

Jürgen Müller

Funktionentheorie

Skriptum zur Vorlesung Sommersemester 2024

Universität Trier

Fachbereich IV

Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische Funktionen und Cauchyintegrale	3
2 Meromorphe Funktionen	14
3 Wegintegrale und Cauchytheorem	25
4 Anwendungen des Cauchytheorems	34
5 Konforme Abbildungen und normale Familien	42
A Etwas Topologie	53
B Parameterintegrale	56
C Kompaktheit	58

1 Analytische Funktionen und Cauchyintegrale

Im ersten Abschnitt untersuchen wir (kurz) analytische Funktionen und definieren dann Cauchyintegrale als typisches Beispiele. Zunächst einige Bezeichnungen: Für $a \in \mathbb{K}$ und $0 \leq \rho \leq \infty$ schreiben wir

$$U_\rho(a) := \{x \in \mathbb{K} : |z - a| < \rho\}$$

und

$$B_\rho(a) := \{x \in \mathbb{K} : |x - a| \leq \rho\}, \quad K_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \rho\}$$

sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kurz $\mathbb{D} := U_1(0)$ und $\mathbb{S} := K_1(0)$. Ist X eine Menge $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, so schreiben wir

$$Z(f) := \{a \in X : f(a) = 0\}$$

für die Menge der Nullstellen von f .

Bemerkung und Definition 1.1 Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so heißt $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ **analytisch** an $a \in X$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (c_k) in \mathbb{C} so existieren, dass

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \quad (|h| < R)$$

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar auf $U_R(a) \cap X$ ¹ mit

$$c_k = f^{(k)}(a)/k! =: c_k(f, a) \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Wieder heißt f kurz **analytisch**, falls f analytisch an jedem Punkt $a \in X$ ist. Ist f analytisch an a , so nennt man (mit $\min \emptyset := \infty$)

$$\text{ord}(f, a) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : c_k(f, a) \neq 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die **Ordnung** von f an a . Ist a eine Nullstelle von f , so ist $\text{ord}(f, a) > 0$.

Bemerkung 1.2 Es sei f analytisch an der Stelle a . Ist $\text{ord}(f, a) = \infty$, so ist $c_k(f, a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also $f(a + h) = 0$ für $|h| < R$. Ist andererseits $n := \text{ord}(f, a) < \infty$, so ist

$$f(a + h) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f, a) h^k = h^n \varphi(h)$$

mit $\varphi(h) := \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+n}(f, a) h^m$ für $|h| < R$. Dabei ist $\varphi(0) = c_n(f, a) \neq 0$ und aus Stetigkeitsgründen daher $\varphi(h) \neq 0$ auf einer Umgebung U von 0. Also ist f nullstellenfrei auf einer Umgebung von a bis auf die (mögliche) Ausnahmestelle a . Damit sieht man:

Ist $a \in Z(f)$, so ist entweder f lokal konstant = 0 an a ² oder a ein isolierter Punkt von $Z(f)$.

¹siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 1.26

² f heißt lokal konstant an a , falls f auf einer Umgebung von a konstant ist.

Definition 1.3 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. (X, d) heißt **zusammenhängend**, falls gilt: Sind $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$, so ist $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Andernfalls heißt X **unzusammenhängend**.
2. $M \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls (M, d_M) zusammenhängend (oder $M = \emptyset$) ist.³

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn X und \emptyset die einzigen in (X, d) offenen und abgeschlossenen Mengen sind. Eine Menge $G \subset X$ heißt **Gebiet**, falls G nichtleer, offen und zusammenhängend ist.⁴

Satz 1.4 (Identitätssatz)

Es seien $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet und $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt: Hat $Z(f - g)$ einen Häufungspunkt in G , so ist schon $f = g$.⁵

Beweis. Es reicht, die Behauptung für $g = 0$ zu beweisen (ansonsten betrachte man $f - g$ statt f).

Da $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, ist $Z(f)$ abgeschlossen in G . Ist $A \subset G$ die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ in G , so ist $A \subset Z(f)$ und A abgeschlossen in G .⁶ Ist $A \neq \emptyset$ und $a \in A$, so ist a nach Bemerkung 1.2 ein innerer Punkt von A . Also ist A auch offen in G . Da G zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$. Damit ist auch $Z(f) = G$, also $f = 0$. \square

Bemerkung und Definition 1.5 Es sei

$$\varphi(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [-\pi, \pi]).$$

Dabei ist $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi) = -1$ sowie $\varphi|_{(-\pi, \pi]}$ injektiv mit $\varphi((-\pi, \pi]) = \mathbb{S} \setminus \{-1\}$. Wir schreiben $R(\mathbb{S})$ für die Menge der Funktionen $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $f \circ \varphi$ eine Regelfunktion auf $[-\pi, \pi]$ ist. Dann gilt $C(\mathbb{S}) \subset R(\mathbb{S})$.⁷ Für $f \in R(\mathbb{S})$ setzen wir

$$\int f \, dm := \int f(\zeta) \, dm(\zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \varphi)(t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \, dt.$$

Dann gilt

$$\int \zeta^k \, dm(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \, dt = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0 \\ -ie^{ikt}/k \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & \text{falls } k \neq 0 \end{cases}. \quad (1.1)$$

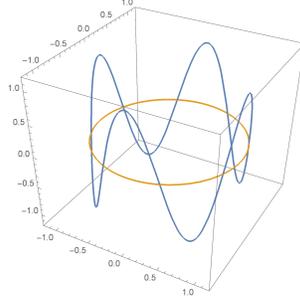
³Dabei bezeichnet d_M die Spurmetrik auf M .

⁴Einige Ergebnisse in diesem Kontext finden sich im Anhang A

⁵Insbesondere ist im Falle $f \neq 0$ damit $Z(f)$ eine diskrete Menge in G .

⁶Für die Begrifflichkeiten siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Seite 30.

⁷Für einen metrischen Raum (X, d) bezeichnet $C(X)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Abbildung 1: $\operatorname{Re}(\zeta^4) = \cos(4t)$ mit $\zeta = e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

Bemerkung 1.6 Es sei $g : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Existiert eine Stammfunktion $G : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ von g , so erhält man aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$i \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) e^{it} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (g \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (G \circ \varphi)'(t) dt = (G \circ \varphi)|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

und damit

$$\int g(\zeta) \zeta dm(\zeta) = 0. \quad (1.2)$$

Während für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Funktion $z \mapsto z^k/k$ Stammfunktion von $z \mapsto z^{k-1}$ auf \mathbb{C} ist, ergibt sich aus (1.2) in Verbindung mit (1.1) dass, die Funktion $\zeta \mapsto 1/\zeta$ keine Stammfunktion auf \mathbb{S} hat!

Man kann leicht zeigen, dass Polynome und die Exponentialfunktion \exp in \mathbb{C} analytische Funktion sind ([Ü]). Damit sind etwa auch die trigonometrischen Funktionen \cos und \sin analytisch in \mathbb{C} . Wir betrachten nun eine für die Funktionentheorie zentrale Klasse analytischer Funktionen.

Definition 1.7 Für $f \in R(\mathbb{S})$ sei die Funktion $Cf : \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$(Cf)(z) := \int \frac{f(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} dm(\zeta) = \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \zeta dm(\zeta) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}).$$

Cf heißt **Cauchyintegral** von f .

Satz 1.8 Es sei $f \in R(\mathbb{S})$. Ist $a \in \mathbb{D}$, so gilt

$$(Cf)(a + h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \quad (|h| < 1 - |a|)$$

mit

$$c_k = \frac{1}{k!} (Cf)^{(k)}(a) = \int \frac{f(\zeta) \bar{\zeta}^k}{(1 - a\bar{\zeta})^{k+1}} dm(\zeta) \quad (k \in \mathbb{N}_0). \quad (1.3)$$

Insbesondere ist Cf analytisch in \mathbb{D} .

Beweis. Ist $a \in \mathbb{D}$, so gilt

$$\frac{1}{|1 - a\bar{\zeta}|} \leq \frac{1}{1 - |a|} \quad (1.4)$$

für beliebiges $\zeta \in \mathbb{S}$. Ist nun $|h| < 1 - |a|$, so ergibt sich mit geometrischer Reihe

$$\frac{1}{1 - (a+h)\bar{\zeta}} = \frac{1}{1 - a\bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{h\bar{\zeta}}{1 - a\bar{\zeta}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\zeta}^k}{(1 - a\bar{\zeta})^{k+1}} h^k$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf \mathbb{S} (bei festen a, h) nach dem Weierstraß-Kriterium. Durch Vertauschung von Summation und Integration erhält man

$$(Cf)(a+h) = \int \frac{f(\zeta)}{1 - (a+h)\bar{\zeta}} dm(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \quad (|h| < 1 - |a|)$$

mit

$$c_k = \int \frac{f(\zeta)\bar{\zeta}^k}{(1 - a\bar{\zeta})^{k+1}} dm(\zeta) \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Da $a \in \mathbb{D}$ beliebig war, ist Cf analytisch in \mathbb{D} . \square

Bemerkung 1.9 Es sei $f \in \mathbb{R}(\mathbb{S})$. Für $a = 0$ ist (1.3)

$$\frac{1}{k!}(Cf)^{(k)}(0) = \int f(\zeta)\bar{\zeta}^k dm(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt} dt \quad (1.5)$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ ⁸ und damit

$$(Cf)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int f(\zeta)\bar{\zeta}^k dm(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Außerdem ergibt sich wegen

$$\left| \int f(\zeta)\bar{\zeta}^k dm(\zeta) \right| \leq \int |f(\zeta)| dm(\zeta) \leq \sup_{\mathbb{S}} |f|$$

die **Cauchysche Ungleichung**

$$|(Cf)^{(k)}(0)| \leq k! \sup_{\mathbb{S}} |f| \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Allgemeiner folgt aus (1.4) und (1.3)

$$|(Cf)^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{(1 - |a|)^{k+1}} \sup_{\mathbb{S}} |f| \quad (a \in \mathbb{D}), \quad (1.6)$$

Beispiel 1.10 Wir betrachten die Monome $p_n(z) := z^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\bar{\zeta} = 1/\zeta$ für $\zeta \in \mathbb{S}$ folgt aus (1.1) und Bemerkung 1.9

$$(Cp_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int \zeta^{n-k} dm(\zeta) = z^n = p_n(z) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Aus Linearitätsgründen gilt damit $(Cp)|_{\mathbb{D}} = p|_{\mathbb{D}}$ für beliebige Polynome p .

⁸Das Integral rechts nennt man den k -ten Fourier-Koeffizient von f , auch für negative k .

Definition 1.11 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar, so nennt man f **holomorph**. Wir setzen $H(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}$.

Satz 1.12 (Cauchysche Integralformel)

Es seien $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $a \in \mathbb{D}$. Ist $f|_{\mathbb{D} \setminus \{a\}}$ holomorph, so gilt

$$f(a) = \int \frac{f(\zeta)}{1 - a\bar{\zeta}} dm(\zeta) = (Cf)(a).$$

Beweis. Wir definieren $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(\lambda, \zeta) := \frac{f(a + \lambda(\zeta - a))}{1 - a\bar{\zeta}} \quad (\lambda \in [0, 1], \zeta \in \mathbb{S})$$

und $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\Phi(\lambda) := \int \varphi(\lambda, \zeta) dm(\zeta) \quad (\lambda \in [0, 1]).$$

Da φ stetig ist, ist Φ stetig auf $[0, 1]$ (Stetigkeit von Parameterintegralen). Da zudem $\zeta \mapsto f(a + \lambda(\zeta - a))/\lambda$ für jedes $\lambda \in (0, 1)$ eine Stammfunktion zu $\zeta \mapsto f'(a + \lambda(\zeta - a))$ auf \mathbb{S} ist, ergibt sich mit Differenzierbarkeit von Parameterintegralen und (1.2)

$$\Phi'(\lambda) = \int \partial_1 \varphi(\lambda, \zeta) dm(\zeta) = \int f'(a + \lambda(\zeta - a)) \zeta dm(\zeta) = 0 \quad (0 < \lambda < 1).$$

Damit ist Φ konstant auf $[0, 1]$ und folglich wegen $(C1)|_{\mathbb{D}} = 1|_{\mathbb{D}}$

$$\int \frac{f(\zeta)}{1 - a\bar{\zeta}} dm(\zeta) = \Phi(1) = \Phi(0) = \int \frac{f(a)}{1 - a\bar{\zeta}} dm(\zeta) = f(a)(C1)(a) = f(a).$$

□

Bemerkung 1.13 Für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{C}$ schreiben wir

$$A(K) := \{f \in C(K) : f|_{K^\circ} \text{ holomorph}\}.$$

Nach Satz 1.12 gilt

$$(Cf)|_{\mathbb{D}} = f|_{\mathbb{D}},$$

für $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, d. h. f stimmt in \mathbb{D} mit seinem Cauchyintegral überein! Damit gelten sämtliche Aussagen aus Satz 1.8 und Bemerkung 1.9 mit f anstelle von Cf . Insbesondere ist f analytisch in \mathbb{D} .

Durch Übertragung des Satzes 1.8 in Verbindung mit Bemerkung 1.13 auf allgemeine Kreise erhält man, dass aus der Holomorphie einer Funktion stets schon deren Analytizität folgt, ein Art mathematisches Wunder, das die komplexe Analysis in fundamentaler Weise von der reellen unterscheidet:

Satz 1.14 (Analytizität holomorpher Funktionen)

Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Dann ist f analytisch und für jedes $a \in \Omega$ der Konvergenzradius der Taylorreihe $f(a+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_k h^k$ mindestens $R_a := \text{dist}(a, \partial\Omega)$. Zudem gilt für $0 < \rho < R_a$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{\rho^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int f(a + \rho\zeta) \bar{\zeta}^k dm(\zeta), \quad (1.7)$$

also insbesondere die Mittelwertformel

$$f(a) = \int f(a + \rho\zeta) dm(\zeta).$$

Beweis. Für $\rho < R_a$ sei $g : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(w) := f(a + \rho w) \quad (|w| \leq 1).$$

Dann ist $g \in A(\overline{\mathbb{D}})$. Mit Bemerkung 1.13, angewandt auf g , ergibt sich

$$f(a+h) = g\left(\frac{h}{\rho}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \frac{h^k}{\rho^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \quad (|h| < \rho).$$

Da $\rho < R$ beliebig war, gilt die Darstellung für $|h| < R_a$. Außerdem ist nach (1.5)

$$\frac{\rho^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) = \int g(\zeta) \bar{\zeta}^k dm(\zeta) = \int f(a + \rho\zeta) \bar{\zeta}^k dm(\zeta).$$

Da $a \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω . □

Wir ziehen einige wichtige – und teils verblüffende – Folgerungen

Bemerkung 1.15 Nach Satz 1.14 sind alle Ableitungen holomorpher Funktionen wieder holomorph und $H(\Omega)$ stimmt mit der Menge der in Ω analytischen Funktionen überein. Insbesondere sind damit Produkte analytischer Funktionen wieder analytisch und $1/f$ analytisch falls f nullstellfrei ist. Außerdem folgt aus Satz 1.14: Ist G ein Gebiet und ist $f^{(n)} = 0$ (und damit $f^{(k)} = 0$ für $k \geq n$) lokal an einer Stelle a , so ist f Einschränkung eines Polynoms vom Grad $< n$ auf G .

Denn: Ist $a \in G$, so gilt $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k h^k$ für $|h| < R_a$, also stimmt f auf $U_{R_a}(a)$ mit dem Polynom $z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} c_k (z-a)^k$ überein. Nach dem Identitätssatz gilt dies dann auch auf G .

Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ nennt man auch eine **ganze Funktion**. Insbesondere sind Polynome und \exp , \sin , \cos ganze Funktionen. Bei ganzen Funktionen ist $R_a = \infty$ für alle $a \in \mathbb{C}$ in Satz 1.14.

Satz 1.16 (Liouville)

Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis. Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 < \rho < \infty$ gilt nach (1.7)

$$\rho|f'(a)| \leq \int |f(a + \rho\zeta)| dm(\zeta) \leq \sup_{\mathbb{C}} |f|$$

Da ρ beliebig groß gewählt werden kann, ist $f'(a) = 0$ und damit f konstant nach Bemerkung 1.15. \square

Bemerkung 1.17 Als Anwendung des Satzes von Liouville ergibt sich ein sehr kurzer Beweis zum Fundamentalsatz der Algebra: Es sei $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom von Grad $d \geq 1$. Dann gilt $|P(z)| \rightarrow +\infty$ für $|z| \rightarrow +\infty$. Angenommen, p hat keine Nullstelle. Dann ist $1/p$ eine ganze Funktion mit $(1/p)(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$. Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt sind, ist $1/p$ beschränkt in \mathbb{C} . Nach dem Satz von Liouville ist $1/p$ und damit auch p konstant, im Widerspruch zu $d \geq 1$.

Bemerkung und Definition 1.18 (Maximumprinzip) Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Erfüllt u an $a \in \Omega$ die **Mittelwertungleichung**, d. h. existiert ein $\delta > 0$ mit

$$u(a) \leq \int u(a + \rho\zeta) dm(\zeta) \quad (0 < \rho < \delta),$$

so gilt: Hat u an a ein lokales Maximum, so ist u schon lokal konstant an a .

Denn: Ohne Einschränkung sei δ so, dass $g(z) := u(a) - u(z) \geq 0$ für $z \in U_\delta(a)$.

Nach der Mittelwertungleichung ist

$$0 \leq \int g(a + \rho\zeta) dm(\zeta) = u(a) - \int u(a + \rho\zeta) dm(\zeta) \leq 0,$$

also $\int g(a + \rho\zeta) dm(\zeta) = 0$ für $0 < \rho < \delta$. Da g stetig ist, impliziert dies $g|_{a+\rho\mathbb{S}} = 0$ für $0 < \rho < \delta$, also $u = u(a)$ auf $U_\delta(a)$.

