$f_n \to f_K \text{ gleichmäßig auf } K$$

für eine Funktion f_K stetig auf K. Durch

$$f(z) := f_K(z).$$

falls $z \in K$, ist $f \in C(\Omega)$ wohldefiniert.)
Außerdem ist $H(\Omega)$ abgeschlossen in $C(\Omega)$ nach S. 2.15, also $(H(\Omega), d)$ ebenfalls vollständig.
Wichtig ist nicht die konkrete Form obiger Metrik d, sondern eigentlich nur die „induzierte Topologie", also die entsprechenden offenen Mengen.
Wir setzen für $f \in H(\Omega), \varepsilon > 0$ und $K \Subset \Omega$

$$V_{\varepsilon,K}(f) := \{g \in H(\Omega), \|f-g\|_{\infty,K} < \varepsilon\} \ \big(= f + V_{\varepsilon,K}(0)\big).$$

Dann gilt: $U \subset H(\Omega)$ ist eine Umgebung von $f \in H(\Omega)$ genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ und ein $K \Subset \Omega$ existieren mit

$$V_{\varepsilon,K}(f) \subset U.$$

(Denn: „$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f) \subset U$. Wir wählen $M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Ist $g \in V_{\varepsilon,K_M}(f)$, so ist $\|f-g\|_{\infty,K_M} < \varepsilon$, also auch

$$\max_{1\le m\le M} \min\left(\frac{1}{m}, \|f-g\|_{\infty,K_m}\right) < \varepsilon$$

und damit $d(f,g) < \varepsilon$. Folglich ist $V_{\varepsilon,K_M}(f) \subset U_\varepsilon(f)$.
„$\Leftarrow$" Es sei $V_{\varepsilon,K}(f) \subset U$. Wir wählen $M \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_M$. Für $\varepsilon' := \min\left(\frac{1}{M}, \varepsilon\right)$ gilt dann: Ist $g \in U_{\varepsilon'}(f)$, so ist $\min\left(\frac{1}{M}, \|f-g\|_{\infty,K_m}\right) < \varepsilon'$ und damit

$$\|f-g\|_{\infty,K} \le \|f-g\|_{\infty,K_M} < \varepsilon' < \varepsilon.$$

Satz 15.2 *(Runge für offene Mengen)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ so, dass $A \cap C \neq \emptyset$ für jede Komponente C von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, so existiert zu jedem $f \in H(\Omega)$ eine Folge (R_n) rationaler Funktionen mit Polen nur in A und so, dass

$$R_n \to f \text{ in } C(\Omega).$$

Beweis. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Ist G eine Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K_m$, so ist für $\zeta \in G \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus K_m)$ ($\neq \emptyset$ nach B./D. 14.10)

$$\emptyset \neq A \cap Z_{\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega}(\zeta) \subset A \cap G.$$

Also existiert nach S. 14.6 eine rationale Funktion R_m mit Polen nur in A und

$$\|f - R_m\|_{\infty,K_m} < 1/m.$$

Ist $K \Subset \Omega$ beliebig, so ist $K \subset K_m$ für m genügend groß, also

$$\|f - R_m\|_{\infty,K} < \frac{1}{m}$$

für m genügend groß. □

Bemerkung 15.3 Als wichtigen Spezialfall erhält man wieder (mit $A = \{\infty\}$): Ist Ω offen und $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ zusammenhängend (insbesondere, wenn Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist), so existiert zu jedem $f \in H(\Omega)$ eine Folge (P_n) von Polynomen mit

$$P_n \to f \quad \text{ in } C(\Omega).$$

Dies ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ nicht zusammenhängend ist (etwa für $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; vgl. B. 14.1).

Als weitere Anwendung der Rungesätze für polynomiale Approximation beweisen wir die Existenz sogenannter universeller Funktionen in zwei Fällen.

Satz 15.4 *(Birkhoff)*
Es sei (a_n) eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist die Menge der ganzen Funktionen f, für die die Translationen $f(\cdot + a_n)$ dicht in $H(\mathbb{C})$ sind, eine dichte G_δ-Menge in $H(\mathbb{C})$.

Beweis. Für $a \in \mathbb{C}$ betrachten wir den Translationsoperator $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ mit

$$(T_a f)(z) = f(z + a) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Dann ist $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ stetig.
Weiter ist $(H(\mathbb{C}), d_\mathbb{C})$ vollständig und separabel (die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ bilden eine dichte Teilmenge in $H(\mathbb{C})$).
Wir beweisen a) aus S. 13.15 für (T_{a_n}) (dann folgt aus S. 13.15 die Behauptung).
Es seien also $\emptyset \neq U, V \subset H(\mathbb{C})$ offen. Dann existieren $g, h \in H(\mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0, K \Subset \mathbb{C}$ (ohne Einschränkung $K = U_R[0]$ für ein $R > 0$) mit

$$V_{\varepsilon,K}(g) \subset U, \qquad V_{\varepsilon,K}(h) \subset V.$$

Also reicht es, zu zeigen: Es existiert ein n mit

$$T_{a_n}(V_{\varepsilon,K}(g)) \cap V_{\varepsilon,K}(h) \neq \emptyset.$$

Es sei n so, dass $|a_n| > 2R$. Dann ist $K \cap (K + a_n) = U_R[0] \cap U_R[a_n] = \emptyset$ und $K \cup (K + a_n) \Subset \mathbb{C}$ hat zusammenhängendes Komplement. Wir setzen

$$\varphi(z) := \begin{cases} g(z), & z \in K \\ h(z - a_n), & z \in K + a_n \end{cases}.$$

Dann ist $\varphi \in H(K)$. Nach B. 14.7 (Runge für polynomiale Approximation) existiert ein Polynom P mit

$$\|\varphi - P\|_{\infty, K \cup (K + a_n)} < \varepsilon.$$

Also ist einerseits $\|g - P\|_{\infty,K} < \varepsilon$ (also $P \in V_{\varepsilon,K}(g)$) und andererseits

$$\|h - T_{a_n} P\|_{\infty,K} = \|T_{-a_n} h - P\|_{\infty, K + a_n} < \varepsilon\ ,$$

d. h. $T_{a_n} P \in V_{\varepsilon,K}(h)$. □

Satz 15.5 *Es sei $G = \mathbb{D}^* \setminus (-\infty, -1)$. Dann ist die Menge aller $f \in H(\mathbb{D})$, für die die Taylor-Teilsummen*

$$(s_n f)(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu \qquad (z \in \mathbb{C})$$

dicht in $H(G)$ sind, eine dichte G_δ-Menge in $H(\mathbb{D})$.

Beweis. Die Abbildungen $s_n : H(\mathbb{D}) \to H(G)$ mit

$$(s_n f)(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu \qquad (z \in G)$$

sind stetig ([Ü]). Außerdem ist $H(\mathbb{D})$ vollständig und $H(G)$ separabel (die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sind dicht in $H(G)$ nach B. 15.3, da G einfach zusammenhängend ist).
Wie im Beweis zu S. 15.4 reicht es, zu zeigen: Sind $g \in H(\mathbb{D})$, $K \Subset \mathbb{D}$ (ohne Einschränkung $K = U_r[0]$ für ein $r < 1$) und $h \in H(G)$, $L \Subset G$ (ohne Einschränkung $L = K_m(G)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und damit L^c zusammenhängend) sowie $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$s_n\big(V_{\varepsilon,K}(g)\big) \cap V_{\varepsilon,L}(h) \neq \emptyset,$$

Da $(K \cup L)^c$ zusammenhängend ist, existiert nach B. 14.7 ein Polynom P mit

$$\|g - P\|_{\infty,K} < \varepsilon \text{ und } \|h - P\|_{\infty,L} < \varepsilon$$

(beachte $K \cap L = \emptyset$). Ist $n > \deg P$, so ist $s_n P = P$. Damit ist $P \in V_{\varepsilon,K}(g)$ und $s_n P = P \in V_{\varepsilon,L}(h)$. □

16 Der Satz von Mergelian

Wir untersuchen nun wieder Approximation auf kompakten Mengen K in $\mathbb{C}$. Ist

$$f \in R(K) := R_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(K),$$

so ist natürlich $f \in C(K)$, und außerdem ist $f_{|K^0} \in H(K^0)$.
(Ist R_n eine Folge rationaler Funktionen mit Polen in $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ und so, dass $R_n \to f$ gleichmäßig auf K, so folgt aus $R_{n|K^0} \in H(K^0)$ auch $f_{|K^0} \in H(K^0)$ nach S. 2.15.)
Wir setzen

$$A(K) := \left\{ f \in (K) : f_{|K^0} \in H(K^0) \right\} \; (= C(K), \text{falls } K^0 = \emptyset).$$

Damit ist also

$$R(K) \subset A(K)$$

und insbesondere

$$P(K) \subset A(K).$$

Weiter zeigt schon B. 14.1, dass $P(K) \neq A(K) (= C(K))$ für $K = K_1(0)$ gilt. Wir zeigen im folgenden Beispiel, dass auch Kompakta K existieren mit $K^0 = \emptyset$ und so, dass

$$R(K) \neq C(K) \; (= A(K)).$$

Beispiel 16.1 (Schweizer Käse, A. Roth) Wir betrachten eine Folge von Kreisen $U_j = U_j(a_j)$ so, dass $B_j := U_j[a_j] \subset \mathbb{D}$ für $j \in \mathbb{N}$, $a_1 = 0$ und

1. $B_j \cap B_k = \emptyset \; (j \neq k)$,
2. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j < 1$,
3. $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} U_j$ dicht in $\overline{\mathbb{D}}$.