Satz 1.19 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$. Ist a eine Extremstelle von $\operatorname{Re} f$ bzw. eine Maximalstelle von $|f|$, so ist $\operatorname{Re} f$ bzw. f lokal konstant an a .⁹

Beweis. Aus der Mittelwerformel für f an a folgt, dass auch $u := \operatorname{Re} f$ die Mittelformel an a erfüllt. Insbesondere erfüllen u und $-u$ die Mittelwertungleichung. Ohne Einschränkung sei $a \in \Omega$ eine Maximalstelle von u (sonst betrachte man $-u$). Nach Bemerkung 1.18 ist dann $\operatorname{Re} f$ lokal konstant an a .

⁹eine entsprechende Aussage gilt für $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)$.

Weiter folgt aus der Mittelwertformel, dass $|f|$ die Mittelwertungleichung an a erfüllt. Wieder mit Bemerkung 1.18 ist dann $|f|$ lokal konstant an a . Dies impliziert die lokale Konstanz auch von f an der Stelle a ([Ü]). \square

Bemerkung 1.20 Ist $f \in H(\Omega)$, so ist natürlich jede Nullstelle Minimalstelle von $|f|$. Ist f aber nullstellenfrei, so sieht man durch Anwendung von Satz 1.19 auf $1/f$: Ist $a \in \Omega$ eine Minimalstelle von $|f|$, so ist f lokal konstant an a .

Als Folgerung ergibt sich eine zentrale Aussage über das Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen:

Satz 1.21 (offene Abbildung)

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und ist $f \in H(\Omega)$ an keiner Stelle lokal konstant, so ist f offen.¹⁰

Beweis. Es seien $a \in \Omega$ und $c = f(a)$. Es reicht zu zeigen, dass zu jedem $r > 0$ mit $B_r(a) \subset \Omega$ ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(c) \subset f(U_r(a))$.

Da f nicht lokal konstant an a ist, ist a eine isolierte Nullstelle von $f - c$. Also können wir $r > 0$ so klein wählen, dass $f(z) - c \neq 0$ für $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. Wegen der Kompaktheit von $f(a + r\mathbb{S})$ ist

$$\delta := \text{dist}(c, f(a + r\mathbb{S}))/2 > 0.$$

Es sei nun $w \in V := U_\delta(c)$. Für $z \in a + r\mathbb{S}$ gilt dann

$$|f(z) - w| = |f(z) - c - (w - c)| \geq |f(z) - c| - |w - c| > \delta.$$

Wir wählen $z \in B_r(a)$ so, dass¹¹

$$|f(z) - w| = \min_{B_r(a)} |f - w|.$$

Dann gilt $|f(z) - w| \leq |f(a) - w| = |c - w| < \delta$, also $z \notin a + r\mathbb{S}$ und damit $z \in U_r(a)$. Wir zeigen, dass $f(z) = w$ gilt. Da $w \in V$ beliebig war, gilt dann $V \subset f(U_r(a))$.

Angenommen, nicht. Dann ist $f - w$ nullstellenfrei in $U_r(a)$. Nach Bemerkung 1.20, angewandt auf $(f - w)|_{U_r(a)}$, ist $f - w$ und damit auch f lokal konstant an z , im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Als Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung erhält man auch die lokale Holomorphie – und damit auch analytische – Umkehrbarkeit holomorpher Funktionen an nicht-kritischen Stellen. Vorbereitend bemerken wir

¹⁰ f heißt offen, falls Bilder offener Mengen offen sind.

¹¹ Wichtig: stetige reellwertige Funktionen werden minimal (und maximal) auf kompakten Mengen.

Bemerkung 1.22 Sind $X \subset \mathbb{K}$ offen, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, & \text{falls } x \neq y \\ f'(x), & \text{falls } x = y \end{cases},$$

so ist die Abbildung $g : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Denn: Es reicht, die Stetigkeit an den Stellen (a, a) zu zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f' stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f'(u) - f'(a)| < \varepsilon$ für $u \in U_\delta(a)$. Nach dem Taylorsatz¹² gilt für $x, y \in U_\delta(a)$

$$f(y) - f(x) = (y - x) \int_0^1 f'(y + t(y - x)) dt$$

und damit

$$|f(y) - f(x) - f'(a)(y - x)| = |y - x| \cdot \left| \int_0^1 f'(y + t(y - x)) - f'(a) dt \right| \leq \varepsilon |y - x|.$$

Satz 1.23 (Umkehrsatz)

Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$ und $a \in \Omega$ mit $f'(a) \neq 0$. Dann existieren offene Umgebungen U von a und V von $f(a)$ so, dass $f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv ist mit $h := (f|_U)^{-1} \in H(V)$ und

$$h'(w) = 1/f'(h(w)) \quad (w \in V).$$

Beweis. Es sei g wie in Bemerkung 1.22. Wegen $f'(a) \neq 0$ existieren daher eine offene Umgebung U von a und $c > 0$ mit $|f'(\zeta)| \geq 2c$ für $\zeta \in U$ und $|f'(\zeta) - g(z, \zeta)| < c$ für $z, \zeta \in U$, also

$$|f(z) - f(\zeta)| = |f'(\zeta) - (f'(\zeta) - g(z, \zeta))| \cdot |z - \zeta| \geq (2c - c)|z - \zeta| = c|z - \zeta|.$$

Damit ist $f|_U : U \rightarrow f(U) =: V$ bijektiv. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist V offen und die auf V definierte Umkehrfunktion $h := (f|_U)^{-1}$ stetig. Nach der Umkehrregel der eindimensionalen Analysis¹³ ist h stetig differenzierbar auf V mit $h' = 1/(f' \circ h)$. \square

Bemerkung 1.24 Es seien (K, d) ein vollständiger metrischer Raum und

$$\|f\|_\infty := \|f\|_K := \max_K |f| \quad (f \in C(K))$$

die Maximumnorm auf K . Dann ist durch

$$d_K(f, g) = \max_K |f - g| \quad (f, g \in C(K))$$

¹²etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 2.24

¹³siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_GW_WS2020-21.pdf

eine vollständige Metrik definiert, also $(C(K), \|\cdot\|_K)$ ein Banachraum.¹⁴ Konvergenz einer Folge bezüglich d_K bedeutet gleichmäßige Konvergenz auf K .

Definition 1.25 Es seien (X, d) , (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n : X \rightarrow Y$. Dann heißt die Folge (f_n) **lokal gleichmäßig konvergent** (auf X), falls zu jedem $a \in X$ eine Umgebung U von a so existiert, dass $(f_n|_U)$ gleichmäßig auf U konvergiert. Aus der Überdeckungskompaktheit kompakter Mengen in metrischen Räumen (siehe Bemerkung und Definition C.1) folgt, dass aus lokal gleichmäßiger Konvergenz gleichmäßige Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen folgt. Die Umkehrung gilt auch, falls jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung hat, also etwa in \mathbb{C} .

Aus der Cauchyschen Integralformel und der Cauchyschen Ungleichung folgt

Satz 1.26 *Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Dann ist der Raum $(A(K), \|\cdot\|_K)$ ein Banachraum und für jede Folge (f_n) in $A(K)$ mit $f_n \rightarrow f$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf K° .*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst, dass $A(\overline{\mathbb{D}})$ abgeschlossen in $C(\overline{\mathbb{D}})$ ist. Dazu sei (g_n) eine Folge in $A(\overline{\mathbb{D}})$ mit $g_n \rightarrow g \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Nach der Cauchyschen Integralformel und wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf \mathbb{S} gilt für jedes $z \in \mathbb{D}$

$$g_n(z) = (Cg_n)(z) = \int \frac{g_n(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} dm(\zeta) \rightarrow \int \frac{g(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} dm(\zeta) = (Cg)(z)$$

und damit $g = Cg$ auf \mathbb{D} . Da Cg analytisch in \mathbb{D} ist, gilt dies auch für g .

2. Nun seien (f_n) eine Folge in $A(K)$ mit $f_n \rightarrow f \in C(K)$. Sind $a \in K^\circ$ und $0 < \rho < \text{dist}(a, \partial K)$, so ergibt sich durch Anwendung von 1. auf

$$g_n(w) := f_n(a + \rho w), \quad g(w) := f(a + \rho w) \quad (|w| \leq 1),$$

dass f holomorph in $U_\rho(a)$ ist. Außerdem gilt für $k \in \mathbb{N}$ nach der allgemeinen Cauchyschen Ungleichung (1.6)

$$\max_{w \in B_{1/2}(0)} |(f_n^{(k)} - f^{(k)})(a + \rho w)| = \rho^{-k} \max_{B_{1/2}(0)} |g_n^{(k)} - g^{(k)}| \leq k! \rho^{-k} 2^{k+1} \max_{\mathbb{S}} |g_n - g| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Da a beliebig war, ist $f \in H(K^\circ)$ mit $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf K° . \square

Bemerkung 1.27 Durch Lokalisieren erhält man aus Satz 1.26: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sind $f_n \in H(\Omega)$ mit $f_n \rightarrow f$ lokal gleichmäßig auf Ω , so ist $f \in H(\Omega)$, und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf Ω .

¹⁴siehe etwa Bem. 9.9 in https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_Analysis_1617.pdf.

Beispiel 1.28 Auf der Halbebene $\{\operatorname{Re} z > 1\} = 1 + \mathbb{C}_+$ ist die **Riemannsche Zeta-Funktion** ζ definiert durch

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^z \quad (\operatorname{Re} z > 1).$$

Die Reihe konvergiert für alle $z \in 1 + \mathbb{C}_+$ absolut und als Funktionenreihe lokal gleichmäßig auf $1 + \mathbb{C}_+$. Da die Reihenglieder $z \mapsto k^{-z} = \exp(-z \ln k)$ ganze Funktionen sind, ist ζ eine holomorphe Funktion auf $1 + \mathbb{C}_+$.

2 Meromorphe Funktionen

Quotienten holomorpher Funktionen sind im Allgemeinen keine holomorphen Funktionen. So ist etwa $z \mapsto 1/z$ nicht definiert an 0. Durch Erweitern die komplexen Ebene und der Klasse der holomorphen Funktionen lässt sich das Defizit in sinnvoller Weise beheben.

Bemerkung und Definition 2.1 Wir ergänzen die komplexe Ebene durch Hinzufügen eines Punktes, den wir ∞ nennen, und setzen

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Wir wollen \mathbb{C}_∞ mit einer natürlichen Metrik so versehen, dass der Raum kompakt wird. Dazu sei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ und mit $0 = 0_{\mathbb{C}}$

$$S := \{(w, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \|(w, u) - (0, 1/2)\|_2 = 1/2\}$$

die 2-Sphäre mit Mittelpunkt $(0, 1/2)$ und Radius $1/2$. Dann ist durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{1 + |z|^2}(z, |z|^2) \quad (z \in \mathbb{C})$$

eine Abbildung von \mathbb{C} auf $S \setminus \{(0, 1)\}$ definiert ([Ü]).¹⁵ Mit $\varphi(\infty) := (0, 1)$ ist also $\varphi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S$ surjektiv.

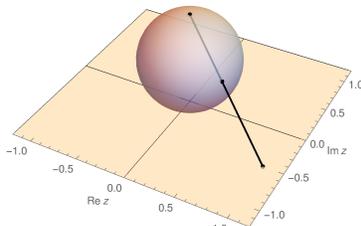


Abbildung 2: stereographische Projektion.

Man kann nachrechnen, dass für $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}_\infty$

$$\|\varphi(z) - \varphi(z')\|_2 = \begin{cases} |z - z'| / \sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}, & \text{falls } z' \in \mathbb{C} \\ 1 / \sqrt{1 + |z|^2}, & \text{falls } z' = \infty \end{cases}$$

gilt ([Ü]). Insbesondere ist damit φ bijektiv und durch $\chi(z, z') := \|\varphi(z) - \varphi(z')\|_2$ eine Metrik auf \mathbb{C}_∞ definiert, genannt die **chordale Metrik**. Die Umkehrabbildung φ^{-1} von φ heißt **stereographische Projektion** und ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(w, u) = \begin{cases} w/(1 - u), & \text{falls } u \neq 1 \\ \infty, & \text{falls } u = 1 \end{cases}.$$

¹⁵Geometrisch ergibt sich der Punkt $\varphi(z)$ als der Schnittpunkt der Sphäre S mit der Strecke zwischen den Punkten $(0, 1)$, also dem Nordpol der Sphäre, und dem Punkt $(z, 0)$.

Da $\varphi^{-1} : S \rightarrow (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ nach Definition eine Isometrie und damit insbesondere stetig ist, überträgt sich die Kompaktheit von S auf \mathbb{C}_∞ . Also ist $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ein *kompakter* metrischer Raum.

Eine Menge $B \subset \mathbb{C}$ ist genau dann beschränkt in \mathbb{C} , wenn $\text{dist}_\chi(B, \infty) > 0$ gilt und in diesem Fall existiert eine Konstante $c > 0$ mit $|z - z'| \leq c \cdot \chi(z, z')$ für $z, z' \in B$. Ist (z_n) eine Folge in \mathbb{C} , so gilt damit $\chi(z_n, z) \rightarrow 0$ für $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $|z_n - z| \rightarrow 0$. Außerdem gilt $\chi(z_n, \infty) \rightarrow 0$ genau dann, wenn $|z_n| \rightarrow +\infty$, jeweils für $n \rightarrow \infty$.

Schließlich vereinbaren wir $1/\infty := 0$, $1/0 := \infty$, womit die Abbildung $z \mapsto 1/z$ eine Isometrie bzgl. χ wird ([Ü]). Zudem setzen wir $\infty \cdot w = w \cdot \infty := \infty$ für $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ sowie $w + \infty = \infty + w := \infty$ für $w \in \mathbb{C}$.¹⁶

Bemerkung und Definition 2.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen. Dann heißt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ **meromorph** an $a \in \Omega \cap \mathbb{C}$, falls eine offene Umgebung U von a so existiert, dass $f|_U$ oder $(1/f)|_U$ holomorph ist, und meromorph an ∞ (im Fall $\infty \in \Omega$), falls $z \mapsto f(1/z)$ meromorph an 0 ist. Nach Bemerkung und Definition 2.1 sind meromorphe Funktionen stetig, auch an ∞ -Stellen, also an Nullstellen von $1/f$.¹⁷ Wir setzen

$$M(\Omega) := M(\Omega, \mathbb{C}_\infty) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty : f \text{ meromorph}\}$$

sowie

$$M_*(\Omega) := \{f \in M(\Omega) : f \text{ nirgends lokal konstant } 0 \text{ oder } \infty\}.$$

In Fall eines Gebiets sind nur die konstanten Funktionen 0 und ∞ ausgeschlossen. Es gilt $f \in M(\Omega)$ bzw. $M_*(\Omega)$ genau dann, wenn $1/f \in M(\Omega)$ bzw. $M_*(\Omega)$ ist. Für $f \in M_*(\Omega)$ setzt man¹⁸

$$P(f) := Z(1/f) = \{a \in \Omega : f(a) = \infty\}.$$

und nennt $a \in P(f)$ eine **Polstelle** von f . Für $a \in P(f)$ setzt man

$$\text{ord}(f, a) := -\text{ord}(1/f, a).$$

Damit heißt $|\text{ord}(f, a)|$ **Ordnung** der Polstelle. Weiter schreiben wir

$$A(f) := Z(f) \cup P(f).$$

Nach Bemerkung 1.2 ist $A(f)$ diskret in Ω und es gilt ([Ü]): Sind $f, g \in M_*(\Omega)$, so ist $f \cdot g \in M_*(\Omega)$ (also auch $f/g = f \cdot (1/g)$) in folgendem Sinne: Die jedenfalls bis auf Polstellen von f und g auf Ω punktweise definierte Funktion $f \cdot g$ hat eine eindeutig bestimmte stetige und damit nach Satz 1.12 meromorphe Fortsetzung auf Ω , die man dann auch mit $f \cdot g$ bezeichnet. Dabei gilt

$$\text{ord}(f \cdot g, a) = \text{ord}(f, a) + \text{ord}(g, a) \quad (a \in \Omega). \quad (2.1)$$

¹⁶Man spricht dann auch von der **Riemannschen Zahlenkugel**, da man neben der metrischen Struktur nach Bemerkung 2.2 auch eine von \mathbb{C} herkommende (mit Einschränkungen versehene) arithmetische Struktur auf \mathbb{C}_∞ hat. Nicht definiert sind $0 \cdot \infty$ und $\infty + \infty$.

¹⁷Wie üblich heißt f meromorph, wenn f an allen Stellen meromorph ist. Man beachte, dass nach dieser Definition meromorphe Funktionen auch lokal konstant mit Wert ∞ sein können.

¹⁸Ist X eine Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, so schreiben wir wieder $Z(f)$ für die Nullstellenmenge.

Beispiel 2.3 Sind f, g ganze Funktionen $\neq 0$, so ist $f/g \in M_*(\mathbb{C})$. So sind etwa

$$\tan = \sin / \cos \quad \text{und} \quad \cot = 1 / \tan$$

meromorph in \mathbb{C} . Wegen $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ und $Z(\cos) = \pi(\mathbb{Z} + 1/2) = P(1/\cos)$, wobei alle Nullstellen von von erster Ordnung sind, hat \tan Nullstellen erster Ordnung an den Stellen $k\pi$ und \cot an den Stellen $(k + 1/2)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Also hat $\cot = 1/\tan$ Pole erster Ordnung an den Stellen $k\pi$ und $\tan = 1/\cot$ Pole erster Ordnung an den Stellen $(k + 1/2)\pi$.

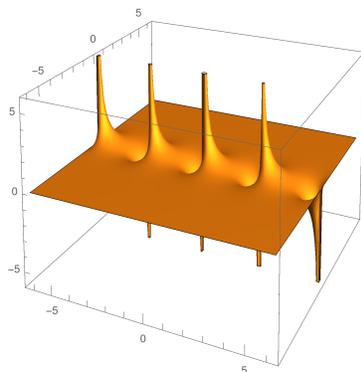


Abbildung 3: $\operatorname{Re}(\cot)$.

Bemerkung und Definition 2.4 1. Ist $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom, so ist p durch $p(\infty) = \infty$ zu einer in \mathbb{C}_∞ meromorphen Funktion fortsetzbar. Allgemeiner gilt: Ist $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine rationale Funktion, also $f = p/q$ mit Polynomen p, q , die ohne Einschränkung keine gemeinsame Nullstelle haben, so ist f meromorph in \mathbb{C}_∞ .¹⁹ Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass $f(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}_\infty$ für nichtkonstante rationale Funktionen gilt.

2. Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$ heißt die rationale Funktion φ mit

$$\varphi_A(z) := \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \\ a/c, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

eine **Möbius-Transformation**. Man kann nachrechnen, dass $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$ gilt. Insbesondere ist φ_A bijektiv mit Umkehrfunktion $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.²⁰

Bemerkung 2.5 Für $b \in \mathbb{C}$ betrachten wir $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -\bar{b} & 1 \end{pmatrix}$ und

$$\varphi_b(z) := \varphi_A(z) = \frac{z + b}{1 - z\bar{b}} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

¹⁹Vgl. https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_GW_WS2020-21.pdf, B. 4.16.

²⁰Damit ist die Menge der Möbius-Transformationen eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe von \mathbb{C}_∞ .

Für $z \neq 1/\bar{b}$ ist

$$\frac{|\varphi_b(z)|}{\sqrt{1 + |\varphi_b(z)|^2}} = \frac{|z + b|}{\sqrt{|1 - z\bar{b}|^2 + |z + b|^2}} = \frac{|z + b|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |b|^2)}} = \chi(z, -b).$$

Da $\sin(\arctan(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt ([Ü]), ergibt sich mit $\arctan(|\infty|) := \pi/2$ nach Bemerkung und Definition 2.1

$$\chi(z, z') = \sin(\arctan |\varphi_{-z'}(z)|) \quad (z, z' \in \mathbb{C}).$$

Definiert man $\sigma(z, z') := \arctan |\varphi_{-z'}(z)|$ (und $\sigma(\infty, 0) := \pi/2$), so ist

$$\chi(z, z') \leq \sigma(z, z') \leq \frac{\pi}{2} \chi(z, z').$$

Tatsächlich definiert σ ebenfalls eine Metrik auf \mathbb{C}_∞ , genannt **sphärische Metrik**, was wir allerdings weder nutzen noch beweisen werden.²¹

Satz 2.6 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f meromorph in G so, dass $A(f)$ endlich ist. Dann existiert eine in G holomorphe Funktion φ mit $Z(\varphi) = \emptyset$ und*

$$(f'/f)(z) = \sum_{a \in A(f)} \frac{\text{ord}(f, a)}{z - a} + (\varphi'/\varphi)(z) \quad (z \in G \setminus A(f)).$$

Ist $B_\rho(c) \subset G$ mit $A(f) \cap (c + \rho\mathbb{S}) = \emptyset$, so gilt zudem²²

$$\rho \int (f'/f)(c + \rho\zeta) \zeta \, dm(\zeta) = \sum_{a \in A(f) \cap U_\rho(c)} \text{ord}(f, a).$$

Beweis.

1. Ist $a \in A(f)$, so existiert nach Bemerkung 1.2 eine in G meromorphe Funktion φ_a mit $a \notin A(\varphi_a)$ und

$$f(z) = (z - a)^{\text{ord}(f, a)} \varphi_a(z) \quad (z \in G \setminus A(f)).$$

Nach (2.1) ist $\text{ord}(f, z) = \text{ord}(\varphi_a, z)$ für $z \neq a$. Durch induktive Anwendung erhält man

$$f(z) = \prod_{a \in A(f)} (z - a)^{\text{ord}(f, a)} \varphi(z)$$

mit einer nullstellenfreien Funktion $\varphi \in H(G)$. Logarithmisches Differenzieren ergibt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{a \in A(f)} \frac{\text{ord}(f, a)}{z - a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad (z \in G \setminus A(f)).$$

²¹ $\sigma(z, z')$ entspricht geometrisch der Länge des kleineren Bogens eines Großkreises, auf dem die beiden Urbildpunkte $\varphi(z)$ und $\varphi(z')$ unter der stereographischen Projektion liegen. Sind die beiden Punkte keine Antipoden, so existiert genau ein solcher Großkreis; Antipoden haben stets den sphärischen Abstand $\pi/2$.

²²Die Aussage wird auch als Argumentprinzip bezeichnet.

2. Da φ'/φ holomorph auf $U_R(c)$ für ein $R > \rho$ ist, hat φ'/φ eine Stammfunktion auf $U_R(c)$ (Taylorreihe um c gliedweise integrieren; [Ü]). Nach Bemerkung 1.6 ist daher

$$\int (\varphi'/\varphi)(c + \rho\zeta)\zeta \, dm(\zeta) = 0.$$

Außerdem ist für $a \in A(f)$ nach Beispiel 1.10 und [Ü]

$$\int \frac{\rho\zeta \, dm(\zeta)}{c + \rho\zeta - a} = \int \frac{dm(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}(a-c)/\rho} = (C1)\left(\frac{a-c}{\rho}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |a-c| < \rho \\ 0, & \text{falls } |a-c| > \rho \end{cases} \quad (2.2)$$

und damit

$$\begin{aligned} \rho \int \frac{f'}{f}(c + \rho\zeta)\zeta \, dm(\zeta) &= \sum_{a \in A(f)} \text{ord}(f, a)(C1)\left(\frac{a-c}{\rho}\right) + \rho \int \frac{\varphi'}{\varphi}(c + \rho\zeta)\zeta \, dm(\zeta) \\ &= \sum_{a \in A(f) \cap U_\rho(c)} \text{ord}(f, a). \end{aligned}$$

□

Der Satz hat weitreichende Konsequenzen, auch und insbesondere für holomorphe Funktionen. Wir zeigen zunächst

Satz 2.7 (Rouché)

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in H(G)$. Sind $c \in G$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(c) \subset G$ und ist $|g - f| < |f|$ auf $c + \rho\mathbb{S}$, so gilt

$$\sum_{a \in Z(f) \cap U_\rho(c)} \text{ord}(f, a) = \sum_{a \in Z(g) \cap U_\rho(c)} \text{ord}(g, a).$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\varphi : G \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(z, t) := f(z) + t(g - f)(z) \quad (t \in [0, 1], z \in G).$$

Für $t \in [0, 1]$ und $w \in c + \rho\mathbb{S}$ gilt

$$|\varphi(w, t)| \geq |f(w)| - t|(g - f)(w)| \geq |f(w)| - |(g - f)(w)| > 0,$$

so dass die auf G holomorphe Funktion $z \mapsto \varphi(z, t)$ auf $c + \rho\mathbb{S}$ keine Nullstellen hat. Definiert man $\psi(\cdot, t) := (\varphi(\cdot, t))'/\varphi(\cdot, t)$, so ist $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\Phi(t) := \rho \int \psi(c + \rho\zeta, t)\zeta \, dm(\zeta) \quad (t \in [0, 1])$$

stetig (Stetigkeit von Parameterintegralen; siehe Anhang). Nach Satz 2.6 ist $\Phi([0, 1]) \subset \mathbb{Z}$, also Φ nach dem Zwischenwertsatz konstant, und außerdem

$$\Phi(0) = \sum_{a \in Z(f) \cap U_\rho(c)} \text{ord}(f, a), \quad \Phi(1) = \sum_{a \in Z(g) \cap U_\rho(c)} \text{ord}(g, a)$$

wegen $A(f) = A(g) = \emptyset$.

□

Beispiel 2.8 1. Wir beweisen noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra in einer quantitativen Version: Es sei $p(z) = \sum_{k=0}^d c_k z^k$ ein Polynom vom Grad $d \in \mathbb{N}$. Ist $R > 0$ so, dass

$$\sum_{k=0}^{d-1} |c_k| R^{k-d} < |c_d|,$$

so hat p genau d Nullstellen inklusive Vielfachheiten²³ in $U_R(0)$, also

$$\sum_{a \in Z(p) \cap U_R(0)} \text{ord}(p, a) = d.$$

Denn: Ist $q(z) := c_d z^d$, so gilt für $|z| = R$

$$|p(z) - q(z)| \leq \sum_{k=0}^{d-1} |c_k| R^k < |c_d| R^d = |q(z)|.$$

Aus Satz 2.7 ergibt sich $\sum_{a \in Z(p) \cap U_R(0)} \text{ord}(p, a) = \text{ord}(q, 0) = d$.

2. Wir betrachten die Gleichung

$$e^z = 1 + 2z$$

und suchen alle Lösungen in \mathbb{D} . Offensichtlich ist $z = 0$ eine Lösung. Aus

$$|e^z - 1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k! = e - 1 < 2 \quad (|z| = 1)$$

ergibt sich mit $f(z) := 2z$ und $g(z) := 1 + 2z - e^z$ für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = |e^z - 1| < 2 = |f(z)|.$$

Nach Satz 2.7 haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in \mathbb{D} inklusive Vielfachheiten, nämlich eine einfache. Folglich ist $z = 0$ die einzige Lösung der Gleichung in \mathbb{D} .

Wir betrachten wieder Folgen holomorpher Funktionen.

Bemerkung 2.9 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und (f_n) eine Folge in $H(\Omega)$ mit $f_n \rightarrow f$ lokal gleichmäßig auf Ω . Ist $\rho > 0$ mit $B_\rho(a) \subset \Omega$ und hat f keine Nullstellen auf $a + \rho\mathbb{S}$, so haben für n genügend groß f und f_n die gleiche Anzahl von Nullstellen in $U_\rho(a)$ inklusive Vielfachheiten, d. h.

$$\sum_{u \in U_\rho(a) \cap Z(f)} \text{ord}(f, u) = \sum_{u \in U_\rho(a) \cap Z(f_n)} \text{ord}(f_n, u).$$

²³Ist $a \in Z(f)$, so nennt man $\text{ord}(f, a)$ die Vielfachheit der Nullstelle a .

Denn: Da f stetig auf $K := a + \rho\mathbb{S}$ ist, gilt

$$\delta := \min_K |f| > 0.$$

Da (f_n) gleichmäßig auf K gegen f konvergiert, existiert ein $N > 0$ so, dass

$$\max_K |f - f_n| < \delta$$

für alle $n \geq N$ gilt. Daher folgt die Behauptung aus dem Satz von Rouché.

Damit ergibt sich auch folgende lokale Aussage: Ist f nicht lokal konstant $= 0$ an a , so existiert ein $r > 0$ so, dass die Funktionen f_n für n genügend groß in $U_r(a)$ genau $\text{ord} f(a)$ Nullstellen inklusive Vielfachheiten haben, d. h.

$$\sum_{u \in U_r(a) \cap Z(f_n)} \text{ord}(f_n, u) = \text{ord}(f, a).$$

Die Aussage ist im Allgemeinen falsch für $f = 0$. So konvergiert etwa die Folge f_n mit $f_n(z) = 1/n$ gleichmäßig auf \mathbb{C} gegen 0, aber alle f_n sind nullstellenfrei.

Beispiel 2.10 Es sei $f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$. Dann gilt für die n -ten Teilsommen

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k/k!$$

nach Bemerkung 2.9: Für alle $R > 0$ existiert ein $N = N(R)$ so, dass s_n für alle $n \geq N$ in $U_R(0)$ keine Nullstelle hat. Dies bedeutet, dass für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ die Nullstellen, die nach dem Fundamentalsatz der Algebra ja existieren, für genügend große n außerhalb von K liegen.

Satz 2.11 (Hurwitz)

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen mit $f_n \rightarrow f$ lokal gleichmäßig auf G .

1. Ist $w \in f(G)$ und f nicht konstant, so ist $w \in f_n(G)$ für n genügend groß.
2. Ist f_n injektiv für unendlich viele n , so ist entweder f konstant oder f injektiv.

Beweis. 1. Es sei $a \in G$ mit $f(a) = w$, also $\text{ord}(f - w, a) > 0$. Nach Voraussetzung ist $f - w$ nicht konstant. Also ist nach dem Identitätssatz $f - w$ auch nicht konstant $= 0$ um a . Damit gilt $0 \in (f_n - w)(G)$ für n genügend groß nach Bemerkung 2.9.

2. Es sei f nicht konstant. Wir betrachten $w \in f(G)$ und $a \in G$ mit $f(a) = w$. Ist $z \in G$, $z \neq a$ und sind $U := U_\delta(a)$ sowie $V = U_\delta(z)$ mit $0 < \delta < |z - a|/2$, so existiert nach 1. ein N mit $w \in f_n(U)$ für $n \geq N$. Da f_n für unendlich viele n injektiv ist, folgt $w \notin f_n(V)$ für unendlich viele n . Wieder nach 1. ist dann auch $w \notin f(V)$, also insbesondere $f(z) \neq w$. \square

Bemerkung 2.12 Die Aussagen des Satzes von Hurwitz klingen vielleicht etwas selbstverständlicher, als sie es sind. Betrachtet man etwa die Folge (f_n) ganzer Funktionen mit $f_n(z) = z^2 + 1/n$ für $z \in \mathbb{C}$, so gilt $f_n(x) \rightarrow z^2$ gleichmäßig auf \mathbb{R} . Alle f_n sind auf \mathbb{R} nullstellenfrei, die nichtkonstante Grenzfunktion jedoch nicht. Die Aussage des Satzes von Hurwitz gilt also im Allgemeinen nicht auf Gebieten in \mathbb{R} .

Bemerkung und Definition 2.13 Sind $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in M(\Omega \setminus \{a\})$.²⁴ Man sagt, f sei **meromorph fortsetzbar** bzw. **holomorph fortsetzbar** an a , falls eine offene Umgebung U von a und $f_a \in M(U)$ bzw. $H(U)$ existieren mit $f_a(z) = f(z)$ für $z \in U \setminus \{a\}$. Ist f nicht meromorph fortsetzbar, so heißt a eine **wesentliche Singularität** von f . Aus Satz 1.12 und der lokalen Definition von Meromorphie folgt, dass f schon dann holomorph (bzw. meromorph) fortsetzbar ist, wenn eine stetige (bzw. sphärisch stetige) Fortsetzung existiert.

Der folgende Satz gibt eine Charakterisierung von Polstellen und impliziert insbesondere, dass die Summe von Funktionen in $M_*(G)$ in $M_*(G)$ liegt oder verschwindet.

Satz 2.14 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in M(\Omega \setminus \{a\})$. Genau dann ist f meromorph fortsetzbar an a mit Pol der Ordnung n , wenn ein Polynom p_a vom Grad n ohne konstanten Term so existiert, dass $z \mapsto f(z) - p_a(1/(z-a))$ an a holomorph fortsetzbar ist.*

Beweis. 1. Zunächst habe die durch ∞ an a fortgesetzte Funktion f_a einen Pol an a mit Ordnung n . Dann existiert ein $\rho > 0$ so, dass $1/f_a$ holomorph auf $U_\rho(a)$ ist. Dabei ist a eine Nullstelle der Ordnung n . Daher gilt

$$(1/f_a)(a+h) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k h^k = h^n \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+n} h^j \quad (|h| < \rho). \quad (2.3)$$

Ist $g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+n} (z-a)^j$, so existiert wegen $g(a) \neq 0$ ein $0 < \delta \leq \rho$ so, dass

$$f(a+h) = 1/h^n (1/g)(a+h) \quad (0 < |h| < \delta).$$

Ist $(1/g)(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k h^k$, so folgt

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k h^{k-n} + \sum_{k=n}^{\infty} b_k h^{k-n}.$$

Mit

$$p_a(w) := \sum_{k=0}^{n-1} b_k w^{n-k} \quad \text{und} \quad \varphi_a(z) := \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+n} z^j \quad (2.4)$$

²⁴Man spricht dann auch einer isolierten Singularität a von f .

ist φ_a holomorph in $U := U_\delta(a)$ und es gilt

$$f(z) = p_a(1/(z-a)) + \varphi_a(z) \quad (0 < |z-a| < \delta).$$

2. Hat f die Darstellung, so sieht man durch Rückverfolgen der Rechnungen aus dem ersten Beweisteil, dass $1/f$ die Darstellung (2.3) hat. Damit ist $1/f$ durch 0 an a holomorph fortsetzbar mit Nullstelle der Ordnung n . \square

Bemerkung 2.15 Sind $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in M_*(G)$ mit endlicher Polstellenmenge $P(f)$, und sind p_a wie in Satz 2.14, so existiert eine in G holomorphe Funktion φ mit

$$f(z) = \sum_{a \in P(f)} p_a \left(\frac{1}{z-a} \right) + \varphi(z) \quad (z \in G \setminus P(f)).$$

Denn: Für $b \in P(f)$ gilt

$$f - \sum_{a \in P(f)} p_a = (f - p_b) - \sum_{a \neq b} p_a.$$

Die rechte Seite ist holomorph auf einer Umgebung von b . Da b beliebig war, ist $\varphi := f - \sum_{a \in P(f)} p_a$ meromorph in G ohne Polstellen, also holomorph.

Man erhält daraus auch, dass $f \in M_*(\mathbb{C}_\infty)$ stets eine Darstellung der obigen Form mit einem Polynom φ hat (Partialbruchzerlegung). Insbesondere zeigt dies, dass jedes $f \in M_*(\mathbb{C}_\infty)$ eine rationale Funktion ist.

Bemerkung und Definition 2.16 Man kann sich überlegen, dass das Polynom p_a in Satz 2.14 eindeutig bestimmt sind. Ist $p_a(w) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k w^{n-k}$ wie in (2.4), so nennt man

$$\text{res}(f, a) := b_{n-1}$$

das **Residuum** von f an a . Ist a ein Pol der Ordnung n , so ergibt sich

$$\text{res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \left(z \mapsto (z-a)^n f(z) \right)^{(n-1)}(a) \quad (2.5)$$

aus $h^n f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k h^k + b_n h^n + \dots$ (vgl. Beweis zu Satz 2.14), also für $n=1$ insbesondere

$$\text{res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z). \quad (2.6)$$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zu einer der Kernaussagen der Funktionentheorie in einer ersten Version:

Satz 2.17 (Residuensatz für Kreise)

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f meromorph in G . Ist $B_\rho(c) \subset G$ mit $P(f) \cap (c + \rho\mathbb{S}) = \emptyset$, so gilt²⁵

$$\rho \int f(c + \rho\zeta) \zeta \, dm(\zeta) = \sum_{a \in P(f) \cap U_\rho(c)} \operatorname{res}(f, a).$$

Beweis.