(Eine solche Folge existiert: Es sei $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$. Wir setzen $a_1 := 0, r_1 := 1/3$ und definieren $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}, (r_j)_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv. Sind $a_1, \ldots, a_j \in \mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ und $r_1, \ldots, r_j$ mit $r_j \in (0, 1/3^j)$, so setzen wir

$$n_{j+1} := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : q_n \notin \bigcup_{\ell=1}^{j} U_{r_\ell}[a_\ell] \right\}$$

und $a_{j+1} = q_{n_{j+1}}$ sowie $r_{j+1} \in \left(0, 1/3^{j+1}\right)$ so, dass $U_{r_{j+1}}[a_{j+1}] \subset \mathbb{D}$ und

$$U_{r_{j+1}}[a_{j+1}] \cap \bigcup_{\ell=1}^{j} U_{r_\ell}[a_\ell] = \emptyset.$$

Dann haben die U_j obige Einegenschaften.)
Wir definieren damit

$$K := \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j.$$

Dann gilt $K^0 = \emptyset$ (nach 3.) und

$$\boxed{R(K) \neq C(K).}$$

(Denn:
1. Zunächst zeigen wir: Ist $g \in R(K)$, so ist mit $K_j := \partial U_j = K_{r_j}(a_j)$

$$\int_{K_1(0)} g = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} g \,. \tag{$*$}$$

Wieder, denn: Ist R rational mit Polen nur mit $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, so ist $P(R) \cap U_n = \emptyset$ für n genügend groß (wobei $P(R)$ die Menge der Polstellen von R bezeichnet). Also folgt mit dem Residuensatz für n genügend groß

$$\int_{K_1(0)} R = 2\pi i \sum_{w\in P(R)\cap\mathbb{D}} \operatorname{Res}(R, w) = \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} R.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine rationale Funktion R mit Polen nur in $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ und $\|g - R\|_{\infty,K} < \varepsilon$. Es folgt für n genügend groß

$$\begin{aligned}\Big| \int_{K_1(0)} g - \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} g \Big| &= \Big| \int_{K_1(0)} (g - R) - \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} (g - R) \Big| \\ &\leq \|g - R\|_{\infty,K} \cdot \Big(2\pi + 2\pi \sum_{j=1}^{n} r_j\Big) < 2\pi\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} r_j\Big) \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt ($*$).

2. Wir betrachten nun $f : K \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \frac{|z|}{z} \qquad (z \in K).$$

Dann ist $f \in C(K)$ (beachte $0 \notin K$). Angenommen, $f \in R(K)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}2\pi &= \Big| \int_{K_1(0)} \frac{d\zeta}{\zeta} \Big| = \Big| \int_{K_1(0)} f(\zeta) d\zeta \Big| = \Big| \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} f \Big| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \int_{K_j} f \Big| \leq \underbrace{\|f\|_{\infty,K}}_{=1} \cdot 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} r_j < 2\pi.\end{aligned}$$

Widerspruch!)

Bemerkung 16.2 Es gibt auch Kompakta $K \subset \mathbb{C}$ mit $K^0 \neq \emptyset$ und so, dass $R(K) \neq A(K)$ (Schweizer Käse mit inneren Punkten). Die Frage, für welche Kompakta $R(K) = A(K)$ (bzw. $R(K) = C(K)$ für $K^0 = \emptyset$) gilt, ist äußerst schwierig zu beantworten. Eine Charakterisierung liefert der Satz von Vituschkin.

Unser Ziel ist es, genau zu klären, was $P(K)$ ist.

Bemerkung und Definition 16.3 Es sei $K \Subset \mathbb{C}$. Ist U die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so heißt

$$\widehat{K} := \mathbb{C} \setminus U \;\; (= K, \text{falls } \mathbb{C} \setminus K \text{ zusammenhängend})$$

die *polynomial-konvexe Hülle* von K (also: $\widehat{K}$ ist die Vereinigung von K und allen beschränkten Komponenten von $\mathbb{C} \setminus K$). Nach dem Maximumprinzip gilt für die Polynome P

$$\|P\|_{\infty,K} = \|P\|_{\infty,\widehat{K}}.$$

(Denn: Ist G eine beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so ist $\overline{G} \Subset \mathbb{C}$, also ist $\|P\|_{\infty,\overline{G}} = \|P\|_{\infty,\partial G} \leq \|P\|_{\infty,K}$.)
Gilt also $f \in P(K)$, so existiert eine Folge (P_n) von Polynomen mit

$$P_n \to f \text{ gleichmäßig auf } K.$$

Dann ist (P_n) auch eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $\widehat{K}$, also existiert ein $F \subset A(\widehat{K})$ mit

$$P_n \to F \text{ gleichmäßig auf } \widehat{K}.$$

Dabei ist natürlich $F_{|K} = f$ und F ist eindeutig bestimmt durch f nach dem Maximumprinzip. Mit

$$A(\widehat{K})_K := \{f \in C(K) : \exists\, F \in A(\widehat{K}) : F_{|K} = f\}$$

ergibt sich $P(K) \subset A(\widehat{K})_K$. Tatsächlich gilt sogar Gleichheit:

Satz 16.4 *(Mergelian) Es sei $K \Subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$P(K) = A(\widehat{K})_K$$

und speziell für $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend (d. h. $K = \widehat{K}$)

$$P(K) = A(K).$$

Aus B./D. 16.3 folgt, dass es reicht, den Beweis für $K = \widehat{K}$ zu führen. Dies wird nicht ganz einfach sein. Wir benötigen vorweg eine Reihe für sich genommen interessanter Ergebnisse aus der Analysis.
Dazu setzen wir für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C(\Omega) = \big(C(\Omega), \mathbb{C}\big)$

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

sowie

$$C_c(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega\},$$
$$C_c^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega\} \qquad \big(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\big).$$

Bemerkung 16.5 Es sei $(\emptyset \neq) K \Subset \mathbb{R}^d$.

1. Ist $U \supset K$ offen (und ohne Einschränkung beschränkt), so existiert ein $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$ und $\varphi_{|K} \equiv 1$.
(Denn: Mit $\delta := \operatorname{dist}(K, \partial U)$ ist $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ mt
$$\varphi(x) := \max\Big(0, 1 - \frac{1}{\delta}\operatorname{dist}(x, K)\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$
geeignet.)

2. Unter Verwendung von 1. zeigen wir:

   a) (Zerlegung der Eins bezüglich einer offenen Überdeckung)
   Sind $U_1, \ldots, U_m$ offen mit $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_j$, so existieren Funktionen $\beta_1, \ldots, \beta_m \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leq \beta_j \leq 1$, $\operatorname{supp}(\beta_j) \subset U_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ und
   $$\sum_{j=1}^m \beta_{j|K} \equiv 1.$$

   b) (Erweiterungssatz von Tietze)
   Ist $f \in C(K)$, so existiert ein $F \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $F_{|K} = f$.

(Zu a): Ohne Einschränkung seien $U_1, \ldots, U_m$ beschränkt. Für $x \in K$ sei $\delta_x > 0$ so, dass $U_{\delta_x}[x] \subset U_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann ist $\big(U_{\delta_x}(x)\big)$ eine offene Überdeckung von K, also existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{n=1}^N U_{\delta_{x_n}}(x_n).$$

Für $j \in \{1, \ldots, m\}$ seien

$$I_j := \big\{n \in \{1, \ldots, N\} : U_{\delta_{x_n}}[x_n] \subset U_j\big\} \ (\neq \emptyset)$$

und

$$L_j := \bigcup_{n \in I_j} U_{\delta_{x_n}}[x_n].$$

Dann ist $L_j \Subset U_j$, d. h., es existiert ein $\varphi_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi_{j|L_j} \equiv 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset U_j$ und $0 \leq \varphi_j \leq 1$. Wir setzen (mit $\prod_{\emptyset} := 1$)

$$\beta_j := \varphi_j \prod_{\ell=1}^{j-1} (1 - \varphi_\ell) \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Dann gilt $\beta_{j|U_j} \equiv 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ und $0 \leq \beta_j \leq 1$ sowie

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_{j|K} = 1 - \prod_{j=1}^{m}(1 - \varphi_j)$$

(wie man induktiv sieht). Da für jedes $x \in K$ ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ existiert mit $x \in L_j$, ist die rechte Seite $\equiv 1$ auf K.

Zu b): Ohne Einschränkung kann man $f(K) \subset [-1, 1]$ annehmen.
Es sei U offen und beschränkt mit $K \subset U$. Wir setzen

$$K^+ := \big\{x \in K : f(x) \geq 1/3\big\}, \quad K^- := \big\{x \in K : f(x) \leq -1/3\big\}.$$

Dann ist $K^{\pm} \Subset K$ und $\operatorname{dist}(K^+, K^-) > 0$. Damit existiert (mit a)) eine Funktion $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(f_1) \subset U$, $\|f_1\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \leq 1/3$ und

$$f_{1|K^+} \equiv 1/3, \qquad f_{1|K^-} \equiv -1/3$$

(also $\|f - f_1\|_{\infty,K} \leq 2/3$).
Mit entsprechender Argumentation (mit $f - f_1$ statt f) existiert ein $f_2 \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(f_2) \subset U$, $\|f_2\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ und

$$\|f - f_1 - f_2\|_{\infty,K} \leq (2/3)^2.$$

Induktiv erhält man eine Folge (f_n) in $C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(f_n) \subset U$ sowie

$$\|f - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\|_{\infty,K} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}.$$

Damit konvergiert $F := \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$ (also $F \in C(\mathbb{R}^d)$) mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = f \text{ auf } K.$$

Aus $\operatorname{supp}(f_n) \subset U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\operatorname{supp}(F) \subset \overline{U} \Subset \mathbb{R}^d$.)

Es sei λ_2 das 2-dimensionale Lebesgue-Maß. Sind $f \in C_c(\mathbb{C})$ und g λ_2-messbar und lokal integrierbar (d. h.

$$\int_K |g| d\lambda_2 < \infty$$

für alle $\mathbb{K} \Subset \mathbb{C}$), so existiert das Faltungsprodukt

$$(f * g)(z) := \int f(w)g(z - w)d\lambda_2(w)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und es ist $f * g \in C(\mathbb{C})$ mit $f * g = g * f$, also

$$\int f(w)g(z - w)d\lambda_2(w) = \int f(z - u)g(u)d\lambda_2(u)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Weiter ist $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ (beachte: ist $z \in \operatorname{supp}(f * g)$, so ist $z - w \in \operatorname{supp}(g)$ für ein $w \in \operatorname{supp}(f)$) und im Falle $f \in C_c^1(U)$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ gilt $f * g \in C_c^1(V)$ für alle V offen mit $V - \operatorname{supp}(g) \subset U$ und

$$\overline{\partial}(f * g)(z) = \big((\overline{\partial} f) * g\big)(z) \qquad (z \in V).$$

(Stichwort: Differenzierbarkeit von Parameterintegralen)
Aus

$$\int\limits_{U_R[0]} \frac{d\lambda_2(w)}{|w|} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{R} \frac{r dr d\varphi}{r} = 2\pi R \qquad (R > 0)$$

folgt, dass

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}_\infty$$

lokal integrierbar auf $\mathbb{C}$ ist. Damit existiert für $f \in C_c^1(\mathbb{C})$ das Faltungsprodukt $(\overline{\partial} f) * \frac{1}{\pi \bullet}$. Wir beweisen dafür:

Satz 16.6 *(Pompeiu-Formel) Es sei $f \in C_c^1(\mathbb{C})$. Dann ist*

$$f = (\overline{\partial} f) * \frac{1}{\pi \bullet}.$$

Beweis. Es sei $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Wir setzen für $\varphi \in [-\pi, \pi], r \geq 0$

$$F(r, \varphi) := f(z + re^{i\varphi}) = f(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)$$

Dann gilt mit $\zeta = z + re^{i\varphi}$ für $r > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta)\, \cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta) \sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta)(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\, r\cos\varphi\,,$$

also

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} - i\,\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r, \varphi) &= -i\,\frac{\partial f}{\partial x}(\zeta)\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ &= e^{-i\varphi}\Big(\frac{\partial f}{\partial y} - i\,\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(\zeta).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit der Substitutionsregel und dem Satz von Fubini

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}-i\,\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(\zeta)\,\frac{d\lambda_2(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{i\varphi}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}-i\,\frac{\partial F}{\partial r}\Big)(r,\varphi)\,r\,\frac{d\lambda_2(r,\varphi)}{re^{i\varphi}}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}-i\,\frac{\partial F}{\partial r}\Big)(r,\varphi)d\varphi dr$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi)d\varphi dr=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\int\limits_0^\infty\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi)dr}_{=F(r,\varphi)|_{r=0}^{\infty}=-F(0,\varphi)}\quad d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{F(0,\varphi)}_{=f(z)}d\varphi=f(z).$$

Schließlich ist noch

$$\frac{1}{2\pi i}\int\Big(\frac{\partial f}{\partial y}-i\,\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(\zeta)\frac{d\lambda_2(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{1}{\pi}\int(\overline{\partial}f)(\zeta)\frac{d\lambda_2(\zeta)}{z-\zeta}\ .$$

□

Bemerkung 16.7 1. Ist $K\Subset\mathbb{C}$ mit K und K^c zusammenhängend, $|K|\geq 2$, so existiert nach B. 10.6.3 eine konforme Abbildung

$$\psi:\mathbb{D}^*\to\mathbb{C}\setminus K.$$

Dabei gilt nach der Konstruktion in B. 10.6.3

$$\psi(z)=cz+\mathcal{O}(1)\qquad(z\to\infty),$$

wobei c so wählbar ist, dass $c>0$ (Drehung „vorschalten"). Mit dieser Normierung ist ψ dann eindeutig bestimmt (vgl. B. 10.5). Die Zahl c heißt *(logarithmische) Kapazität* von K (kurz: $\operatorname{cap}(K)$). Als Folgerung aus dem Koebeschen 1/4-Satz ergibt sich

$$\boxed{\operatorname{diam}(K)\leq 4\cdot\operatorname{cap}(K).}$$

(Denn: Zunächst sei $0\in K$ und $\psi:\mathbb{D}^*\to\mathbb{C}\setminus K$ wie oben. Dann ist $\widetilde{\psi}:=\frac{1}{c}\,\psi:\mathbb{D}^*\to\mathbb{C}\setminus\frac{1}{c}\,K$ mit

$$\widetilde{\psi}(z)=z+\mathcal{O}(1)\qquad(z\to\infty).$$

Weiter ist durch

$$g(w):=\frac{1}{\widetilde{\psi}(1/w)}\qquad(w\in\mathbb{D})$$

eine Funktion $g \in \mathcal{S}$ definiert (aus $0 \in \frac{1}{c}K$ folgt $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C}$). Dabei ist

$$g(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \frac{c}{K}.$$

Nach dem Koebeschen 1/4-Satz ist

$$g(\mathbb{D}) \supset U_{1/4}(0)$$

und damit $\frac{c}{K} \subset \{|w| \geq \frac{1}{4}\}$, d. h. $K \subset U_{4c}[0]$.
Ist $a \in K$ beliebig, so ergibt sich mit gleicher Argumentation mit $K - a$ anstelle von K auch

$$K - a \subset U_{4c}[0],$$

also $K \subset U_{4c}[a]$. Da $a \in K$ beliebig war, ist $\operatorname{diam}(K) \leq 4c$.)
Die Konstante 4 ist bestmöglich, wie die Joukowski-Abbildung zeigt ($\operatorname{cap}\big([-1,1]\big) = 1/2$).
2. (Approximative Eins) Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen ist die Funktion $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(z) := \begin{cases} \exp\big(-\frac{1}{1-|z|^2}\big), & |z| < 1 \\ 0, & |z| \geq 1 \end{cases}.$$