1. Zunächst betrachten wir für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$

$$\gamma_{a,k}(z) := \frac{1}{(z-a)^k} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Da $\gamma_{a,k-1}/(1-k)$ für $k \neq 1$ eine Stammfunktion zu $\gamma_{a,k}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ist, gilt nach Bemerkung 1.6 für $a \notin (c + \rho\mathbb{S})$

$$\int \gamma_{a,k}(c + \rho\zeta) \zeta \, dm(\zeta) = 0.$$

2. (vgl. Beweis zum Argumentprinzip) Ist $R > \rho$ mit $B_R(a) \subset G$, so hat f nur endlich viele Polstellen in $U := U_R(c)$. Also können wir Bemerkung 2.15 mit U statt G nutzen. Da $\varphi|_U$ holomorph ist, hat φ eine Stammfunktion auf U ($[Ü]$). Also ist nach Bemerkung 1.6 auch

$$\int \varphi(c + \rho\zeta) \zeta \, dm(\zeta) = 0.$$

Mit Bemerkung 2.15 und 1. sowie (2.2) ergibt sich

$$\rho \int f(c + \rho\zeta) \zeta \, dm(\zeta) = \sum_{a \in P(f)} \operatorname{res}(f, a) (C1) \left(\frac{a-c}{\rho} \right) = \sum_{a \in P(f) \cap U_\rho(c)} \operatorname{res}(f, a).$$

□

Bemerkung 2.18 Wir betrachten Integrale der Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \, dt,$$

wobei f eine rationale Funktion ohne Pole auf $[-1, 1]$ ist. Ist $j : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ die **Joukowski-Abbildung**, definiert durch

$$j(z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

so ist

$$g(z) := f(j(z))/z,$$

wegen $j(\mathbb{S}) = [-1, 1]$ ($[Ü]$) eine rationale Funktionen ohne Pole auf \mathbb{S} . Aus $\cos t = j(e^{it})$ für $t \in [-\pi, \pi]$ ergibt sich mit Satz 2.17

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \, dt = \int g(\zeta) \zeta \, dm(\zeta) = \sum_{a \in P(g) \cap \mathbb{D}} \operatorname{res}(g, a) \quad (2.7)$$

²⁵Man beachte, dass man es mit einer Verallgemeinerung des Argumentprinzips zu tun hat.

Beispiel 2.19 Für $n \in \mathbb{N}$ und $c > 1$ betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(c + \cos t)^n}.$$

Hier ist $f(u) = (c + u)^{-n}$, also

$$g(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(c + (z + 1/z)/2)^n} = \frac{2^n z^{n-1}}{(z^2 + 2cz + 1)^n} = \frac{2^n z^{n-1}}{(z - a)^n (z - b)^n}$$

mit $a = -c + \sqrt{c^2 - 1} \in (-1, 0)$ und $b = -c - \sqrt{c^2 - 1} < -1$. Damit ergibt sich aus (2.7) und (2.5) für $z \neq b$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(c + \cos t)^n} = \operatorname{res}(g, a) = \frac{1}{(n-1)!} (z \mapsto (z - a)^n g(z))^{(n-1)}(a).$$

Für $n = 1$ bzw. $n = 2$ erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{c + \cos t} = \frac{2}{a - b} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(c + \cos t)^2} = 4 \cdot \frac{-a - b}{(a - b)^3} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - 1}^3}.$$

Bemerkung und Definition 2.20 Für $0 < r < 1$ betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

Ist $f(u) = 1/(1 - 2ru + r^2)$ und

$$g(z) = \frac{1}{z} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - r(z + 1/z) + r^2} = \frac{1}{(z - r)(1 - rz)},$$

so hat g die beiden einfachen Pole $r < 1$ und $1/r > 1$. Also gilt nach (2.7) und (2.5)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{res}(g, r) = \lim_{z \rightarrow r} \frac{1}{1 - rz} = \frac{1}{1 - r^2}.$$

Für die Funktion $P_r : U_{1/r}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P_r(\zeta) := \operatorname{Re}\left(\frac{1 + r\zeta}{1 - r\zeta}\right) = \frac{1 - r^2}{|1 - r\zeta|^2} \quad (|\zeta| < 1/r)$$

ergibt sich

$$P_r(e^{it}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

und damit

$$\int P_r dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(e^{it}) dt = 1$$

für $0 < r < 1$. Die Funktion $(\zeta, r) \mapsto P_r(\zeta)$ heißt **Poisson-Kern**.²⁶

²⁶Der Poisson-Kern spielt in der harmonischen Analysis eine zentrale Rolle.

3 Wegintegrale und Cauchytheorem

Bisher haben wir uns im Wesentlichen mit dem lokalen Eigenschaften holomorpher und meromorpher Funktionen befasst. Für die globale Theorie sind Integrale entlang Wegen und Pfaden von fundamentaler Bedeutung.

Bemerkung und Definition 3.1 Es seien $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und (X, d) ein metrischer Raum. Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ stetig, so nennt man γ einen **Weg** (in X).²⁷ Weiterhin heißt

$$\text{Sp } \gamma := \gamma([\alpha, \beta])$$

die **Spur** von γ . Dabei ist $\text{Sp } \gamma$ kompakt in X als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung. Außerdem heißen $\gamma(\alpha)$ der **Anfangspunkt** und $\gamma(\beta)$ der **Endpunkt** von γ und der Weg $\gamma_- : [\alpha, \beta] \rightarrow X$, definiert durch

$$\gamma_-(t) := \gamma(\alpha + \beta - t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

Umkehrweg von γ . Dabei ist $\text{Sp } \gamma_- = \text{Sp } \gamma$. Ein Weg heißt **geschlossen**, falls Anfangspunkt und Endpunkt gleich sind. Man spricht dann auch von einer (freien) **Schleife**²⁸. Ist

$$\sigma(t) := e^{it} \quad (t \in [-\pi, \pi])$$

und ist $g : \mathbb{S} \rightarrow X$ stetig, so ist $g \circ \sigma$ eine Schleife.²⁹ Insbesondere ist $a + \rho\sigma$ für $a \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$ eine Schleife in \mathbb{C} und

$$\text{Sp}(a + \rho\sigma) = a + \rho\mathbb{S}$$

der Kreis mit Radius ρ um a .

Definition 3.2 Sind $X \subset \mathbb{K}$ und ein Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ stetig differenzierbar, so spricht man von einem C^1 -Weg in X . Wir setzen

$$\Gamma X := \{\gamma : \gamma \text{ } C^1\text{-Weg in } X\}.$$

Für $\gamma \in \Gamma\mathbb{K}$ und $f \in C(\text{Sp } \gamma)$ definieren wir das **Wegintegral** oder kurz **Integral** von f längs γ durch

$$\int_{\gamma} f := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma) \gamma' = \int_{\alpha}^{\beta} (f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt.$$

Außerdem nennen wir

$$L(\gamma) := \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'|$$

Länge von γ .

²⁷ $[\alpha, \beta]$ nennt man auch Parameterintervall von γ

²⁸oder auch – denglisch – von einem **Loop**

²⁹Man kann sich überlegen, dass jede Schleife γ (mit Parameterintervall $[-\pi, \pi]$) von dieser Form ist.

Bemerkung 3.3 Es seien $a \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$. Mit $\gamma(t) = a + \rho\sigma(t)$ gilt wegen $\gamma'(t) = i\rho e^{it}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a+\rho\sigma} f = \rho \int f(a + \rho\zeta) \zeta \, dm(\zeta) \quad (f \in C(a + \rho\mathbb{S}))$$

sowie

$$L(a + \rho\sigma) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho \, dt = 2\pi\rho.$$

Insbesondere ist für $f \in C(\mathbb{S})$

$$(Cf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}).$$

Bemerkung 3.4 Es sei $\gamma \in \Gamma\mathbb{K}$. Aus den entsprechenden Ergebnissen für Regelintegrale ergeben sich die Linearität des Wegintegrals, also die Linearität der Abbildung

$$C(\text{Sp } \gamma) \ni f \mapsto \int_{\gamma} f \in \mathbb{C}.$$

Außerdem gilt

$$\int_{\gamma_-} f = - \int_{\gamma} f.$$

Da mit f auch $|f|$ stetig ist, existiert $\max_{\text{Sp } \gamma} |f|$. Aus $|f \circ \gamma| \leq \max_{\text{Sp } \gamma} |f|$ ergibt sich

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f \circ \gamma| \cdot |\gamma'| \leq L(\gamma) \max_{\text{Sp } \gamma} |f|.$$

Sind $f_n \in C(\text{Sp } \gamma)$ für $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig auf $\text{Sp } \gamma$ gegen f , so gilt

$$\int_{\gamma} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n.$$

Denn: Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt zunächst $f \in C(\text{Sp } \gamma)$. Außerdem ergibt sich

$$\left| \int_{\gamma} f - \int_{\gamma} f_n \right| \leq L(\gamma) \max_{\text{Sp } \gamma} |f - f_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Satz 3.5 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung für Wege)

Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f \in C(X)$. Existiert eine Stammfunktion F zu f auf X , so gilt

$$\int_{\gamma} f = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b$$

für alle $\gamma \in \Gamma X$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b , also insbesondere

$$\int_{\gamma} f = 0$$

für jede C^1 -Schleife in X .

Beweis. Nach der Kettenregel ist $F \circ \gamma$ eine Stammfunktion zu $(f \circ \gamma)\gamma'$ auf $[\alpha, \beta]$. Damit ergibt sich aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_{\gamma} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma)\gamma' = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

□

Beispiel 3.6 Es seien $z \in \mathbb{C}$ und γ ein beliebiger C^1 -Weg in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b . Dann gilt für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$,

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^k} = \frac{1}{1-k} (\zeta - z)^{1-k} \Big|_a^b.$$

Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung wird die Berechnung von Integralen einfach, wenn man passende Stammfunktionen kennt. Während nach dem Hauptsatz über Integralfunktionen stetige Funktionen auf Intervallen stets Stammfunktionen besitzen, ist die Frage nach der Existenz auf allgemeineren Mengen in \mathbb{C} nicht mehr leicht zu beantworten. Für $a, b \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$s_a^b(t) := a + t(b - a) \quad (t \in [0, 1]),$$

und

$$\int_a^b f := \int_{s_a^b} f = (b - a) \int_0^1 (f(a + (b - a)t) dt \quad (f \in C[a, b]).$$

Satz 3.7 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ offen und sternförmig bezüglich a ³⁰ und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann ist durch

$$F(x) := \int_a^x f \quad (x \in X)$$

eine Stammfunktion F zu f auf X definiert.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a = 0$. Dann ist

$$F(x) = \int_0^x f = x \int_0^1 f(tx) dt = \int_0^1 \varphi(x, t) dt \quad (x \in X)$$

mit $\varphi(x, t) := xf(tx)$ für $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Dabei gilt

$$D_1\varphi(x, t) = f(tx) + xf'(tx)t \quad (x \in X, t \in [0, 1]).$$

³⁰Ist X offen und sternförmig, so ist X insbesondere ein Gebiet; siehe Anhang Topologie

Da f stetig differenzierbar auf X ist, ist die rechte Seite stetig auf $X \times [0, 1]$. Nach Satz B.1 (Differenziation von Parameterintegralen) ist F stetig differenzierbar auf X mit

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^1 D_1 \varphi(x, t) dt = \int_0^1 f(tx) dt + \int_0^1 t \cdot x f'(tx) dt \\ &= \int_0^1 f(tx) dt + (t \cdot f(tx)) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(tx) dt = f(x). \end{aligned}$$

□

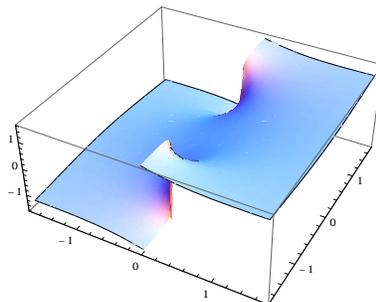
Bemerkung 3.8 Die Menge $G := \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ ist ein bzgl. 0 sternförmiges Gebiet. Da f mit $f(z) := 1/(1-z)$ für $z \in \Omega$ holomorph in G ist, definiert

$$F(z) := \int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} \quad (z \in G)$$

nach Satz 3.7 eine Stammfunktion zu f auf G mit $F(0) = 0$ und damit eine holomorphe Fortsetzung von $(-\infty, -1) \ni x \mapsto \ln(1/(1-x))$ auf G (da die Ableitungen übereinstimmen). Auch $G := \mathbb{C} \setminus \{it : t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$ ist ein bzgl. 0 sternförmiges Gebiet. Da f mit $f(z) = 1/(1+z^2)$ für $z \in \Omega$ holomorph in G ist, definiert

$$F(z) := \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} \quad (z \in G)$$

nach Satz 3.7 eine Stammfunktion zu f auf G mit $F(0) = 0$ und damit eine holomorphe Fortsetzung von \arctan auf G . Abbildung 4 zeigt den Realteil der Funktion F . Man erkennt den reellen Arkustangens als Schnitt des Graphen mit der Ebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$.

Abbildung 4: $\text{Re}(F)$

Für das Weitere ist es sinnvoll, die Definition von Wegintegralen geeignet zu erweitern.

Bemerkung und Definition 3.9 Für $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in (\Gamma\mathbb{K})^n$ nennen wir

$$\text{Sp } \gamma := \bigcup_{j=1}^n \text{Sp } \gamma_j$$

die **Spur** von γ und für $f \in C(\text{Sp } \gamma)$ setzen wir

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f$$

sowie

$$L(\gamma) := \sum_{j=1}^n L(\gamma_j).$$

Dabei heißt wieder $L(\gamma)$ die **Länge** von γ . Unmittelbar aus der jeweiligen Definition ergibt sich mit Bemerkung 3.4

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \max_{\text{Sp } \gamma} |f| \cdot L(\gamma).$$

Sind $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und F eine Stammfunktion zu f in G , so gilt für $\gamma \in (\Gamma G)^n$ nach dem Hauptsatz für Wegintegrale

$$\int_{\gamma} f = \sum_{j=1}^n (F(b_j) - F(a_j)), \quad (3.1)$$

wobei a_j, b_j die Anfangs- bzw. Endpunkte von γ_j bezeichnen.

Ist γ so, dass

$$b_j = a_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n-1),$$

so nennen wir γ einen $(n-)$ **Pfad** mit **Anfangspunkt** a_1 und **Endpunkt** b_n sowie

$$\gamma_- := ((\gamma_{n-j+1})_-)_{j=1}^n$$

den **Umkehrpfad** von γ . Ist zudem $b_n = a_1$, d. h. stimmen Anfangs- und Endpunkt überein, so sprechen wir von einer $(n-)$ **Schleife**. Für $a, b, c \in G$ ist etwa

$$\gamma_{a,b,c} := (s_a^b, s_b^c, s_c^a)$$

eine 3-Schleife und $\text{Sp } \gamma_{a,b,c}$ das Dreieck mit Ecken a, b, c .

Mit dem folgenden Satz schließen wir an den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung für Wegintegrale an. Existiert eine Stammfunktion zu f auf einem Gebiet G , so gilt $\int_{\gamma} f = 0$ nach (3.1) für alle Schleifen γ in G . Bemerkenswerterweise gilt auch die Umkehrung:

Satz 3.10 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Gilt*

$$\int_{\gamma} f = 0,$$

für alle Schleifen $\gamma \in G$, so existiert eine Stammfunktion F zu f in G . Ist G sternförmig bzgl. a und gilt nur $\int_{\gamma_{a,b,c}} f = 0$ für $b, c \in G$, so ist eine Stammfunktion durch $z \mapsto \int_a^z f$ gegeben.

Beweis. Es sei $a \in G$ gegeben. Nach Satz A.9 ist G Pfadzusammenhängend. Bezeichnet $\gamma(z)$ einen beliebigen Pfad in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt z , so ist durch

$$F(z) := \int_{\gamma(z)} f \quad (z \in G)$$

eine Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Man beachte dabei: Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Wahl des Weges $\gamma(z)$, denn ist γ_2 ein weiterer solcher Pfad, so ist $\gamma := (\gamma(z), (\gamma_2)_-)$ eine Schleife und damit gilt nach Voraussetzung

$$0 = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma(z)} f - \int_{\gamma_2} f.$$

Ist $z \in G$ und $U_r(z) \subset G$, so gilt für $|h| < r$ und die Schleife $\gamma := (\gamma(z), s_z^{z+h}, \gamma(z+h)_-)$

$$0 = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma(z)} f + \int_z^{z+h} f - \int_{\gamma(z+h)} f = F(z) + \int_z^{z+h} f - F(z+h).$$

Also folgt $F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f$ und damit

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \max_{[z, z+h]} |f - f(z)| \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$. Also ist F differenzierbar an z mit $F'(z) = f(z)$. Da $z \in G$ beliebig war, ist F eine Stammfunktion zu f . Ist G sternförmig bzgl. a , so kann man $\gamma(z) = s_a^z$ wählen. Dann geht die Argumentation genauso. \square

Im Weiteren verwenden wir, dass jede offene Menge in \mathbb{C} in (Zusammenhangs-)Komponenten zerfällt und dass diese Gebiete sind. Außerdem hat bei kompakten Mengen $K \subset \mathbb{C}$ die offene Menge $\mathbb{C} \setminus K$ genau eine unbeschränkte Komponente (siehe Anhang Topologie). Im ersten Abschnitt haben wir Cauchyintegrale auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$ untersucht. Nun betrachten wir allgemeinere Cauchyintegrale.