Man kann zeigen ($\to$ Analysis), dass $\alpha \in C_c^1(\mathbb{C})$ (genauer sogar $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{C})$) gilt. Wir definieren $\varphi \in C_c^1(\mathbb{C})$ durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{\int \alpha d\lambda_2} \alpha(z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

und $\varphi_\delta \in C_c^1(\mathbb{C})$ für $\delta > 0$ durch

$$\varphi_\delta(z) := \frac{1}{\delta^2}\, \varphi\Big(\frac{z}{\delta}\Big) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Dann gilt $\operatorname{supp}(\varphi) = U_\delta[0]$ und

(i) $\displaystyle\int \varphi_\delta d\lambda_2 = 1,$

(ii) $\displaystyle\int \overline{\partial}\varphi_\delta d\lambda_2 = 0$ (genauer: $\displaystyle\int \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x} d\lambda_2 = \int \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial y}\, d\lambda_2 = 0$),

(iii) $\displaystyle\int |\overline{\partial}\varphi_\delta| d\lambda_1 \leq \|\overline{\partial}\varphi\|_{\infty,\mathbb{C}} \cdot \frac{\pi}{\delta}.$

(Denn:
Zu (i): Es gilt (mit $T(z) = T(x,y) = \delta(x,y)$ und $\det JT \equiv \delta^2$)

$$\int \varphi_\delta d\lambda_2 = \frac{1}{\delta^2} \int \varphi(z/\delta)\, d\lambda_2(z) = \frac{1}{\delta^2} \int \varphi(u)\, \delta^2 d\lambda_2(u) = \int \varphi d\lambda_2 = 1.$$

Zu (ii): Mit dem Satz von Fubini und dem HDI gilt

$$\int \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x}(z), d\lambda_2(z) = \iint \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x}\,(x,y)\, dxdy = \int \underbrace{\big(\varphi_\delta(x,y)\big|_{x=-\infty}^{\infty}\big)}_{=0}\, dy = 0.$$

Entsprechendes gilt für $\int \dfrac{\partial \varphi_\delta}{\partial y}\, d\lambda_2$.
Zu (iii): Aus $\overline{\partial}\varphi_\delta(z) = \frac{1}{\delta^3}\,(\overline{\partial}\varphi)(z/\zeta)$ folgt

$$\int |\overline{\partial}\varphi_\delta| d\lambda_2 = \frac{1}{\delta^3} \int\limits_{U_\delta[0]} |(\overline{\partial}\varphi)(z/\delta)|\, d\lambda_2(z) \leq \frac{1}{\delta^3} ||\overline{\partial}\varphi||_{\infty,\mathbb{C}} \delta^2 \pi\ .$$

Damit kommen wir zum **Beweis zu** S. 16.4:
Es sei $f \in A(K)$ gegeben. Zu zeigen ist $f \in P(K)$.

1. Wir können ohne Einschränkung $f \in C_c(\mathbb{C})$ annehmen (Tietze-Erweiterungssatz). Für $\delta > 0$ betrachten wir das Faltungsprodukt $f * \varphi_\delta$. Dann gilt $f*\varphi_\delta \in C^1(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{supp}(f*\varphi_\delta) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(\varphi_\delta) = U_\delta\big[\operatorname{supp}(f)\big]$ (wobei $U_\delta[M] := \{z : \operatorname{dist}(z, M) \leq \delta\}$). Ferner ist

$$\overline{\partial}(f * \varphi_\delta) = (\overline{\partial}\varphi_\delta) * f \text{ auf } \mathbb{C}$$

sowie

$$\overline{\partial}(f * \varphi_\delta) = (\overline{\partial} f) * \varphi_\delta \equiv 0 \text{ auf } V_\delta,$$

wobei $V_\delta := \{z \in K^0 : \operatorname{dist}(z, \partial K) > \delta\}$ (beachte: $V - \operatorname{supp}(\varphi_\delta) = V - U_\delta[0] \subset K^0$). Außerdem gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) - (f * \varphi_\delta)(z) \overset{(i)}{=} \int \big(f(z) - f(z-u)\big)\varphi_\delta(u) d\lambda_2(u)$$

und damit

$$\|f - f * \varphi_\delta\|_{\infty,\mathbb{C}} \leq w(\delta) \cdot \int \varphi_\delta d\lambda_2 \overset{(i)}{=} \omega(\delta).$$

(Hierbei ist $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\omega(t) := \omega_f(t) := \sup_{|z-\widetilde{z}|\leq t} \big|f(z) - f(\widetilde{z})\big| \qquad (t > 0)$$

der sog. Stetigkeitsmodul von f.)
Schließlich ergibt sich

$$(\overline{\partial}\varphi_\delta * f)(z) \overset{(ii)}{=} \int \overline{\partial}\varphi_\delta(u)\big(f(z-u) - f(z)\big) d\lambda_2(u)$$

und folglich

$$\big\|\overline{\partial}(f * \varphi_\delta)\big\|_{\infty,\mathbb{C}} = \big\|(\overline{\partial}\varphi_\delta) * f\big\|_{\infty,\mathbb{C}} \overset{(iii)}{\leq} \pi \|\overline{\partial}\varphi\|_{\infty,\mathbb{C}} \cdot \frac{w(\delta)}{\delta}.$$

2. Nach der Pompeiu-Formel ist

$$f * \varphi_\delta = \overline{\partial}(f * \varphi_\delta) * \frac{1}{\pi \bullet},$$

und aus 1. ergibt sich

$$B_\delta := \operatorname{supp}\big(\overline{\partial}(f * \varphi_\delta)\big) \subset U_\delta[\operatorname{supp} f] \setminus V_\delta.$$

Ist nun $\Omega_\delta \supset K$ offen und $r_\delta \in C(B_\delta \times \Omega_\delta)$ so, dass $r_\delta(\zeta, \cdot) \in H(\Omega_\delta)$ für alle $\zeta \in B_\delta$, so ergibt sich für $g_\delta : \Omega_\delta \to \mathbb{C}$ mit

$$g_\delta(z) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_\delta} \overline{\partial}(f * \varphi_\delta) r_\delta(\zeta, z) d\lambda_2(\zeta)$$

zum einen $g_\delta \in H(\Omega_\delta)$ (Potenreihenentwicklung!) und zum anderen für $z \in \Omega_\delta$

$$g_\delta(z) - (f * \varphi_\delta)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_\delta} \overline{\partial}(f * \varphi_\delta)(z) \Big(r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \Big) d\lambda_2(\zeta)$$

und damit

$$\|g_\delta - f * \varphi_\delta\|_{\infty,\mathbb{C}} \leq \|\overline{\partial}\varphi\|_{\infty,\mathbb{C}} \frac{w(\delta)}{\delta} \sup_{z \in K} \int\limits_{B_\delta} \Big| r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \Big| d\lambda_2(\zeta).$$

Existiert also ein $M > 0$ so, dass

$$\boxed{\sup_{z \in K} \int\limits_{B_\delta} \Big| r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \Big| d\lambda_2(\zeta) \leq M \cdot \delta}$$

für $\delta > 0$ genügend klein, so folgt

$$\begin{aligned} \|f - g_\delta\|_{\infty,K} &\leq \|f - f * \varphi_\delta\|_{\infty,K} + \|f * \varphi_\delta - g_\delta\|_{\infty,K} \\ &\leq w(\delta)(1 + \|\overline{\partial}\varphi\|_{\infty,\mathbb{C}} \cdot M) \to 0 \qquad (\delta \to 0). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Runge ist $g_\delta \in P(K)$ (da $g_\delta \in H(K)$ und K^c zusammenhängend) für alle $\delta > 0$. Damit ist dann auch $f \in P(K)$, und die Behauptung ist bewiesen. Es bleibt also, noch die Existenz geeigneter Approximanden r_δ des Cauchy-Kerns zu beweisen.

3. (Lemma von Mergelian)
Wir zeigen zunächst folgende „lokale" Aussage: Es sei $E \Subset \mathbb{D}$ mit E, E^c zusammenhängend und $\operatorname{cap}(E) > 0$. Ist $d := 1/\operatorname{cap}(E)$, so existiert eine Funktion $r \in C\big(\mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus E)\big)$ so, dass $r(\zeta, \cdot) \in H(\mathbb{C} \setminus E)$ für alle $\zeta \in \mathbb{D}$ und

$$\|r\|_{\infty, \mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus E)} \leq d + d^2 + d^3$$

sowie

$$\big| (z - \zeta)^3 r(\zeta, z) - (z - \zeta)^2 \big| \leq 8(d + d^2 + d^3) + 4$$

für alle $\zeta \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{C} \setminus E$.
Ist dabei $\operatorname{diam}(E) \geq 1$, so ist $d \leq 4$ nach B/D 16.7.1 und damit

$$d + d^2 + d^3 \leq 84.$$

(Denn: Es sei ψ wie in B/D 16.7.1 und $\varphi = \psi^{-1} : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{D}^*$. Dann ist

$$\varphi(z) = dz + \mathcal{O}(1) \qquad (z \to \infty).$$

Ist g definiert durch

$$g(z) := \frac{d}{\varphi(z)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus E),$$

so ist $g \in H(\mathbb{C} \setminus E)$ mit $\|g\|_{\infty,\mathbb{C}\setminus E} = d$ und

$$g(z) \sim \frac{1}{z} \qquad (z \to \infty).$$

Es sei $\zeta \in \mathbb{D}$. Dann gilt für $|z - \zeta| > 2$ (Laurent-Entwicklung)

$$g(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \frac{a(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \mathcal{O}_\zeta\Big(\frac{1}{|z-\zeta|^3}\Big) \qquad (z \to \infty)$$

(dabei deutet $\mathcal{O}_\zeta$ an, dass die entsprechenden Konstanten von ζ abhängig sind). Weiter ist

$$\begin{aligned} a(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_2(\zeta)} (z-\zeta) g(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} (z-\zeta) g(z) dz \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} z g(z) dz}_{=:b} - \zeta \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} g(z) dz}_{=1 \text{ (da } g(z) \sim 1/z)}, \end{aligned}$$

also

$$\big|a(\zeta)\big| \le \|g\|_{\infty,\mathbb{C}\setminus E} + |\zeta| = d + |\zeta| \le d + 1.$$

Wir definieren $r : \mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus E) \to \mathbb{C}$ durch

$$r(\zeta, z) := g(z) - a_2(\zeta) g^2(z) \qquad (\zeta \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{C} \setminus E).$$

Dann gilt $r \in C\big(\mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus E)\big)$, $r(\zeta, \cdot) \in H(\mathbb{C} \setminus E)$ und

$$\big|r(\zeta, z)\big| \le \|g\|_{\mathbb{C}\setminus E} + \big|a(\zeta)\big| \, \|g\|^2_{\mathbb{C}\setminus E} \le d + (1+d)d^2$$

und damit für $\zeta \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{D} \setminus E$

$$\big|(z-\zeta)^3 r(\zeta, z) - (z-\zeta)^2\big| \le 8(d + d^2 + d^3) + 4. \tag{$*$}$$

Da für $\zeta \in \mathbb{D}$ fest

$$g^2(z) = \frac{1}{(z-\zeta)^2} + \mathcal{O}_\zeta\Big(\frac{1}{|z-\zeta|^3}\Big)$$

für $z \to \infty$ gilt, folgt

$$r(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} = a(\zeta)\Big(\frac{1}{(z-\zeta)^2} - g^2(z)\Big) + \mathcal{O}_\zeta\Big(\frac{1}{|z-\zeta|^3}\Big) = \mathcal{O}_\zeta\Big(\frac{1}{|z-\zeta|^3}\Big)$$

und damit

$$\big|(z-\zeta)^3 r(\zeta, z) - (z-\zeta)^2\big| = \mathcal{O}_\zeta(1) \qquad (z \to \infty).$$

Nach dem Maximumprinzip (angewandt auf $\mathbb{C}_\infty \setminus U_\rho[E]$ für $\rho > 0$ so klein, dass $U_\rho[E] \subset \mathbb{D}$; vgl. [Ü]) ergibt sich ($*$) auch für $z \in \mathbb{C} \setminus E$.

Ist nun allgemein $U = U_{2\delta}(a)$ für ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$, so gilt für jedes Kompaktum $F \subset U$ mit F, F^c zusammenhängend und diam $(F) \geq 2\delta$ mit $E := \frac{1}{2\delta}(F - a)$

$$E \subset \mathbb{D}, E, E^c \text{ zusammenhängend, diam } (E) \geq 1.$$

Ist r wie oben, so gilt für $\zeta \in U, z \in \mathbb{C} \setminus E$

$$\Big|(z-\zeta)^3 \underbrace{\frac{1}{2\delta} r\Big(\frac{\zeta - a}{2\delta}, \frac{z-a}{2\delta}\Big)}_{=:r_{\delta,a,F}(\zeta,z)} - (z-\zeta)^2\Big| =$$

$$= 4\delta^2 \Big|\Big(\frac{z-a}{2\delta} - \frac{\zeta-a}{2\delta}\Big)^3 r\Big(\frac{\zeta-a}{2\delta}, \frac{z-a}{2\delta}\Big) - \Big(\frac{z-a}{2\delta} - \frac{\zeta-a}{2\delta}\Big)^2\Big|$$

$$\leq 4(4 + 8 \cdot 84)\delta^2 + 2704\delta^2 \, .$$

und

$$\|r_{\delta,a,F}\|_\infty \leq \frac{42}{\delta}.$$

4. Es sei $\delta > 0$ gegeben. Dann existieren $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C} \setminus K$ so, dass

$$B_\delta \subset \bigcup_{j=1}^m U_j, \qquad U_j := U_{2\delta}(a_j) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

(wichtig dabei: ist $z \in K$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial K) > \delta$, so gilt $z \notin B_\delta$).
Weiter existieren Jordanwege γ_j in $U_j \setminus K$ so, dass $\operatorname{diam}(F_j) \geq 2\delta$ für die Spuren $F_j := \gamma_j^*$ gilt (a_j ist durch einen Jordanweg in $U_j \setminus K$ mit einem Randpunkt von U_j ,,verbindbar", da K^c zusammenhänged ist).
Es sei $(\beta_j, \ldots, \beta_m)$ eine Zerlegung der Eins auf B_δ bezüglich $(U_1, \ldots, U_m)$ und es sei $\Omega_\delta := \big(\bigcup_{j=1}^m F_j\big)^c$ sowie (mit $r_{\delta,a_j,F_j}(\zeta, z) := 0$, falls $\zeta \notin U_j$)

$$r_\delta(\zeta, z) = \sum_{j=1}^m \beta_j(\zeta) r_{\delta,a_j,F_j}(\zeta, z) \qquad (\zeta \in B_\delta, z \in \Omega_\delta).$$

Dann ist $r_\delta \in C(B_\delta \times \Omega_\delta)$ (da $\operatorname{supp}(\beta_j) \Subset U_j$) und $r_\delta(\zeta, \cdot) \in H(\Omega_\delta)$ für $\zeta \in B_\delta$. Schließlich gilt für $z \in K$

$$\int_{B_\delta} \Big| r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \Big| d\lambda_2(\zeta) = \int_{B_\delta} \Big| \sum_{j=1}^m \beta_j(\zeta) \Big(r_{\delta,a_j,F_j}(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \Big) \Big| d\lambda_2(\zeta)$$
$$= \int_{B_\delta \cap U_\delta(z)} \ldots + \int_{B_\delta \cap \big((U_\delta(z)\big)^c} \ldots =: I_1 + I_2,$$

wobei

$$I_1 \leq \int\limits_{B_\delta \cap U_\delta(z)} \sum_{\substack{j=1 \\ (\zeta \in U_j)}}^{m} \beta_j(\zeta)\Big(\frac{1}{|z-\zeta|} + \underbrace{|r_{\delta,a_j,F_j}(\zeta,z)|}_{\leq 42/\delta}\Big) d\lambda_2(\zeta)$$

$$\leq \frac{42}{\delta} \underbrace{\lambda_2\big(U_\delta(z)\big)}_{=\pi\delta^2} + \underbrace{\int\limits_{U_\delta(z)} \frac{d\lambda_2(\zeta)}{|\zeta - z|}}_{=\int\limits_{U_\delta(0)} \frac{d\lambda_2(w)}{|w|} = 2\pi\delta}$$

und

$$I_2 \leq \int\limits_{B_\delta \cap \big(U_\delta(z)\big)^c} \sum_{\substack{j=1 \\ (\zeta \in U_j)}}^{m} \beta_j(\zeta) \frac{2704\delta^2}{|\zeta - z|^3} d\lambda_2(\zeta)$$

$$\leq 2704 \cdot \delta^2 \cdot \int\limits_{\big(U_\delta(0)\big)^c} \frac{d\lambda_2(w)}{|w|^3} = 2704 \cdot \delta^2 \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{1}{r^3}\, r dr d\varphi}_{=2\pi\big(-1/r\big)\big|_\delta^\infty = 2\pi/\delta}$$

$$\leq 5408\pi \cdot \delta.$$

Also ergibt sich

$$\sup_{z \in K} \int\limits_{B_\delta} \Big| r_\delta(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \Big| d\lambda_2(\zeta) \leq 5452\pi \cdot \delta.$$