Bemerkung und Definition 3.11 Es seien $\gamma \in (\Gamma\mathbb{C})^n$ und $f : \text{Sp } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt die Funktion $C_\gamma f : \mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$(C_\gamma f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma)$$

Cauchyintegral von f bezüglich γ . Insbesondere ist damit $C_\sigma f = Cf$ und allgemeiner

$$(C_{a+\rho\sigma} f)(z) = C(f \circ (a + \rho\sigma))((z - a)/\rho) \quad (z \notin a + \rho\mathbb{S}).$$

Mit Differentiation von Parameterintegralen (Satz B.1) sieht man, dass $C_\gamma f$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$ ist. Außerdem gilt

$$|(C_\gamma f)(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\text{Sp } \gamma} |f| \cdot L(\gamma) / \text{dist}(z, \text{Sp } \gamma) \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow \infty). \quad (3.2)$$

Nach (2.2) gilt für $a \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$

$$(C_{a+\rho\sigma}1)(z) = \begin{cases} 1, & z \in U_\rho(a) \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus B_\rho(a) \end{cases}. \quad (3.3)$$

Allgemeiner ergibt sich

Satz 3.12 *Ist γ eine Schleife, so ist $(C_\gamma 1)(\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma) \subset \mathbb{Z}$.*

Beweis. 1. Es sei zunächst $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ein C^1 -Weg. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$ definieren wir $\varphi = \varphi_z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(t) := \exp\left(\int_{\gamma|_{[\alpha, t]}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = \exp\left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right) \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Mit der Kettenregel und dem Hauptsatz über Integralfunktionen ergibt sich

$$\varphi' = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z}$$

auf $[\alpha, \beta]$. Nach der Quotientenregel ist damit

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma - z}\right)' = \frac{\varphi'(\gamma - z) - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} = 0$$

auf $[\alpha, \beta]$. Also existiert eine Konstante c mit $\varphi(t) = c(\gamma(t) - z)$ für $t \in [\alpha, \beta]$. Aus $\varphi(\alpha) = 1$ ergibt sich $c = 1/(\gamma(\alpha) - z)$, also insbesondere

$$\exp(2\pi i (C_\gamma 1)(z)) = \varphi(\beta) = \frac{\gamma(\beta) - z}{\gamma(\alpha) - z}.$$

2. Nun seien $\gamma = (\gamma_j)_{j=1}^n$ eine Schleife und $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$. Sind a_j, b_j die Anfangs- bzw. Endpunkte von γ_j und sind $\varphi_j = \varphi_{j,z}$ wie in 1. mit γ_j statt γ , so gilt

$$\exp(2\pi i (C_\gamma 1)(z)) = \prod_{j=1}^n \exp(2\pi i (C_{\gamma_j} 1)(z)) = \prod_{j=1}^n \frac{b_j - z}{a_j - z} = 1.$$

Damit ist $(C_\gamma 1)(z) \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkung und Definition 3.13 Es seien I eine endliche Menge und $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ so, dass jedes γ_ι eine Schleife ist.³¹ Dann nennt man γ einen **Zyklus** und die nach Satz 3.12 ganze Zahl

$$\text{ind}(\gamma, z) := (C_\gamma 1)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Index oder auch **Windungszahl** von z bezüglich γ . Sind γ ein Zyklus und C eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$, so ist C ein Gebiet in \mathbb{C} . Da $\text{ind}(\gamma, \cdot)$ stetig und ganzzahlig auf C ist, ist $\text{ind}(\gamma, \cdot)$ konstant auf C nach Satz A.5. Aus (3.2) ergibt sich zudem $\text{ind}(\gamma, \cdot) = 0$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$.

³¹Ist γ_ι eine n_ι -Schleife, so ist $\gamma \in (\Gamma\mathbb{C})^n$ mit $n = \sum_{\iota \in I} n_\iota$.

Definition 3.14 Es sei γ ein Zyklus. Dann heißt

$$\text{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma : \text{ind}(\gamma, z) \neq 0\}$$

Inneres von γ und

$$\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma : \text{ind}(\gamma, z) = 0\}$$

Äußeres von γ . Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein Zyklus in Ω , so heißt γ **nullhomolog** in Ω oder **Ω -nullhomolog**, falls $\text{ind}(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ ist, das heißt, falls $\Omega^c \subset \text{Ext}(\gamma)$ gilt.

Das folgende Ergebnis wird im Beweis des anschließenden Cauchytheorems eingesetzt.

Satz 3.15 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar. Ist g wie in Bemerkung 1.22, so ist D_1g (existent und) stetig auf $X \times X$.*

Beweis. Da Differenzierbarkeit und Stetigkeit lokale Eigenschaften sind, können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass X konvex ist (dann ist $[u, v] \subset X$ für alle $u, v \in X$). Ist $(x, y) \in X \times X$ mit $y \neq x$, so gilt mit der Quotientenregel und dem Taylor-Satz

$$D_1g(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2} (f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)) = \int_0^1 (1-t) f''(x+t(y-x)) dt.$$

Insbesondere ist D_1g stetig an (x, y) .

Es sei nun $a \in X$. Aus der Stetigkeit von f'' an a und $\int_0^1 (1-t) dt = 1/2$ ergibt sich

$$\int_0^1 (1-t) f''(x+t(y-x)) dt \rightarrow \frac{f''(a)}{2} \quad ((x, y) \rightarrow (a, a)).$$

Ist $x \in X$ und $0 \neq h \in X - x$, so folgt

$$\frac{1}{h} (g(x+h, x) - g(x, x)) = \frac{1}{h^2} (f(x+h) - f(x) - f'(x)h) = \int_0^1 (1-t) f''(x+th) dt \rightarrow \frac{f''(x)}{2}$$

für $h \rightarrow 0$. Dies zeigt zunächst $D_1g(x, x) = f''(x)/2$ und dann auch die Stetigkeit von D_1g an (a, a) . \square

Satz 3.16 (Cauchytheorem)

Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein Zyklus in Ω . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) γ ist Ω -nullhomolog.
- b) Für alle $f \in H(\Omega)$ ist

$$f(z) \cdot \text{ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in \Omega \setminus \text{Sp } \gamma).$$

c) Für alle $f \in H(\Omega)$ ist $\int_{\gamma} f = 0$.

Beweis. a) \Rightarrow b) Es seien $f \in H(\Omega)$ und g wie in Satz 3.15. Da g stetig ist, ist durch

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, \zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} g(z, \zeta) d\zeta \quad (z \in \Omega)$$

eine Funktion $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Da auch $D_1 g$ stetig ist, ist Φ nach Satz B.1 holomorph in Ω . Für $z \in \Omega \setminus \text{Sp } \gamma$ gilt

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = (C_{\gamma} f)(z) - f(z) \text{ind}(\gamma, z).$$

Also reicht es, $\Phi = 0$ zu zeigen.

Zunächst ist $C_{\gamma} f$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } \gamma$ nach Bemerkung 3.11 mit

$$(C_{\gamma} f)(z) \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow \infty).$$

Weiter ist nach Voraussetzung $\partial\Omega \subset \Omega^c \subset \text{Ext}(\gamma)$. Wegen $\Phi(z) = (C_{\gamma} f)(z)$ für $z \in \Omega \cap \text{Ext}(\gamma)$ ist durch

$$F(z) := \begin{cases} \Phi(z), & z \in \Omega \\ (C_{\gamma} f)(z), & z \in \Omega^c \end{cases}$$

eine ganze Funktion F definiert. Aus $F(z) = (C_{\gamma} f)(z)$ für $z \in \text{Ext}(\gamma)$ ergibt sich zudem $F(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$. Mit dem Satz von Liouville folgt, dass F konstant = 0 ist. Also gilt für alle $z \in \Omega$

$$\Phi(z) = F(z) = 0.$$

b) \Rightarrow c) Es seien $f \in H(\Omega)$ und $a \in \Omega \setminus \text{Sp } \gamma$. Dann gilt mit b), angewandt auf $f_a : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_a(z) = (z - a)f(z)$,

$$0 = 2\pi i f_a(a) \cdot \text{ind}(\gamma, a) = \int_{\gamma} \frac{f_a(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \int_{\gamma} f.$$

c) \Rightarrow a) Folgt aus $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z} \in H(\Omega)$ für alle $z \notin \Omega$. □

Bemerkung 3.17 Sind $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ, τ Zyklen in Ω mit

$$\text{ind}(\gamma, \cdot)|_{\mathbb{C} \setminus \Omega} = \text{ind}(\tau, \cdot)|_{\mathbb{C} \setminus \Omega},$$

so ist (γ, τ_-) ³² nullhomolog in Ω und damit nach c) aus dem Cauchytheorem

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tau} f \quad (f \in H(\Omega)).$$

³²wobei natürlich $\tau_- := ((\tau_i)_-)$ falls $\tau = (\tau_i)$

4 Anwendungen des Cauchytheorems

Wir betrachten nun Gebiete, bei denen die Situation hinsichtlich Nullhomologie besonders vorteilhaft ist.

Bemerkung und Definition 4.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Ist γ ein Zyklus in Ω , so wird $\text{ind}(\gamma, \cdot)$ mit $\text{ind}(\gamma, \infty) := 0$ zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ mit ganzzahligen Werten und insbesondere konstant mit Wert 0 auf der Komponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, die ∞ enthält.³³ Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ zusammenhängend ist. Ist allgemeiner $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ zusammenhängend, so nennen wir Ω einfach **einfach**.³⁴ Dann ist jeder Zyklus in Ω nullhomolog in Ω .

Nach dem Cauchytheorem gilt für einfache Ω und beliebige Zyklen γ in Ω ³⁵

$$\int_\gamma f = 0 \quad (f \in H(\Omega)) \quad (4.1)$$

und die **Cauchysche Integralformel**

$$f(z) \cdot \text{ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (f \in H(\Omega), z \in \Omega \setminus \text{Sp}\gamma).$$

Satz 4.2 *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so hat jede Funktion $f \in H(G)$ eine Stammfunktion in G .*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.10 und (4.1). \square

Wir befassen uns mit der Frage nach der Existenz von Logarithmen und allgemeinen Potenzen in \mathbb{C} . Im Rahmen der Einführung elementarer Funktionen definiert man die reelle Logarithmusfunktion als Umkehrung der reellen Exponentialfunktion. Die Tatsache, dass die Exponentialfunktion im Komplexen nicht mehr injektiv ist, deutet an, dass die Situation hier komplizierter wird.

Bemerkung und Definition 4.3 Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$ nullstellenfrei. Eine Funktion $g \in H(G)$ mit $e^g = f$ in G heißt ein **Zweig des Logarithmus** von f in G und für $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $e^{g/m}$ dann ein **Zweig der m -ten Wurzel** von f in G (man beachte: es gilt $(e^{g/m})^m = e^g = f$). Ist g ein Zweig des Logarithmus, so ist g eine Stammfunktion zu f'/f . Umgekehrt gilt: Ist h eine Stammfunktion zu f'/f , so ist $g = h + b$ für eine geeignete Konstante $b \in \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus von f in G .

³³Hier ist der metrische Raum $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$.

³⁴Oft findet man als Definition, dass Ω keine Löcher, d. h. in \mathbb{C} beschränkte Komponenten hat oder auch, dass jede Scheibe zu einem Punkt deformiert werden kann (Null-Homotopie). Tatsächlich sind die Bedingungen äquivalent, was allerdings nicht so leicht zu sehen ist.

³⁵Die Aussage wird auch als Cauchyscher Integralsatz bezeichnet

Denn: Wegen $(fe^{-h})' = f'e^{-h} + fe^{-h}(-h') = 0$ existiert eine Konstante $c \neq 0$ mit $f(z) = ce^{h(z)}$ für alle $z \in G$. Ist $c = e^b$, so ist $g := h + b$ passend.

Im Fall einfach zusammenhängender G existieren daher nach Satz 4.2 Zweige des Logarithmus von f in G und damit auch m -te Wurzeln von f .

Ist g ein Zweig des Logarithmus in G , so ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auch g_k mit

$$g_k(z) = g(z) + 2\pi ik \quad (z \in G)$$

ein Zweig des Logarithmus von f . Sind andererseits $g, h \in C(G)$ mit $e^g = e^h$, so gilt $e^{g-h} = 1$ in G . Damit existiert zu jedem $z \in G$ ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(z) := (g(z) - h(z))/(2\pi i) = k$. Da G zusammenhängend und φ stetig auf G ist, ist φ konstant auf G nach Satz A.5, das heißt, es existiert ein (von z unabhängiges) $k \in \mathbb{Z}$ mit $h = g + 2\pi ik$. Insbesondere ist ein Zweig durch einen vorgegebenem Wert an einer Stelle $a \in G$ eindeutig festgelegt.

Beispiel 4.4 Da die geschlitzte Ebene

$$\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

einfach zusammenhängend ist, existieren nach Bemerkung 4.3 ein Zweig g des Logarithmus von $f(z) = z$ auf G . Ist $z \in \mathbb{C}^-$, so existiert genau ein $\theta \in (-\pi, \pi)$ mit $z = |z|e^{i\theta}$. Man nennt $\arg(z) := \theta$ dann das **Argument** von z . Da die Abbildung $h : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(z) := \ln |z| + i \arg(z) \in \mathbb{C}$$

stetig ist ([Ü]) mit

$$e^{h(z)} = |z|e^{i \arg(z)} = z \quad (z \in \mathbb{C}^-),$$

folgt $h = g + 2\pi ik$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ aus Bemerkung und Definition 4.3. Insbesondere ist $h \in H(G)$ auch ein Zweig. Für $z = r > 0$ ergibt sich $h(r) = \ln r$, das heißt, h setzt den reellen Logarithmus $r \mapsto \ln r$ holomorph auf \mathbb{C}^- fort. Man nennt h den **Hauptzweig des Logarithmus** (von z) in \mathbb{C}^- und schreibt auch

$$\log z := h(z) \quad (z \in \mathbb{C}^-).$$

Wegen $(f'/f)(z) = 1/z$ ist \log eine Stammfunktion zu $z \mapsto 1/z$ auf \mathbb{C}^- und wieder nach Bemerkung und Definition 4.3 haben alle weiteren Zweige die Form

$$g_k(z) = \log z + 2k\pi i = \ln |z| + i(\arg(z) + 2k\pi)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Da \mathbb{C}^- sogar sternförmig bzgl. 1 ist, gilt schließlich

$$\log(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (z \in \mathbb{C}^-),$$

da die rechte Seite Stammfunktion zu $z \mapsto 1/z$ ist mit Wert 0 an 1.

Wie sieht es mit der Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)$$

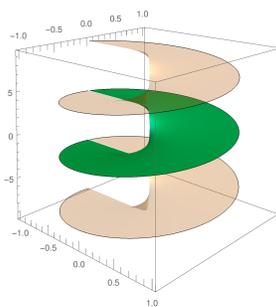


Abbildung 5: Imaginärteile dreier Zweige des Logarithmus mit $z \mapsto \arg(z) = \text{Im}(\log(z))$ in grün.

für $z, w \in \mathbb{C}^-$ aus? Ist $\arg(z) + \arg(w) \in (-\pi, \pi)$, so ist $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ und damit auch

$$\log(zw) = \log z + \log w.$$

Ist jedoch etwa $\arg(z) + \arg(w) > \pi$, so ist $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) - 2\pi$, also

$$\log(zw) = \log z + \log w - 2\pi i.$$

Es kommt also ein Korrekturterm $2\pi i$ hinzu.³⁶

Bemerkung und Definition 4.5 Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so setzen wir

$$z^\alpha := e^{\alpha \cdot \log z} \quad (z \in \mathbb{C}^-).$$

Die Funktion $z \mapsto z^\alpha$ ist holomorph in \mathbb{C}^- mit Ableitung $z \mapsto \alpha z^{\alpha-1}$ und für $z \in \mathbb{C}^-$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta.$$

Allerdings haben die oben angedeuteten Probleme mit der Funktionalgleichung des Logarithmus zur Folge, dass für $z, w \in \mathbb{C}^-$ im Allgemeinen *nicht* $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha$ gilt.³⁷

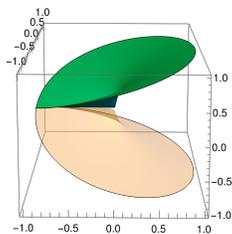


Abbildung 6: Realteile zweier Zweige der Wurzel von z mit Hauptzweig in grün

³⁶Ist $\arg(z) + \arg(w) = \pi$, so ist $\log(zw)$ noch nicht einmal definiert.

³⁷Man sieht also, dass ein zu sorgloser Umgang mit komplexen Logarithmen und Potenzen leicht zu Fehlschlüssen führen kann.

Ist speziell $\alpha = 1/m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, so schreibt man für $z \in \mathbb{C}^-$ auch $\sqrt[m]{z}$ anstelle von $z^{1/m}$, und im Fall $m = 2$ auch kurz \sqrt{z} . Die Funktion $z \mapsto \sqrt[m]{z}$ heißt **Hauptzweig der m -ten Wurzel** von z in \mathbb{C}^- und für $m = 2$ kurz **Hauptzweig der Wurzel** von z in \mathbb{C}^- .

Wir kehren zurück zum Residuenkalkül.

Satz 4.6 (Residuensatz für nullhomologe Zyklen)

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein G -nullhomologer Zyklus. Ist f meromorph in G mit $\text{Sp } \gamma \cap P(f) = \emptyset$, so ist $P(f) \cap \text{Int}(\gamma)$ endlich und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = \sum_{a \in P(f)} \text{ind}(\gamma, a) \cdot \text{res}(f, a). \quad (4.2)$$

Beweis. Zunächst sei $P(f)$ endlich. Weiter seien p_a wie in Satz 2.14. Da nach Beispiel 3.6

$$\int_{\gamma} (1/(\zeta - a))^k d\zeta = 0 \quad (1 < k \in \mathbb{N})$$

gilt, ergibt sich für $a \in P(f)$

$$\int_{\gamma} p_a(1/(\zeta - a)) d\zeta = 2\pi i \text{ind}(\gamma, a) \cdot \text{res}(f, a).$$

Es sei nun $\varphi \in H(G)$ wie in Bemerkung 2.15. Da γ nullhomolog in G ist, folgt $\int_{\gamma} \varphi = 0$ aus dem Cauchytheorem. Folglich ist

$$\int_{\gamma} f = \sum_{a \in P(f)} \int_{\gamma} p_a(1/(\zeta - a)) d\zeta = 2\pi i \sum_{a \in P(f)} \text{ind}(\gamma, a) \cdot \text{res}(f, a).$$

Hat f unendlich viele Polstellen, so ist $P(f) \cap \text{Int}(\gamma)$ endlich, da $\text{Int}(\gamma) \cup \text{Sp } \gamma$ kompakt und $P(f)$ diskret ist. Wir setzen $G_{\gamma} := G \setminus (P(f) \cap \text{Ext}(\gamma))$. Dann ist γ auch G_{γ} -nullhomolog. Anwendung des ersten Teils mit G_{γ} statt G ergibt die Behauptung \square

Bemerkung 4.7 Wir heben verschiedene Spezialfälle hervor.