□

Bemerkung 16.8 1. Der Satz von Mergelian gibt eine abschließende Antwort auf die Frage, welche Funktionen auf kompakten Mengen in $\mathbb{C}$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar sind. Wie oben bemerkt ist die entsprechende Frage für rationale Approximation wesentlich schwieriger zu beantworten. Der Beweis zum Satz von Mergelian zeigt, dass $R(K) = A(K)$ jedenfalls dann gilt, wenn

$$\inf\{\mathrm{diam}(G) : G \text{ Komponente von } \mathbb{C} \setminus K\} > 0$$

ist, also insbesondere dann, wenn $\mathbb{C} \setminus G$ nur endlich viele Komponenten hat.
2. Es gibt einen weiteren Beweis zum Satz von Mergelian, der funktionalanalytische Hilfsmittel verwendet und auf Carleson zurückgeht.

Bemerkung 16.9 Als kleine Anwendung des Satzes von Mergelian beweisen wir folgende Verschärfung der Aussage von S. 15.5: Es existiert eine dichte G_δ-Menge $M \subset H(\mathbb{D})$ so, dass für alle $f \in M$ gilt: Ist $K \Subset \mathbb{D}^c \setminus (-\infty, -1]$ mit zusammenhängendem Komplement, so sind die Taylor-Teilsummen $s_n f$ dicht in $A(K)$, d. h., zu jedem $h \in A(K)$ existiert eine Folge (n_j) in $\mathbb{N}$ mit

$$s_{n_j} f \to h \text{ gleichmäßig auf } K.$$

(Denn: Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$K_m := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq m\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < 1/n\}.$$

Ist $K \Subset \mathbb{D}^c \setminus (-\infty, -1]$, so ist $K \subset K_m$ für m genügend groß.

1. Wir zeigen zunächst: Für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert eine dichte G_δ-Menge $M_m \subset H(\mathbb{D})$ so, dass $\{s_n f : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $A(K_m)$ ist für alle $f \in M_m$.
   Denn: Die Abbildungen $s_n : H(\mathbb{D}) \to A(K_m)$ mit

   $$(s_n f)(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} \qquad (z \in K_m)$$

   sind stetig. Außerdem ist $H(\mathbb{D})$ vollständig und $(A(K_m), \|\cdot\|_{\infty, K_m})$ separabel (die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sind dicht in $A(K_m)$ nach dem Satz von Mergelian, da K_m^c zusammenhängend ist).

   Es reicht, zu zeigen (vgl. Beweis zu S. 15.4 und 15.5): Sind $g \in H(\mathbb{D}), r < 1, h \in A(K_m)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

   $$s_n\big(V_{\varepsilon, U_r[0]}(g)\big) \cap U_\varepsilon(h) \neq \emptyset.$$

   Da $(U_r[0] \cup K_m)^c$ zusammenhängend ist und φ mit

   $$\varphi(z) := \begin{cases} g(z), & z \in U_r[0] \\ h(z), & z \in K_m \end{cases}$$

   in $A(U_r[0] \cup K_m)$ liegt, existiert nach dem Satz von Mergelian ein Polynom P mit

   $$\|g - P\|_{\infty, U_r[0]} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|h - P\|_{\infty, K_m} < \varepsilon.$$

   Ist $n \geq \deg P$, so ist $s_n P = P$. Damit ist $P \in V_{\varepsilon, U_r[0]}(g)$ und $s_n P = P \in U_\varepsilon(h)$.

2. Da abzählbare Schnitte dichter G_δ-Mengen wieder dichte G_δ-Mengen sind (warum?), ist $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} M_m$ eine dichte G_δ-Menge in $H(\mathbb{D})$. Ist $f \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} M_m$ und sind $K \Subset \mathbb{D}^c \setminus (-\infty, -1]$ mit K^c zusammenhängend sowie $h \in A(K)$, so existiert nach dem Satz von Mergelian eine Folge (h_j) von Polynomen mit $h_j \to h$ gleichmäßig auf K. Ist m so, dass $K \Subset K_m$, so folgt aus der Dichtheit von $\{s_n f : n \in \mathbb{N}\}$ in $A(K_m)$ die Existenz eine Folge (n_j) in $\mathbb{N}$ mit

   $$\|s_{n_j} f - h_j\|_{\infty, K_m} \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

   Also gilt auch

   $$\|s_{n_j} f - h\|_{\infty, K} \leq \|s_{n_j} f - h_j\|_{\infty, K_m} + \|h_j - h\|_{\infty, K} \to 0$$

   für $j \to \infty$.)

Ein wesentlicher Unterschied zu S. 15.5 liegt darin, dass die kompakten Mengen K einen nichtleeren Schnitt mit $\partial\mathbb{D}$ haben können (tatsächlich ist jedes $K \Subset \partial\mathbb{D}$ mit $-1 \notin K$ zulässig). Damit hat man auch „Universalität" am Rande des Konvergenzkreises.

A Zusammenhängende Mengen

Definition A.1 Es sei (X,d) ein metrischer Raum.

1. X heißt *unzusammenhängend*, falls offene Mengen $U,V \subset X$ existieren mit
$$X = U \cup V,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset\,.$$
Anderenfalls heist X *zusammenhängend*.

2. $M \subset X$ heißt *unzusammenhängend*, falls $(M, d_{|M\times M})$ unzusammenhängend ist (d. h. falls offene Mengen $U,V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$, $U \cap V \cap M = \emptyset$). Anderenfalls heißt M *zusammenhängend*.

Beispiel A.2 Es sei $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.
1. Wir betrachten $M = [0,1] \cup [2,3]$. Dann gilt für die offenen Mengen $U = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), V = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$:
$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$
also ist M unzusammenhängend.
2. Ist $M = \mathbb{Q}$, so gilt für die offenen Mengen $U = (-\infty, \sqrt{2}), V = (\sqrt{2}, \infty)$:
$$\mathbb{Q} \subset U \cup V, \quad U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset, \quad V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap \mathbb{Q} = \emptyset\,,$$
also ist auch $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend.
3. Für alle $a < b$ ist $M = [a,b]$ zusammenhängend.
(Denn: Es seien U und V in $([a,b], d_{|\cdot|})$ offene Mengen mit
$$[a,b] = U \cup V, \quad U \neq \emptyset, \quad V \neq \emptyset\,.$$
Dann sind $U = [a,b] \setminus V$ und $V = [a,b] \setminus U$ auch abgeschlossen (in $[a,b]$, aber damit auch in $\mathbb{R}$). Also gilt
$$\xi := \sup U \in U, \quad \eta := \sup V \in V\,.$$
Da U,V offen in $([a,b], d_{|\cdot|})$ sind, muss $\xi = \eta = b$ gelten. Also ist $b \in U \cap V$.)

Bemerkung A.3 Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Aus obiger Definition ergibt sich leicht
1. Die einpunktigen Mengen sind zusammenhängend.
2. X ist zusammenhängend genau dann, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen sind, die offen und abgeschlossen sind.
3. Sind M_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap\limits_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\bigcup\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.
(Denn: Wir setzen $M := \bigcup M_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $M \subset U \cup V$, $M \cap U \neq \emptyset$ und $M \cap V \neq \emptyset$. Ist $x \in \bigcap M_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. O. E. sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $M_\alpha \cap V \neq \emptyset$. Aus $x \in M_\alpha \cap U$ folgt auch $M_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Da M_α zusammenhängend ist, folgt $M_\alpha \cap U \cap V \neq \emptyset$. Damit ist auch $M \cap U \cap V \neq \emptyset$.)

In $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ gilt

Satz A.4 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (ggfs. einpunktiges) Intervall ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < b < c$ und $a, c \in M, b \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, b), V := (b, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
„$\Leftarrow$" Es sei M ein Intervall. Ist $x_0 \in M$, so gilt

$$M = \bigcup_{x \in M} I[x, x_0]\,.$$

Also ist M nach B. A.2.3 und A.3.3 zusammenhängend.

□

Der folgende Satz zeigt, dass der Zusammenhang einer Menge sich unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz A.5 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist auch $f(M) \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir können uns beim Beweis auf den Fall $M = X$ und $Y = f(M)$ beschränken. Angenommen, Y ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen V_1, $V_2 \subset M$ mit

$$Y = V_1 \cup V_2 \quad V_1 \neq \emptyset,\ V_2 \neq \emptyset, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset\,.$$

Da $f : X \to Y$ stetig ist, sind

$$U_1 = f^{-1}(V_1) \qquad U_2 = f^{-1}(V_2)$$

offen (in (X, d)). Es gilt dafür

$$U_1 \neq \emptyset, \quad U_2 \neq \emptyset, \quad U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

und

$$U_1 \cup U_2 = f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(Y) = X\,,$$

also ist X unzusammenhängend. Widerspruch! □

Als Konsequenz aus S. A.4 und S. A.5 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz A.6 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Beweis. Nach S. A.5 ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, also ein Intervall nach S. A.4. $\square$

Bemerkung und Definition A.7 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$. Für $x \in M$ heißt

$$Z_M(x) := \bigcup\{A \subset M : x \in A, A \text{ zusammenhängend}\}$$

(Zusammenhangs-)Komponente von M (bezüglich x). Nach B. A.3.3 ist $Z_M(x)$ zusammenhängend. Zudem gilt ([Ü]) für $x, y \in M$ entweder $Z_M(x) = Z_M(y)$ oder $Z_M(x) \cap Z_M(y) = \emptyset$ (also ist $\{Z_M(x) : x \in M\}$ eine Zerlegung von M).

Definition A.8 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
1. Ist $\gamma : [a, b] \to X$ stetig, so heißt γ ein *Weg* (in X). Der Punkt $\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* des Weges und $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* des Weges. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt der Weg *geschlossen*. Ferner heißt γ ein *Jordanweg*, falls $\gamma_{[a,b)}$ injektiv ist. Schließlich nennt man $\gamma^* := \gamma([a, b])$ die *Spur* von γ.
2. Eine Menge $M \subset X$ heißt *wegzusammenhängend*, falls zu allen Punkten $x, y \in X$ ein Weg $\gamma : [a, b] \to M$ existiert mit Anfangspunjkt x und Endpunkt y.

Satz A.9 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $M \subset X$ wegzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $x_0 \in M$ fest. Dann existiert zu jedem $x \in M$ ein Weg $\gamma_x : [a, b] \to M$ mit $\gamma_x(a) = x_0$ und $\gamma_x(b) = x$. Damit ist $M = \bigcup_{x \in M} \gamma_x^*$. Nach S. A.5 und B. A.2.3 ist γ_x^* zusammenängend. Da $x_0 \in \bigcap_{x \in M} \gamma_x^*$ gilt, ist M nach B. A.3.3 zusammenhängend. $\square$

Bemerkung und Definition A.10 Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^d$ heißt *sternförmig* (bzgl. x_0), falls $I[x, x_0] \subset M$ für alle $x \in M$ gilt, d.h. falls $M = \bigcup_{x \in M} I[x, x_0]$ (hierbei ist $I[x, x_0] = \gamma^*$, wobei $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$ für $t \in [0, 1]$). Insbesondere sind konvexe Mengen sternförmig. Nach S. A.9 ist jede sternförmige Menge (weg-)zusammenhängend.

Bemerkung und Definition A.11 1. Eine Menge $G \subset \mathbb{K}^d$ heißt *Gebiet*, falls G offen, nichtleer und zusammenhängend ist.

2. Ist $\Omega \subset \mathbb{K}^d$ offen, ist $Z_\Omega(x)$ offen für alle $x \in \Omega$ ([Ü]). Also ist jede Komponente von Ω offen (und damit ein Gebiet). Außerdem hat Ω höchstens abzählbar viele Komponenten ([Ü]).
3. Ist G ein Gebiet, so ist G auch wegzusammenhängend.
(Denn: Es seien $x_0 \in G$ fest und A die Menge aller $x \in G$ so, dass ein Weg γ_x in G existiert mit Endpunkt x und Anfangspunkt x_0.
Ist $x \in A$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset G$. Ist $y \in U_\delta(x)$, so läßt sich γ_x durch Anhängen einer Strecke zu einem Weg in G mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt y fortsetzen. Also ist A offen in G. Die gleiche Überlegung liefert auch die (Folgen-)Abgeschlossenheit von A in G. Da $A \neq \emptyset$ ist (beachte: $x_0 \in A$), folgt $A = G$ nach B. A.3.2.)

B Der Satz von Arzela-Ascoli

Wir betrachten allgemeine metrische Räume und Mengen stetiger Funktionen zwischen diesen metrischen Räumen. Dazu seien $(X, d = d_X), (Y, d = d_Y)$ metrische Räume. Wir setzen

$$C(X,Y) := \{f : X \to Y : f \text{ stetig}\}$$

und für X kompakt

$$d_\infty(f,g) := \max_{x\in X} d\big(f(x), g(x)\big) \qquad (f,g \in C(X,Y)).$$

(Beachte: Aus

$$\big|d(u,v) - d(\tilde{u},\tilde{v})\big| \le d(u,\tilde{u}) + d(v,\tilde{v}) \qquad (u,v,\tilde{u},\tilde{v} \in Y)$$

folgt

$$\big|d(f(x),g(x)) - d\big(f(\tilde{x}),g(\tilde{x})\big)\big| \le d(f(x), f\big(\tilde{x})\big) + d\big(g(x),g(\tilde{x})\big)$$

für alle $x, \tilde{x} \in X$ und damit aus der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f und g auch die (gleichmäßige) Stetigkeit von $x \mapsto d\big(f(x), g(x)\big)$. Da X kompakt ist, existiert $d_\infty(f,g)$.)
Ist speziell $(Y,d) = (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$, so ist

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty \qquad \big(f,g \in C(X,\mathbb{K})\big).$$

Dabei sieht man wie in diesem Fall ($\to$ Analysis) ganz allgemein für X kompakt, Y vollständig:

- $(C(X,Y), d_\infty)$ ist vollständig.
- Ist X endlich und ist Y kompakt, so ist $(C(X,Y) = Y^X, d_\infty)$ kompakt. (Ist $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so entspricht Y^X dem Produkt $Y^n = Y \times \ldots \times Y$).

Im Allgemeinen ist jedoch im Falle Y kompakt der Raum $C(X,Y)$ nicht kompakt. Ist etwa $X = Y = [0,1]$ (mit $d_X = d_Y = d_{|\cdot|}$), so hat die Folge (f_n) in $C(X,Y)$ mit

$$f_n(x) = x^n \qquad \big(x \in [0,1]\big)$$

keine in $C(X,Y)$ konvergente Teilfolge, da jede solche gegen $f : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$$

konvergieren müsste.

Definition B.1 Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ heißt *gleichgradig stetig* an der Stelle $x_0 \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d(x,x_0) < \delta \text{ und alle } f \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$ heißt *gleichgradig stetig*, falls $\mathcal{F}$ an allen $x_0 \in X$ gleichgradig stetig ist. Weiterhin schreiben wir für $X_0 \subset X$ im Folgenden

$$\mathcal{F}_{X_0} := \{f_{|X_0} : f \in \mathcal{F}\} .$$

Die Familie $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n(x) = x^n$ $\big(x \in [0,1]\big)$ ist nicht gleichgradig stetig an $x_0 = 1$.