1. Im Falle $P(f) = \emptyset$, also f holomorph in G , ergibt (4.2) wieder (4.1).
2. Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gilt (4.2) für alle Zyklen γ in G .
3. (Argumentprinzip, allgemein) Ist $f \in M_*(G)$, so ist auch $f'/f \in M_*(G)$ mit einfachen Polen an allen $a \in A(f) = P(f) \cup Z(f)$ und $\text{res}(f'/f, a) = \text{ord}(f, a)$. Also ergibt sich für alle G -nullhomologen γ mit der Kettenregel und (4.2)

$$\text{ind}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f'/f = \sum_{a \in A(f)} \text{ind}(\gamma, a) \cdot \text{ord}(f, a).$$

Wir werden nun sehen, dass man den Residuensatz unter anderem dafür nutzen kann, uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f$ zu berechnen.

Bemerkung und Definition 4.8 Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Existiert der Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f$, so heißt der Grenzwert **Cauchyscher Hauptwert** des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f$. Aus der Definition uneigentlicher Integrale folgt: Existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f$, so existiert der Cauchysche Hauptwert und die beiden Werte stimmen überein. Aus der Existenz des Cauchyschen Hauptwertes folgt umgekehrt natürlich im Allgemeinen noch nicht die Existenz des uneigentlichen Integrals (man betrachte etwa $f(t) = t$ für $t \in \mathbb{R}$). Existieren ein $\alpha > 1$ und ein $\rho > 0$ mit

$$\sup_{|t| \geq \rho} |t|^\alpha |f(t)| < \infty, \quad (4.3)$$

so folgt aus der Existenz des Integrals $\int_1^\infty t^{-\alpha} dt$ die absolute Integrierbarkeit von f auf \mathbb{R} . Insbesondere existiert dann das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f$ und stimmt mit dem Cauchyschen Hauptwert überein.

Bemerkung 4.9 Für $R > 0$ seien $\tau := \sigma|_{[0, \pi]}$ und

$$\gamma_R := (s_{-R}^R, R\tau).$$

Dann ist γ_R eine Schleife mit $\text{ind}(\gamma_R, z) = 1$ für $z \in U_R(z) \cap \mathbb{H}$ ($\ddot{\mathbb{U}}$), wobei

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$$

die offene obere Halbebene bezeichnet.

Satz 4.10 Es sei f meromorph in G für ein Gebiet $G \supset \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$. Zudem sei $P(f) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $P(f) \cap \mathbb{H}$ endlich.

1. Existiert $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R\tau} f$, so existiert der Cauchysche Hauptwert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f$ und es gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f = 2\pi i \left(\sum_{a \in P(f) \cap \mathbb{H}} \text{res}(f, a) \right) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R\tau} f.$$

2. Existieren ein $\alpha > 1$ und ein $\rho > 0$ mit

$$\sup_{R \geq \rho} R^\alpha \max_{\text{Sp } R\tau} |f| < \infty,$$

so ist f absolut integrierbar auf \mathbb{R} mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = 2\pi i \sum_{a \in P(f) \cap \mathbb{H}} \text{res}(f, a).$$

Beweis. 1. Es sei $\rho > 0$ so, dass $P(f) \cap \mathbb{H} \subset U_\rho(0)$. Aus dem Residuensatz und Bemerkung 4.9 folgt wegen $G^c \subset \text{Ext}(\gamma_R)$

$$\int_{\gamma_R} f = 2\pi i \sum_{a \in P(f) \cap \mathbb{H}} \text{res}(f, a)$$

für alle $R \geq \rho$, also auch

$$\int_{-R}^R f = \int_{\gamma_R} f - \int_{R\tau} f = 2\pi i \left(\sum_{a \in P(f) \cap \mathbb{H}} \text{res}(f, a) \right) - \int_{R\tau} f$$

und damit die Behauptung für $R \rightarrow \infty$.

2. Ohne Einschränkung sei ρ so, dass $P(f) \cap \mathbb{H} \subset U_\rho(0)$. Nach Voraussetzung existiert ein $M > 0$ mit

$$\max_{\text{Sp } R\tau} |f| \leq MR^{-\alpha}$$

für $R \geq \rho$. Insbesondere gilt dann (4.3) und damit ist f absolut integrierbar. Außerdem gilt für $R \geq \rho$

$$\left| \int_{R\tau} f \right| \leq \max_{\text{Sp } R\tau} |f| \cdot L(R\tau) \leq \pi MR^{1-\alpha} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Damit ergibt sich 2. aus 1. □

Bemerkung und Definition 4.11 Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf \mathbb{R} , so heißt $\widehat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\widehat{g}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

Fourier-Transformierte von g . Ist $g = p/q$ eine rationale Funktion mit $P(g) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$, so ist $z^2 g(z)$ beschränkt bei ∞ . Ist $\omega \geq 0$, so gilt zudem

$$|e^{i\omega z}| = e^{-\omega \text{Im}(z)} \leq 1$$

für $z \in \mathbb{R} \cup \mathbb{H}$. Also ist Satz 4.10.2 für $\omega \geq 0$ auf die in \mathbb{C} meromorphe Funktion

$$f_\omega(z) := e^{i\omega z} g(z)$$

anwendbar und somit

$$\widehat{g}(\omega) = 2\pi i \sum_{a \in P(f_\omega) \cap \mathbb{H}} \text{res}(f, a).$$

Beispiel 4.12 Es sei $g(z) = 1/(1+z^2)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Man beachte, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t)/(1+t^2) dt = 0$$

gilt, da der Integrand ungerade ist. Also ist nach Bemerkung 4.11

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+t^2} dt = \widehat{g}(\omega) = 2\pi i \operatorname{res}(f, i).$$

Weiter ist mit (2.6)

$$\operatorname{res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{i\omega z}}{z+i} = \frac{e^{-\omega}}{2i},$$

also gilt, hier aus Symmetriegründen sogar für $\omega \in \mathbb{R}$,³⁸

$$\widehat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$$

Insbesondere zeigt dies, wie sich im Fall $\omega = 0$ die Kreiszahl

$$\pi = \widehat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

aus dem Residuum von $z \mapsto 1/(1+z^2)$ an der Stelle i (und damit als ein Kreisintegral) ergibt. Man sieht den Wert π in Abbildung 4 als Sprunghöhe des Realteils des komplexen Arkustangens an den Stellen $\pm i$.

Bemerkung und Definition 4.13 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Ist $U_\delta(a) \subset \Omega$, so ist

$$f_\rho := C_{a+\rho\sigma} f = C(f \circ (a + \rho\sigma))((\cdot - a)/\rho)$$

für $0 < \rho < \delta$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus (a + \rho\mathbb{S})$. Wie in Bemerkung 1.9 sieht man ([Ü]), dass

$$f_\rho(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f, a)(z-a)^k, & |z-a| < \rho \\ -\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(f, a)(z-a)^{-k}, & |z-a| > \rho \end{cases},$$

wobei nach Bemerkung (3.17), angewandt auf $f/(\cdot - a)^{k+1}$,

$$c_k(f, a) := \frac{1}{\rho^k} \int f(a + \rho\tau) \overline{\tau}^k dm(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\rho\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta$$

für $k \in \mathbb{Z}$ unabhängig von $0 < \rho < \delta$ ist.

Sind nun $0 < r < R < \delta$, so ist der Zyklus $(a + R\sigma, (a + r\sigma)_-)$ hullhomolog in $\Omega \setminus \{a\}$. Also gilt nach dem Cauchytheorem für den offenen Kreisring $U_{R,r}(a) := U_R(a) \setminus B_r(a)$

$$f|_{U_{R,r}(a)} = (f_R - f_r)|_{U_{R,r}(a)}.$$

Insgesamt ergibt sich damit die **Laurententwicklung** von f bzgl. a

$$f(z) = \varphi_a(z) + g_a(1/(z-a)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f, a)(z-a)^k \quad (0 < |z-a| < \delta)$$

³⁸In der Sprache der Statistik ist \widehat{g} bis auf Normierung die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung

mit

$$\varphi_a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f, a)(z - a)^k \quad \text{und} \quad g_a(w) := \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(f, a)w^k.$$

Dabei ist φ_a , genannt **Nebenteil** der Laurententwicklung, holomorph in $U_\delta(a)$ und g_a , genannt **Hauptteil**, eine ganze Funktion. Damit ist a eine wesentliche Singularität von f genau dann, wenn g_a kein Polynom ist³⁹ (vgl. Satz 2.14). Definiert man – in Erweiterung der bisherigen Situation – das **Residuum** von f an a durch

$$\text{res}(f, a) := c_{-1}(f, a),$$

so gilt der Residuensatz auch in entsprechend erweiterter Form.

³⁹man spricht dann auch von einer transzendenten ganzen Funktion g_a

5 Konforme Abbildungen und normale Familien

Wir untersuchen holomorphe bzw. meromorphe Bijektionen zwischen zwei Gebieten.

Bemerkung und Definition 5.1 Es seien $G \subset \mathbb{C}_\infty$ ein Gebiet und $f \in M_*(G)$. Dann nennt man f (lokal) **konform** an der Stelle $a \in G \cap \mathbb{C}$, falls $f'(a) \neq 0$ oder $(1/f)'(a) \neq 0$ (in Falle eines Pols a) gilt. An ∞ heißt f konform, falls $z \mapsto f(1/z)$ an 0 konform ist. Ist f konform an a , so bildet f nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung U von a bijektiv auf eine offene Umgebung V von $f(a)$ ab, wobei f konform an allen $z \in U$ und die auf V definierte Umkehrfunktion konform an allen Bildpunkten ist.⁴⁰

Es sei nun D ein weiteres Gebiet in \mathbb{C}_∞ . Eine bijektive meromorphe Funktion $\varphi : G \rightarrow D$ nennt man **konforme Abbildung** von G auf D , falls φ an allen Stellen konform ist. Man kann zeigen ([Ü]), dass eine auf einer Umgebung von a injektive holomorphe Funktion f schon $f'(a) \neq 0$ erfüllt. Daher sind bijektive meromorphe Funktionen stets konform an allen Stellen. Nach dem Umkehrsatz ist auch $\varphi^{-1} : D \rightarrow G$ eine konforme Abbildung. Die Gebiete G, D heißen **konform äquivalent**, falls eine konforme Abbildung $\varphi : G \rightarrow D$ existiert.⁴¹ Ist $D = G$, so nennt man φ einen (konformen) **Automorphismus** von G . Wir setzen

$$\text{Aut}(G) := \{\varphi : G \rightarrow G \text{ konform}\}.$$

Dann ist $(\text{Aut}(G), \circ)$ eine Gruppe, die **Automorphismengruppe** von G .

Bemerkung 5.2 Jede Möbius-Transformation φ_A ist ein konformer Automorphismus der Sphäre \mathbb{C}_∞ .⁴² Ist φ_A eine affin-lineare Abbildung

$$\varphi_{a,b}(z) := az + b \quad (z \in \mathbb{C}),$$

wobei $0 \neq a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C}$, so ist $\varphi_{a,b}$ ein konformer Automorphismus von \mathbb{C} . Man kann zeigen, dass damit alle konformen Automorphismen von \mathbb{C} gegeben sind ([Ü]). Ist $a \in \mathbb{S}$, also $a = e^{i\theta}$ für ein $\theta \in [0, 2\pi)$, so beschreibt $\varphi_\theta := \varphi_{a,0}$ eine Drehung um den Winkel θ . Insbesondere ist $\varphi_\theta|_{\rho\mathbb{D}} \in \text{Aut}(\rho\mathbb{D})$ für beliebige $\rho > 0$.

Satz 5.3

1. Für $\alpha \in \mathbb{D}$ definiert die Möbius-Transformation

$$\varphi(z) := \varphi_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ und $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$.

⁴⁰Unter allgemeineren Bedingungen ist lokale Konformität einer Abbildung definiert als Winkeltreue an einer Stelle a (siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Konforme_Abbildung). Man kann zeigen, dass C^1 -Funktionen auf offen Teilmengen von \mathbb{R}^2 genau dann winkeltreu an allen a sind, wenn sie holomorph sind und die (komplexe) Ableitung an a nicht verschwindet.

⁴¹Nach der Kettenregel ist dadurch tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete in \mathbb{C}_∞ definiert.

⁴²Man kann sogar zeigen, dass die Gruppe der Möbius-Transformation bereits die gesamte Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ ist.

2. Für $\beta \in \mathbb{H}$ definiert die Möbius-Transformation

$$\varphi(z) := \varphi_\beta(z) := \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}$$

eine konforme Abbildung $\varphi_\beta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $\varphi_\beta(\beta) = 0$ und

$$\varphi_\beta^{-1}(w) = \frac{\beta - \bar{\beta}w}{1 - w} \quad (w \in \mathbb{D}).$$

Beweis. Wir 1. Es gilt für $|z| = 1$

$$|z - \alpha| = |z| \cdot |1 - \alpha\bar{z}| = |1 - \bar{\alpha}z|,$$

also $|\varphi(z)| = 1$, das heißt $\varphi(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$. Weiter ist nach Bemerkung 2.4

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{w + \alpha}{1 + \bar{\alpha}w} = \varphi_{-\alpha}(w) \quad (w \in \mathbb{D}),$$

also von der gleichen Form. Damit ist auch $\varphi^{-1}(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$ und folglich $\varphi(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$. Hieraus folgt wiederum $\varphi(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S}) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S}$. Da Bilder zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen zusammenhängend sind, ergibt sich $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $\varphi(\mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\mathbb{D}}$ und damit auch $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x - \beta| = |x - \bar{\beta}|$, das heißt $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$. Außerdem ist $\varphi(\infty) = 1$, also $\varphi(\mathbb{R}_\infty) \subset \mathbb{S}$, wobei $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da $\varphi(\mathbb{R}_\infty)$ zusammenhängend ist und $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 1$ gilt, folgt $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$. Aus $\varphi(\beta) = 0 \in \mathbb{D}$ ergibt sich wie in 1. damit auch $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. \square

Beispiel 5.4 (Cayley-Transformation) Durch

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i} \quad (z \in \mathbb{H})$$

ist eine konforme Abbildung von \mathbb{H} auf \mathbb{D} definiert. Dabei gilt $\varphi(i) = 0$ und

$$\varphi^{-1}(w) = i \cdot \frac{1 + w}{1 - w} \quad (w \in \mathbb{D}).$$

Also ist $\mathbb{D} \ni w \mapsto (1 + w)/(1 - w)$ eine konforme Abbildung von \mathbb{D} auf die rechte Halbebene $-i\mathbb{H}$.

Alle bisher betrachteten konformen Abbildungen waren Möbius-Transformationen. Wir kommen zu weiteren wichtigen Beispielen

Beispiel 5.5

1. Die Funktion $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) := \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)^2 - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k \quad (z \in \mathbb{D}).$$

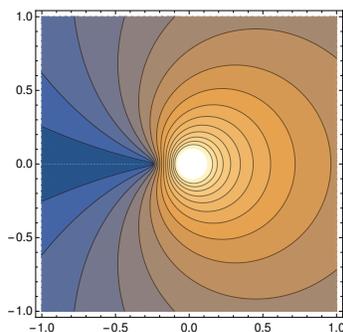


Abbildung 7: Bilder von Kreisringen unter der Koebe-Funktion.

heißt **Koebe-Funktion**. Da $w \mapsto w^2$ die rechte Halbebene $-i\mathbb{H}$ konform auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ abbildet, sieht man mit Beispiel 5.4, dass φ eine konforme Abbildung von \mathbb{D} auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ mit $\varphi(0) = 0$ darstellt.

2. Die **Joukowski-Abbildung** $j : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mit

$$j(z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (z \in \mathbb{C}_\infty),$$

eingeschränkt auf $G := \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$, ist eine konforme Abbildung von G nach $D := \mathbb{C}_\infty \setminus [-1, 1]$ ([Ü]).

3. Die Einschränkung der Exponentialfunktion auf $G := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \pi\}$ ist eine konforme Abbildung nach $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit Umkehrabbildung \log , also dem Hauptzweig des Logarithmus von z .

Man kann sich fragen, wie reichhaltig die Menge der konformen Abbildungen φ von G nach \mathbb{D} ist, die bei gegebenem $a \in G$ die Normierung $\varphi(a) = 0$ erfüllen. Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ ist auch

$$\psi = e^{i\theta} \varphi$$

eine konforme Abbildung von G auf \mathbb{D} mit $\psi(a) = 0$. Wegen $\psi' = e^{i\theta} \varphi'$ kann man φ insbesondere so wählen, dass $\varphi'(a) > 0$ ist. Wir zeigen mithilfe des Schwarzschen Lemmas, dass φ durch diese Forderung eindeutig festgelegt ist. Zur Formulierung setzen wir für $f \in H(\rho\mathbb{D})$ und $0 \leq r < \rho$

$$M(r, f) := \max_{r\mathbb{S}} |f|.$$

Dann ist $M(r, f) = \max_{B_r(0)} |f|$ nach dem Maximumprinzip, also insbesondere $r \mapsto M(r, f)$ monoton wachsend.

Satz 5.6 (Schwarzsches Lemma)

Es sei $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Dann ist $M(r, f) \leq r$ für $0 < r < 1$ und $|f'(0)| \leq 1$. Außerdem folgt aus Gleichheit in einer der beiden Ungleichungen, dass f eine Drehung ist, das heißt, es existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = e^{i\theta} z$ für $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. Aus $f(0) = 0$ folgt, dass $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & \text{falls } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

holomorph in \mathbb{D} ist. Es sei $0 \leq r < 1$ gegeben. Dann gilt für $r < s < 1$

$$M(r, g) \leq M(s, g) = M(s, f)/s \leq 1/s \rightarrow 1 \quad (s \rightarrow 1^-).$$

Also ist $M(r, g) \leq 1$ und damit $M(r, f) = rM(r, g) \leq r$ sowie $|f'(0)| \leq 1$.

Ist $M(r, f) = r$ für ein r mit $0 < r < 1$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ ein Maximum in \mathbb{D} . Nach dem Maximumprinzip ist dann g konstant $= c$ mit $|c| = 1$. Damit ist f eine Drehung. \square

Satz 5.7 *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$. Sind φ und ψ konforme Abbildungen von G nach \mathbb{D} mit $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, so existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\psi = e^{i\theta}\varphi$. Insbesondere ist φ durch die Zusatzforderung $\varphi'(a) > 0$ eindeutig festgelegt.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\sigma := \psi \circ \varphi^{-1}$ eine konforme Abbildung von \mathbb{D} auf \mathbb{D} mit $\sigma(0) = 0$. Also gilt nach dem Schwarzschen Lemma, angewandt auf die Funktionen σ^{-1} und σ ,

$$|z| = |\sigma^{-1}(\sigma(z))| \leq |\sigma(z)| \leq |z| \quad (z \in \mathbb{D})$$

und damit $|\sigma(z)| = |z|$. Wieder nach dem Schwarzschen Lemma existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\psi = e^{i\theta}\varphi$. \square

Beispiel 5.8 Es sei $\alpha \in \mathbb{D}$. Nach Satz 5.3.1 und Satz 5.7 ist $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ konform mit $\varphi(\alpha) = 0$ genau dann, wenn φ die Form

$$\varphi(z) = \varphi_{\alpha, \theta}(z) := e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

für ein $\theta \in \mathbb{R}$ hat. Also ist $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{\varphi_{\alpha, \theta} : \alpha \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}\}$. Entsprechend sieht man, dass durch $e^{i\theta}\varphi_{\beta}$ mit φ_{β} wie in Satz 5.3.2 sämtliche konformen Abbildungen von \mathbb{H} nach \mathbb{D} gegeben sind.

Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph, so ist f nach dem Satz von Liouville bereits konstant. Damit existiert insbesondere keine konforme Abbildung von \mathbb{C} auf \mathbb{D} , das heißt, \mathbb{C} und \mathbb{D} sind nicht konform äquivalent. Wir zeigen im Weiteren, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe \mathbb{D} ist. Dies erfordert eine Reihe von (weiteren) Hilfsmitteln.

Wir zeigen zunächst, dass die Räume $H(\Omega)$ und $M(\Omega)$ so metrisiert werden können, dass ein vollständiger Raum entsteht und dass Konvergenz in der Metrik lokal gleichmäßige Konvergenz ist.

Bemerkung 5.9 Es sei (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist für kompakte metrische Räume (K, d') auf $C(K, S)$ durch

$$d_K(f, g) := d_{K,S}(f, g) := \max_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

eine vollständige Metrik definiert.⁴³ Konvergenz einer Folge bezüglich d_K bedeutet gleichmäßige Konvergenz. Im Fall $S = \mathbb{C}$ mit der Betragsmetrik ist d_K die von der Maximumnorm induzierte Metrik $d_K(f, g) = \max_K |f - g|$ (vgl. Bemerkung 1.24).

Bemerkung und Definition 5.10 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, $\Omega \neq \mathbb{C}_\infty$.⁴⁴ Für

$$K_m := K_m(\Omega) := \{z \in \Omega : \text{dist}_\chi(z, \partial\Omega) \geq 1/m\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

gilt

- $K_m \subset \Omega$ ist kompakt mit $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$.
- Für alle $K \subset \Omega$ kompakt ist $K \subset K_m$ für m genügend groß.

Wir nennen (K_m) die **Standardausschöpfung** von Ω . Ist nun (S, d) ein vollständiger metrischer Raum, so definieren wir für $f, g \in C(\Omega, S)$ mit $d_\emptyset(f, g) := 0$

$$d_\Omega(f, g) := d_{\Omega,S}(f, g) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \min\{1/m, d_{K_m}(f, g)\} \quad (\leq 1).$$

Man kann leicht nachrechnen, dass d_Ω eine Metrik auf $C(\Omega, S)$ ist.

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(\Omega, S)$ ist d_Ω -Cauchyfolge bzw. d_Ω -konvergent genau dann, wenn für alle kompakten $K \subset \Omega$ die Folge $(f_n|_K)$ eine d_K -Cauchyfolge bzw. d_K -konvergent ist.

Denn: Es seien (f_n) eine d_Ω -Cauchyfolge und $K \subset \Omega$ kompakt. Wir wählen $M = M_K \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_M$. Ist $0 < \varepsilon < 1/M$ und $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d_\Omega(f_n, f_{n'}) < \varepsilon$ für $n, n' \geq N$, so ist auch

$$d_K(f_n, f_{n'}) \leq d_{K_M}(f_n, f_{n'}) = \min\{1/M, d_{K_M}(f_n, f_{n'})\} < \varepsilon$$

für $n, n' \geq N$. Andererseits sei $(f_n|_K)$ für alle kompakten $K \subset \Omega$ eine d_K -Cauchyfolge. Ist $\varepsilon > 0$, so gilt

$$\sup_{m > \lfloor 1/\varepsilon \rfloor} \min\{1/m, d_{K_m}(f_n, f_{n'})\} < \varepsilon \quad (n, n' \in \mathbb{N}).$$

Weiter existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d_{K_{\lfloor 1/\varepsilon \rfloor}}(f_n, f_{n'}) < \varepsilon$ für $n, n' \geq N$. Damit ist auch $\max_{1 \leq m \leq \lfloor 1/\varepsilon \rfloor} d_{K_m}(f_n, f_{n'}) < \varepsilon$ für $n, n' \geq N$, also $d_\Omega(f, f_n) < \varepsilon$ für $n, n' \geq N$.

Die Aussage für Konvergenz statt Cauchy-Eigenschaft ergibt sich genauso durch Hinzufügen von $f_\infty := \lim f_n$.

⁴³siehe etwa Bem. 9.9 in https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_Analysis_1617.pdf.

⁴⁴Im Fall $\Omega = \mathbb{C}_\infty$ setzen wir $K_m := \mathbb{C}_\infty$ für alle m .

Satz 5.11 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen und (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der metrische Raum $(C(\Omega, S), d_\Omega)$ vollständig.*

Beweis. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine d_Ω -Cauchyfolge, so existiert nach Bemerkung 5.9 für alle kompakten, nichtleeren $K \subset \Omega$ eine stetige Funktion $f_K : K \rightarrow S$ mit $f_n \rightarrow f_K$ ($n \rightarrow \infty$) gleichmäßig auf K . Durch $f(z) := f_K(z)$, falls $z \in K$, ist damit eine Grenzfunktion $f \in C(\Omega, S)$ definiert. \square

Bemerkung 5.12 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Nach Bemerkung 1.27 ist $H(\Omega)$ abgeschlossen in $(C(\Omega), d_\Omega)$. Da $(C(\Omega), d_\Omega)$ vollständig ist, ist auch $(H(\Omega), d_\Omega)$ als metrischer Raum vollständig.⁴⁵

Bemerkung und Definition 5.13 Es seien (S, d) ein vollständiger metrischer Raum und (X, d') ein metrischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X, S)$ heißt **gleichgradig stetig** an der Stelle $a \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle x mit $d'(x, a) < \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Ist \mathcal{F} gleichgradig stetig an allen $a \in X$, so heißt \mathcal{F} kurz gleichgradig stetig.

Ist (K, d') kompakt und ist $\mathcal{F} \subset C(K, S)$ relativ kompakt, d. h. jede Folge in \mathcal{F} hat eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, so ist \mathcal{F} gleichgradig stetig ([Ü]). Der in seiner Bedeutung für die Analysis kaum zu überschätzende Satz von Arzelà-Ascoli (Satz C.4) besagt, dass im Fall kompakter S auch die Umkehrung gilt!

Ist (f_n) eine Folge in $C(K, S)$ mit $f_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$ in $C(K, S)$, so ist $\mathcal{F} := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt.

Denn: Ist (g_k) eine Folge in \mathcal{F} , so existieren $k_n \in \mathbb{N}$ mit $g_k = f_{k_n}$. Ist (k_n) beschränkt, so existieren ein $N \in \mathbb{N}$ und eine unendliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ mit $k = k_N$ für $k \in I$. Dann gilt $g_k = f_{k_N} \rightarrow f_{k_N}$ für $I \ni k \rightarrow \infty$. Ist (k_n) unbeschränkt, so hat (k_n) eine streng wachsende Teilfolge $(k_n)_{n \in J}$ mit $k_n \rightarrow \infty$. Ist $I = \{k_n : n \in J\}$ so gilt $g_k = f_{k_n} \rightarrow f$ für $I \ni k \rightarrow \infty$.

Definition 5.14 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen und (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega, S)$ heißt **normal**, falls \mathcal{F} relativ kompakt in $(C(\Omega, S), d_\Omega)$ ist. Für $a \in \Omega$ nennen wir \mathcal{F} **normal an a** , falls eine offene Umgebung U von a so existiert, dass $\mathcal{F}|_U$ normal ist. Um Normalität einer Familie in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ von Normalität in $C(\Omega)$ zu unterscheiden, nennen wir im zweiten Fall die Familie auch **norm-normal**.

Beispiel 5.15 Es seien $f_n(z) = z^n$ für $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{F} := \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\mathbb{C}) \subset C(\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty).$$

⁴⁵Ist $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, so kann man durch einige Zusatzüberlegungen zeigen, dass auch $M(\Omega)$ abgeschlossen in $(C(\Omega, \mathbb{C}_\infty), d_\Omega)$ ist, also ebenfalls als metrischer Raum vollständig ist.

Hier gilt $f_n(z) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ lokal gleichmäßig auf \mathbb{D} und $f_n(z) \rightarrow \infty$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ([Ü]). Insbesondere sind $\mathcal{F}|_{\mathbb{D}}$ norm-normal und $\mathcal{F}|_{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}}$ normal. Allerdings ist \mathcal{F} an keiner Stelle in $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ norm-normal.

Satz 5.16 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, (S, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{F} \subset C(\Omega, S)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a) \mathcal{F} ist normal.
- b) \mathcal{F} ist normal an allen Stellen a .
- c) \mathcal{F} ist gleichgradig stetig.

Beweis. a) \Rightarrow b) ist klar.

b) \Rightarrow c): Es seien $a \in \Omega$ und U eine offene Umgebung von a so, dass $\mathcal{F}|_U$ normal ist. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{F} , so existiert eine auf U lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_n)_{n \in I}$. Ist $r > 0$ mit $K := B_r(a) \subset U$, so konvergiert $(f_n)_{n \in I}$ auf K gleichmäßig. Also ist $\mathcal{F}|_K$ relativ kompakt in $C(K, S)$ und damit \mathcal{F} gleichgradig stetig an a .

c) \Rightarrow a): Es sei (K_m) die Standardausschöpfung von Ω . Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $\mathcal{F}|_{K_m}$ für jedes m relativ kompakt. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{F} , so ergibt sich mit $I_0 := \mathbb{N}$ induktiv, dass zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n)_{n \in I_m}$ von $(f_n)_{n \in I_{m-1}}$ existiert, die gleichmäßig auf K_m konvergiert. Definiert man $n_0 := 1$ und wählt $n_j > n_{j-1}$ mit $n_j \in I_j$, so konvergiert die Folge $(f_{n_j})_j$ gleichmäßig auf allen K_m und damit auch gleichmäßig auf allen kompakten Mengen $K \subset \Omega$. \square

Bemerkung und Definition 5.17 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ heißt **beschränkt** an $a \in \Omega$, wenn ein $r > 0$ so existiert, dass $\mathcal{F}|_{B_r(a)}$ beschränkt im Raum $(C(B_r(a)), \|\cdot\|_{B_r(a)})$ ist, also

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \max_{B_r(a)} |f| < \infty$$

gilt, und kurz (lokal) beschränkt, falls dies für alle a gilt. In dem Fall ist $\mathcal{F}|_K$ für jede kompakte Teilmenge K von Ω beschränkt in $(C(K), \|\cdot\|_K)$. Man sieht leicht ([Ü]): Ist $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ norm-normal, so ist \mathcal{F} beschränkt.

Der Schrankensatz zeigt, dass die Verzerrung einer differenzierbaren Funktionen auf Strecken durch den Betrag der Ableitung abgeschätzt werden kann. Umgekehrt ergibt sich für holomorphe Funktionen aus der Cauchyschen Ungleichung und der Cauchyschen Integralformel auch eine Abschätzung der Ableitung durch die Funktion selbst. Dies führt zu

Satz 5.18 (Montel)

*Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so ist $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ genau dann norm-normal, wenn \mathcal{F} beschränkt ist.*⁴⁶

⁴⁶Man hat also in $H(\Omega)$ eine dem Satz von Bolzano-Weierstraß entsprechende Aussage.

Beweis. Nach Bemerkung und Definition 5.17 ist nur \Leftarrow zu zeigen. Dazu seien $a \in \Omega$, $r > 0$ mit $B_r(a) \subset \Omega$ und $R := \sup_{f \in \mathcal{F}} \max_{B_r(a)} |f|$. Anwendung der allgemeinen Cauchyschen Ungleichung (1.6) in Verbindung mit der Cauchyschen Integralformel auf $g(w) = f(a + rw)$ ergibt

$$\max_{B_{r/2}(a)} |f'| \leq 4r^{-1} \max_{B_r(a)} |f| \leq 4r^{-1} R.$$

Nach dem Schrankensatz ist⁴⁷

$$|f(z) - f(a)| \leq \max_{[a,z]} |f'| \cdot |z - a| \leq 4r^{-1} R |z - a| \quad (f \in \mathcal{F}, z \in B_{r/2}(a)).$$

Damit ist \mathcal{F} gleichgradig stetig an a . Da a beliebig war, ist \mathcal{F} gleichgradig stetig. Nach Satz 5.16, angewandt auf $(S, d) = (B_R(0), d_{|\cdot|})$, ist $\mathcal{F}|_{U_r(a)}$ norm-normal. \square

Bemerkung 5.19 Es seien G ein Gebiet und $f \in H(G)$ injektiv. Existiert eine Wurzel g aus f , also eine Funktion $g \in H(G)$ mit $g^2 = f$, so ist g injektiv mit $g(G) \cap (-g(G)) \subset \{0\}$.

Denn: Ist $g(z_1) = \pm g(z_2)$, so ist $f(z_1) = g^2(z_1) = g^2(z_2) = f(z_2)$, also $z_1 = z_2$.

Damit ist g injektiv und aus $0 \neq w \in g(G)$ folgt $-w \notin g(G)$.

Satz 5.20 (Riemannscher Abbildungssatz)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft, dass jede auf G injektive und nullstellenfreie holomorphe Funktion eine Wurzel hat. Dann existiert zu jedem $a \in G$ genau eine konforme Abbildung φ von G auf \mathbb{D} mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi'(a) > 0$. Insbesondere sind G und \mathbb{D} konform äquivalent.

Beweis. Aus Satz 5.7 folgt, dass höchstens eine konforme Abbildung $\varphi : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi'(a) > 0$ existiert. Es reicht also, die Existenz zu zeigen, und zwar ohne die Forderung $\varphi'(a) > 0$.

1. Wir zeigen: Es existiert eine injektive holomorphe Funktion $\psi : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit $\psi(a) = 0$. Dazu sei $\zeta \in \mathbb{C} \setminus G$. Nach Voraussetzung existiert eine Wurzel g von $z \mapsto z - \zeta$ auf G . Da $g(G)$ offen ist, existieren ein $c \in g(G)$ und ein $r > 0$ mit $B_r(c) \subset g(G) \setminus \{0\}$. Nach Bemerkung 5.19 ist g injektiv mit $B_r(-c) \cap g(G) = \emptyset$. Ist $h := r/(g + c)$, so ist $h \in H(G)$ injektiv und $h(G) \subset \mathbb{D}$. Ist φ_α die Möbius-Transformation aus Satz 5.3.1 mit $\alpha := h(a)$, so ist $\psi := \varphi_\alpha \circ h$ passend.

2. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{\psi \in H(G) : \psi(G) \subset \mathbb{D}, \psi(a) = 0, \psi \text{ injektiv oder } \psi = 0\}.$$

Nach 1. ist $\mathcal{F} \neq \{0\}$. Nach Definition ist \mathcal{F} (lokal) beschränkt in $H(G)$, also also nach dem Satz von Montel norm-normal. Außerdem ist \mathcal{F} nach dem Satz von Hurwitz eine

⁴⁷ $[a, b] := \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$ bezeichnet die Strecke zwischen a und b

abgeschlossene Teilmenge von $H(G)$ und damit *kompakt*. Wir betrachten die Abbildung $\ell : H(G) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\ell(\psi) = |\psi'(a)| \quad (\psi \in H(G)).$$

Nach Bemerkung 1.27 ist ℓ stetig. Also wird ℓ maximal auf \mathcal{F} , das heißt, es existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}$ mit

$$|\varphi'(a)| \geq |\psi'(a)| \quad (\psi \in \mathcal{F}).$$

3. Wir zeigen, dass $\varphi(G) = \mathbb{D}$ gilt. Dann sind wir fertig. Dafür reicht es, zu zeigen: Ist $\psi \in \mathcal{F}$ mit $\psi(G) \neq \mathbb{D}$, so existiert ein $\psi_1 \in \mathcal{F}$ mit

$$|\psi_1'(a)| > |\psi'(a)|.$$

Es sei dazu $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \psi(G)$. Sind wieder φ_α wie in Satz 5.3.1, so ist $\varphi_\zeta \circ \psi \in H(G)$ injektiv und $(\varphi_\zeta \circ \psi)(G) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Nach Voraussetzung existiert eine Wurzel g aus $\varphi_\zeta \circ \psi$ und nach Bemerkung 5.19 ist g injektiv. Ist $\psi_1 := \varphi_\gamma \circ g$, wobei $\gamma = g(a)$, so folgt $\psi_1 \in \mathcal{F}$ und wegen $\varphi_{-\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}$

$$\psi = \varphi_{-\zeta} \circ g^2 = \varphi_{-\zeta} \circ (\varphi_{-\gamma})^2 \circ \psi_1.$$

Ist $h := \varphi_{-\zeta} \circ (\varphi_{-\gamma})^2$, so gilt $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ mit

$$h(0) = \varphi_{-\zeta}(g^2(a)) = \psi(a) = 0$$

und h ist *nicht injektiv*. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $|h'(0)| < 1$. Wegen $\psi_1(a) = 0$ ergibt sich mit der Kettenregel $|\psi'(a)| = |h'(0)| \cdot |\psi_1'(a)| < |\psi_1'(a)|$. \square

Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so hat nach Bemerkung und Definition 4.3 jede auf G nullstellenfreie holomorphe Funktion eine Wurzel. Also gilt die Aussage des Riemannschen Abbildungssatzes im Fall $G \neq \mathbb{C}$. Wir wollen abschließend zeigen, dass Gebiete in \mathbb{C} , die konform auf \mathbb{D} abgebildet werden können, notwendig einfach zusammenhängend sind. Dazu benötigen wir

Satz 5.21 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gilt*

1. *Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so existiert ein Ω -nullhomologer Zyklus γ mit $K \cap \text{Sp } \gamma = \emptyset$ und $\text{ind}(\gamma, \cdot)|_K = 1$.*
2. *Ist jeder Zyklus in Ω nullhomolog in Ω , so ist Ω einfach.*

Beweis. 1. Es seien $0 < d < \text{dist}(K, \partial\Omega)/\sqrt{2}$ und Q_1, \dots, Q_N die Quadrate⁴⁸ der Seitenlänge d mit Ecken in $d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$, die K treffen⁴⁹. Für $n \in \{1, \dots, N\}$ gilt $\text{diam}(Q_n) = d\sqrt{2}$ und damit $B_{d\sqrt{2}}(z) \subset \Omega$ für $z \in Q_n \cap K$, also $Q_n \subset \Omega$. Wir setzen

$$L := \bigcup_{n=1}^N Q_n.$$

⁴⁸also die konvexe Hülle der Ecken

⁴⁹Sind A, B Mengen, so sagen wir, dass A die Menge B trifft, falls $A \cap B$ nichtleer ist.