Satz B.2 *(Arzela-Ascoli)*
Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) kompakte metrische Räume. Ist $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ gleichgradig stetig, so ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst ein Hilfsresultat, das auch für sich genommen von Interesse ist.
Ist (M,d) ein metrischer Raum, so heißt eine Menge $A \subset M$ *präkompakt*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $E \subset M$ (wobei ohne Einschränkung $E \subset A$) so existiert, dass

$$A \subset \bigcup_{x\in E} U_\varepsilon(x).$$

Dann gilt:

$$A \text{ präkompakt } \Leftrightarrow \text{ jede Folge in } A \text{ hat eine Cauchy-Teilfolge.}$$

und damit im Fall eines vollständigen metrischen Raumes

$$A \text{ präkompakt } \Leftrightarrow A \text{ relativ kompakt.}$$

(Denn:
„$\Rightarrow$": Es sei (x_n) eine Folge in A. Da $A_0 = A$ präkompakt ist, existiert eine endliche Menge $E_1 \subset X$ mit

$$A_0 = \bigcup_{y\in E_1} (U_{1/2}(y) \cap A_0).$$

Da E_1 endlich ist, existiert ein $y_1 \in E_1$ so, dass ∞ viele der Folgeglieder von (x_n) in

$$A_1 := U_{1/2}(y_1) \cap A_0$$

liegen (d. h. $|\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A_1\}| = \infty$). Außerdem ist diam $(A_1) \leq 1$.
Da $A_1 \subset A_0$ präkompakt ist, existiert ein $E_2 \subset X$ endlich mit

$$A_1 = \bigcup_{y\in E_2} (U_{1/4}(y_1) \cap A_1).$$

Wieder existiert ein $y_2 \in E_2$ so, dass ∞ viele Folgeglieder von (x_n) in

$$A_2 = U_{1/4}(y_2) \cap A_1$$

liegen. Dabei ist diam $(A_2) \leq 1/2$.
Induktiv erhält man auf diese Weise eine Folge (A_j) von Mengen mit $A_j \subset A_{j-1}$ und diam $(A_j) \leq 1/j$ so, dass jedes A_j unendlich viele Folgeglieder von (x_n) enthält. Setzt man $n_0 := 1$ und wählt für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $n_j \geq n_{j-1}$ mit $x_{n_j} \in A_j$, so ist (x_{n_j}) eine Cauchy-Folge in X.
„$\Leftarrow$": ([Ü])

2. Nach 1. reicht es, zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist präkompakt.
Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $x \in X$ existiert ein $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ mit

$$f\big(U_{\delta_{x,\varepsilon}}(x)\big) \subset U_{\varepsilon/4}\big(f(x)\big) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Da X kompakt und $(U_{\delta_{x,\varepsilon}})_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert eine endliche Teilmenge E von X mit

$$X = \bigcup_{x\in E} U_{\delta_{x,\varepsilon}}(x).$$

Da Y kompakt ist, ist auch $\big(Y^E (= C(E,Y)), d_\infty)\big)$ kompakt. Also ist $\mathcal{F}_E$ präkompakt, d. h. für eine endliche Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ gilt

$$\mathcal{F}_E \subset \bigcup_{g\in\mathcal{E}} U_{\varepsilon/4}(g_{|E}) \; (\subset Y^E).$$

Es sei $f \in \mathcal{F}$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{E}$ mit $f_{|E} \in U_{\varepsilon/4}(g_{|E})$.
Ist $x \in X$ beliebig, so ist $x \in U_{\delta_{x_0,\varepsilon}}(x_0)$ für ein $x_0 \in E$. Für dieses x_0 gilt

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon/4 \quad \text{und} \quad d\big(g(x), g(x_0)\big) < \varepsilon/4,$$

also

$$d\big(f(x), g(x)\big) \leq d\big(f(x), f(x_0)\big) + d\big(f(x_0), g(x_0)\big) + \big(g(x_0), g(x)\big) < \frac{3}{4}\,\varepsilon.$$

Folglich ist

$$d_\infty(f,g) \leq 3\varepsilon/4 < \varepsilon$$

und damit

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{g\in\mathcal{E}} U_\varepsilon(g).$$

□

Bemerkung B.3 Aus Satz B.2 ergibt sich auch die folgende Variante des Satzes von Arzela-Ascoli für $\mathbb{K}$-wertige Funktionen: Ist (X,d) ein kompakter metrischer Raum und ist $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{K}^q)$ beschränkt in $(C(X,\mathbb{K}^q), \|\cdot\|_\infty)$ (wobei $q \in \mathbb{N}$) und gleichgradig stetig, so ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.
(Denn: Ist $\|f\|_\infty \leq R$ für alle $f \in \mathcal{F}$, so kann man $\mathcal{F}$ auch als Familie in $C(X, U_R[0])$, wobei (mit $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{K}^q$)

$$U_R[y] := \{z \in K^q : |z - y| \leq R\} \subset \mathbb{K}^q,$$

auffassen. Dabei ist $(U_R[0], d_{|\cdot|})$ kompakt. Also ergibt sich die Behauptung aus S. B.2.

Definition B.4 Es seien $(X, d = d_X)$ und $(Y, d = d_Y)$ vollständige metrische Räume. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ heißt *normal*, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von X konvergiert.

Man sieht leicht, dass etwa $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ normal in $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ ist.

Der Zusammenhang zum Satz von Arzela-Ascoli ergibt sich aus folgendem Resultat, das auch zeigt, dass Normalität eine „lokale Eigenschaft" ist.

Satz B.5 *Es seien $p \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{K}^p$ offen und (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für $\mathcal{F} \subset C(\Omega, Y)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $\mathcal{F}$ ist normal.

b) Für alle kompakten $K \subset \Omega$ ist $\mathcal{F}_K$ relativ kompakt.

c) Für alle $x \in \Omega$ existiert eine offene Umgebung U von x so, dass $\mathcal{F}_U$ normal ist.

Beweis. c) $\Rightarrow$ b): Es sei $K \subset \Omega$ kompakt. Für alle $x \in K$ existiert eine offene Umgebung U_x von x so, dass $\mathcal{F}_{U_x}$ normal ist. Es seien $\delta_x > 0$ so, dass $U_{\delta_x}[x_n] \subset U_x$ gilt. Dann ist $\left(U_{\delta_x}(x)\right)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Also existieren $x_1, \ldots, x_N \in K$ so, dass mit $L_m := U_{\delta_{x_m}}[x_m]$

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{N} L_m.$$

Es sei nun (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$.
Nach Voraussetzung (beachte $L_1 \subset U_{x_1}$ kompakt) existiert eine Teilfolge $(f_{n_j^{(1)}})$, die gleichmäßig auf L_1 konvergiert. Wieder nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge $(f_{n_j^{(2)}})$ von $(f_{n_j^{(1)}})$, die gleichmäßig auf L_2 (und damit auch auf K_2, wobei $K_m := L_1 \cup \ldots \cup L_m$) konvergiert. Induktiv ergibt sich für jedes $m \in \{1, \ldots, N\}$ eine Teilfolge $(f_{n_j^{(m)}})$ von $(f_{n_j^{(m-1)}})$, die gleichmäßig auf K_m konvergiert. Für $m = N$ ergibt sich gleichmäßige Konvergenz auf $K_N \supset K$.

b) $\Rightarrow$ a): Wir setzen

$$K_m := K_m(\Omega) := U_m[0] \cap \{x : \text{dist }(x, \Omega) \geq 1/m\}.$$

Dann gilt

- $K_m \subset \Omega$ kompakt $(m \in \mathbb{N})$.
- $K_m \uparrow \Omega$.
- Für alle $K \subset \Omega$ kompakt ist $K \subset K_m$ für m genügend groß.

Wir werden im Weiteren die Folge (K_m) als *Standardausschöpfung* von Ω bezeichnen.
Wie im 1. Beweisschritt sieht man: Ist (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$, so existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_{n_j^{(m)}})$ von $(f_{n_j^{(m-1)}})$, die gleichmäßig auf K_m konvergiert. Die Diagonalfolge $(f_{n_m^{(m)}})$ konvergiert dann gleichmäßig auf allen K_m und damit auch gleichmäßig auf allen $K \subset \Omega$ kompakt.

a) $\Rightarrow$ c): Klar. $\square$

Bemerkung B.6 Aus S. B.5 und dem Satz von Arzela-Ascoli (bzw. B. B.3) ergibt sich, dass jede der folgenden Bedingungen hinreichend ist für die Normalität einer Familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega, Y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{K}^p$ offen.

1. (Y, d) ist kompakt und $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.
2. $\mathcal{F} \subset C(\Omega, \mathbb{K}^q)$ ist beschränkt auf allen kompakten Teilmengen K von Ω (d. h. $\mathcal{F}_K$ ist beschränkt in $C(K, \mathbb{K}^q)$) und gleichgradig stetig.