Dann gilt $K \subset L$ und $K \cap \partial L = \emptyset$. Also ist insgesamt $K \subset L^\circ \subset L \subset \Omega$.

Ist Q ein beliebiges Quadrat mit Ecken a, b, c, d (positiv orientiert), so ist $\partial Q = \text{Sp } \gamma_Q$, wobei $\gamma_Q := (s_a^b, s_b^c, s_c^d, s_d^a)$ eine Schleife ist. Dabei gilt ([Ü])

$$\text{ind}(\gamma_Q, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in Q^\circ \\ 0, & \text{falls } z \notin Q \end{cases}.$$

Wir betrachten nun diejenigen, in entsprechender Weise orientierten Seiten der Quadrate Q_n , deren Spur zum Rand ∂L von L gehört, und bezeichnen das resultierende Tupel mit $\gamma = (\gamma_\iota)_{\iota \in I}$. Dann ist

$$\text{Sp } \gamma = \bigcup_{\iota \in I} \text{Sp } \gamma_\iota = \partial L \subset \Omega \setminus K$$

und $\gamma_\iota = s_{a_\iota}^{b_\iota}$ für gewisse $a_\iota, b_\iota \in d\mathbb{Z} + id\mathbb{Z}$ mit $|b_\iota - a_\iota| = d$. Aus der Konstruktion der γ_ι ergibt sich, dass für eine geeignete Zerlegung $(I_\kappa)_{\kappa \in M}$ von I die Tupel $(\gamma_\iota)_{\iota \in I_\kappa}$ Schleifen sind (also ist γ ein Zyklus) und dass

$$\text{ind}(\gamma, z) = \sum_{\iota \in I} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\iota} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^N \text{ind}(\gamma_{Q_n}, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in \bigcup_{n=1}^N Q_n^\circ \\ 0, & \text{falls } z \notin L \end{cases}$$

gilt (wichtig: die auf der linken Seite „fehlenden“ Strecken werden je zweimal in entgegengesetzter Orientierung durchlaufen und damit entfallen die entsprechenden Integrale). Aus Stetigkeitsgründen gilt $\text{ind}(\gamma, z) = 1$ auch für beliebiges $z \in L^\circ$ und damit insbesondere für alle $z \in K$.

2. Angenommen, $M := \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ ist nicht zusammenhängend. Dann existieren zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen $K, L \subset M$ mit $M = L \cup K$. Da M abgeschlossen in \mathbb{C}_∞ ist, sind auch K, L abgeschlossen in \mathbb{C}_∞ . Ohne Einschränkung sei $\infty \in L$. Ist $U := \mathbb{C} \setminus L$, so ist U offen in \mathbb{C} und $K \subset U$ kompakt. Nach 1. existiert ein Zyklus γ in $U \setminus K = \Omega$ mit $\text{ind}(\gamma, K) = \{1\}$. Damit ist γ nicht Ω -nullhomolog. Widerspruch \square

Satz 5.22 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- G ist einfach zusammenhängend.
- Für jedes $f \in H(G)$ und jede Schleife γ in G gilt $\int_\gamma f = 0$.
- Jede Funktion in $H(G)$ hat eine Stammfunktion.
- Jede nullstellenfreie Funktion in $H(G)$ hat einen Logarithmus.
- Jede nullstellenfreie Funktion in $H(G)$ hat eine Wurzel.
- $G = \mathbb{C}$ oder G ist konform äquivalent zu \mathbb{D} .
- Jeder Zyklus in G ist G -nullhomolog.

Beweis. a) \Rightarrow b) folgt aus Bemerkung und Definition 4.1, b) \Rightarrow c) aus Satz 3.10, c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) aus Bemerkung und Definition 4.3, e) \Rightarrow f) aus dem Riemannsches Abbildungssatz und g) \Rightarrow a) aus Satz 5.21. Also ist noch f) \Rightarrow g) zu zeigen.

Dazu seien γ ein Zyklus in G und $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Nach Voraussetzung existiert eine konforme Abbildung $\varphi : G \rightarrow \mathbb{D}$. Wir schreiben $\psi := \varphi^{-1}$. Dann ist $\tau := \psi \circ \gamma$ ein Zyklus in \mathbb{D} . Da \mathbb{D} einfach zusammenhängend ist, ist τ nullhomolog in \mathbb{D} , und da $\psi' / (\psi - a)$ holomorph in \mathbb{D} ist, folgt mit dem Cauchytheorem und der Kettenregel

$$2\pi i \operatorname{ind}(\gamma, a) = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \int_{\tau} \frac{\psi'}{\psi - a} = 0.$$

Damit ist $a \in \operatorname{Ext}(\gamma)$.

□

A Etwas Topologie

Wir stellen hier einige Ergebnisse aus der Topologie zusammen.

Bemerkung und Definition A.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Man sieht leicht ([Ü]), dass eine Teilmenge von M genau dann offen in (M, d_M) ist, wenn sie von der Form $U \cap M$ für eine in (X, d) offene Menge U ist. Also ergibt sich aus Definition 1.3, dass $M \subset X$ genau dann unzusammenhängend ist, wenn offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap V \cap M = \emptyset$. Man kann leicht zeigen ([Ü]), dass dies äquivalent dazu ist, dass M zerlegt werden kann in zwei nichtleere Mengen A, B mit $\bar{A} \cap B = \emptyset$ und $\bar{B} \cap A = \emptyset$.

Bemerkung A.2 Sind X, Y metrische Räume, ist X zusammenhängend und ist $f : X \rightarrow Y$ lokal konstant, so ist f konstant.

Denn: Es sei $c \in f(X)$. Dann ist $A := \{x : f(x) = c\}$ nichtleer, abgeschlossen (da f stetig ist) und offen (da f lokal konstant ist). Also ist $A = X$.

Satz A.3 Eine nichtleere Teilmenge M von \mathbb{R} ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

Beweis. \Rightarrow : Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < c < b$ und $a, b \in M, c \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, c)$ und $V := (c, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \cap V \cap M = \emptyset,$$

also ist M unzusammenhängend.

\Leftarrow : Angenommen, M ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen U, V in \mathbb{R} mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap V \cap M = \emptyset$.

Es seien $a \in U \cap M$, $b \in V \cap M$. Dann ist $a \neq b$ (und dann ohne Einschränkung $a < b$). Da M ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subset M$. Wir setzen $\xi := \sup(U \cap [a, b])$. Da U offen ist, gilt $\xi > a$. Angenommen, es ist $\xi \in V$. Da V offen ist, existiert dann ein $a < c < \xi$ mit $(c, \xi] \subset V$. Nach Definition des Supremums ist $(c, \xi] \cap U \neq \emptyset$ und damit auch $U \cap V \cap M \neq \emptyset$. Widerspruch. Damit gilt $\xi \notin V$. Da $M \subset U \cup V$ ist, folgt $\xi \in U$. Da U offen und $\xi < b$ ist, widerspricht dies der Definition von ξ . \square

Der folgende Satz zeigt, dass sich der Zusammenhang einer Menge unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz A.4 Es seien (X, d) , (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis. Es sei $B \subset f(X)$ offen und abgeschlossen. Dann existieren eine in (Y, d_Y) offene Menge U und eine in (Y, d_Y) abgeschlossene Menge A mit $B = U \cap f(X) = A \cap f(X)$. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $f^{-1}(B) = f^{-1}(U) = f^{-1}(A)$ offen und abgeschlossen in (X, d) ist. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(B) = \emptyset$ oder $f^{-1}(B) = X$. Im ersten Fall ist $B = \emptyset$ und im zweiten gilt $f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, also $B = f(X)$. Damit ist $f(X)$ zusammenhängend. \square

Als Konsequenz aus Satz A.3 und Satz A.4 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz A.5 *Es sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ ein Intervall.*

Beweis. Nach Satz A.4 ist $f(X)$ zusammenhängend, also nach Satz A.3 ein Intervall. \square

Bemerkung A.6 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Sind A_α ($\alpha \in I$) zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.

Denn: Wir setzen $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \neq \emptyset$ sowie $A \cap V \neq \emptyset$. Ist $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. Ohne Einschränkung sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $A_\alpha \cap V \neq \emptyset$. Aus $x \in A_\alpha \cap U$ folgt auch $A_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Da A_α zusammenhängend ist, folgt $A_\alpha \cap U \cap V \neq \emptyset$. Damit ist auch $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Bemerkung und Definition A.7 Nach Satz A.3 ist $G \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Gebiet, wenn G ein offenes Intervall ist. Da Strecken $[u, v] \subset \mathbb{C}$ nach den Sätzen A.3 und A.4 zusammenhängend sind, sind sternförmige offene Mengen $X \subset \mathbb{C}$ nach Bemerkung A.6 zusammenhängend, also Gebiete (falls nichtleer).

Bemerkung und Definition A.8 Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Dann heißt M **pfadzusammenhängend**, falls zu allen Punkten $x, y \in M$ ein Pfad γ in M existiert mit Anfangspunkt x und Endpunkt y .

Satz A.9 *Es sei $M \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. *Ist M pfadzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*
2. *Ist M offen und zusammenhängend, so ist M auch pfadzusammenhängend.*

Beweis. 1. Es sei $a \in M$ fest. Dann existiert zu jedem $z \in M$ ein Pfad $\gamma(z)$ in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt z . Damit ist $M = \bigcup_{z \in M} \gamma(z)^*$. Da $\gamma(z)^*$ zusammenhängend ist und $a \in \bigcap_{z \in M} \gamma(z)^*$ gilt, ist M nach Bemerkung A.6 zusammenhängend.

2. Es seien $a \in M$ fest und A die Menge aller $z \in M$ so, dass ein Pfad $\gamma(z)$ in M existiert mit Endpunkt z und Anfangspunkt a . Ist $z \in A$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subset M$. Ist $w \in U_\delta(z)$, so ist $(\gamma(z), s_z^w)$ ein Pfad in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt w . Also ist A offen in M . Die gleiche Überlegung liefert auch die Abgeschlossenheit von A in M . Da $A \neq \emptyset$ ist (beachte: $a \in A$), folgt $A = M$. \square

Bemerkung und Definition A.10 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ heißt

$$G(x) = G_X(x) := \bigcup \{A \subset X : x \in A \text{ und } A \text{ zusammenhängend}\}$$

Zusammenhangskomponente oder kurz **Komponente** von X bezüglich x . Nach Bemerkung A.6 ist $G(x)$ zusammenhängend. Außerdem gilt für $x, y \in X$ entweder $G(x) = G(y)$ oder $G(x) \cap G(y) = \emptyset$. Also ist $(G(x))_{x \in X}$ eine Zerlegung von X in maximale zusammenhängende Teilmengen. Jede Komponente von X ist abgeschlossen und offen in X ($[\ddot{U}]$). Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so ist jede Komponente von X auch offen in \mathbb{K} , also ein Gebiet in \mathbb{K} .

B Parameterintegrale

Es seien $X \subset \mathbb{K}$ offen, $M \subset \mathbb{R}$ und $\varphi : X \times M \rightarrow \mathbb{C}$. Sind die Funktionen $\phi_t : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\phi_t(x) := \varphi(x, t) \quad (x \in X)$$

für alle $t \in M$ differenzierbar auf X , so definieren wir $D_1\varphi : X \times M \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(D_1\varphi)(x, t) := (\phi_t)'(x) \quad ((x, t) \in X \times M).$$

Satz B.1 (Parameterintegrale)

Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Weiter sei $\varphi : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ist $\Phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\Phi(x) := \int_a^b \varphi(x, t) dt \quad (x \in X),$$

so gilt:

1. Ist X offen oder abgeschlossen, so ist Φ stetig.
2. Ist X offen und ist $D_1\varphi : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist Φ stetig differenzierbar mit

$$\Phi'(x) = \int_a^b D_1\varphi(x, t) dt \quad (x \in X).$$

Beweis. Es sei $x \in X$ fest. Ist X offen, so wählen wir $r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset X$, und ist X abgeschlossen, so wählen wir $r > 0$ beliebig. Dann ist $K := B_r(x) \cap X$ kompakt.

1. Da $K \times I \subset \mathbb{K} \times \mathbb{R}$ kompakt ist, ist φ gleichmäßig stetig auf $K \times I$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $0 < \delta (\leq r)$ so, dass

$$|\varphi(x+h, t) - \varphi(x, t)| < \varepsilon \quad (|h| < \delta, t \in I).$$

Dann ist für $|h| < \delta$

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| = \left| \int_a^b \varphi(x+h, t) - \varphi(x, t) dt \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

Also ist Φ stetig an der Stelle x .

2. Wir setzen für $t \in I$

$$\psi_t(h) := \varphi(x+h, t) - D_1\varphi(x, t) \cdot h \quad (|h| < r).$$

Da $D_1\varphi$ stetig ist, ist ψ_t stetig differenzierbar auf $U_r(0)$, und damit gilt mit dem Taylorsatz

$$\varphi(x+h, t) - \varphi(x, t) - D_1\varphi(x, t) \cdot h = \psi_t(h) - \psi_t(0) = h \int_0^1 \psi_t'(s) ds \quad (|h| < r).$$

Nun sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $D_1\varphi$ stetig auf $K \times I$ ist mit $\psi'_t(0) = 0$, existiert wie in 1. ein $\delta > 0$ so, dass $|\psi'_t(u)| < \varepsilon$ für $|u| < \delta$ und $t \in I$. Hieraus folgt

$$|\psi_t(h) - \psi_t(0)| < \varepsilon|h| \quad (|h| < \delta, t \in I)$$

und damit für $|h| < \delta$

$$\left| \int_{\gamma} \varphi(x+h, t) - \varphi(x, t) - D_1\varphi(x, t) \cdot h \, dt \right| \leq \varepsilon|h|(b-a).$$

Also ergibt sich für $0 < |h| < \delta$

$$\left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \int_{\gamma} D_1\varphi(x, t) dt \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist Φ differenzierbar an x mit $\Phi'(x) = \int_{\gamma} D_1\varphi(x, t) dt$. \square

C Kompaktheit

Bemerkung und Definition C.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt X

1. **folgenkompakt** oder kurz **kompakt**, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat.
2. **präkompakt** oder auch **total beschränkt**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F \subset X$ mit $X = \bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x)$ existiert.

Weiter heißt $M \subset X$ **kompakt** bzw. **präkompakt**, falls $(M, d|_{M \times M})$ kompakt bzw. präkompakt ist. Schließlich heißt M **relativ kompakt**, falls jede Folge in M eine in X konvergente Teilfolge besitzt. Ist M relativ kompakt, so ist eine Folge (a_n) in M schon dann konvergent, wenn alle *konvergenten* Teilfolgen den gleichen Grenzwert haben. Weiter ist M relativ kompakt genau dann, wenn \overline{M} kompakt ist und außerdem ist jede kompakte Teilmenge abgeschlossen in X .

Schießlich verwenden wir noch, dass X genau dann (folgen-)kompakt ist, wenn X überdeckungskompakt ist, d. h. für jedes System \mathcal{U} offener Mengen mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ existiert eine endliches Teilsystem \mathcal{E} mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$.⁵⁰

Da Cauchyfolgen mit konvergenter Teilfolge konvergieren, sind kompakte Räume vollständig. Präziser gilt

Satz C.2 *Ein metrischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.*

Beweis. \Rightarrow Angenommen, es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $X \neq \bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x)$ für alle endlichen Mengen $F \subset X$. Wir definieren induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X so, dass $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für alle j, k mit $j \neq k$ gilt. Dazu wählen wir $x_1 \in X$ beliebig und nehmen an, dass wir $x_1, \dots, x_n \in M$ mit $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für $j, k = 1, \dots, n, j \neq k$ bereits definiert haben. Nach Annahme existiert dann ein $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(x_j)$. Mit $x_{n+1} := x$ ist also $d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ für $j = 1, \dots, n$. Damit ist (x_n) wie gewünscht. Die Folge (x_n) hat keine konvergente Teilfolge, also Widerspruch.

\Leftarrow Da X präkompakt ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $F_n \subset X$ mit

$$X = \bigcup_{y \in F_n} U_{1/n}(y).$$

Es sei $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Da F_1 endlich ist, existiert ein $y_1 \in F_1$ so, dass

$$I_1 := \{j \in \mathbb{N} : x_j \in U_1(y_1)\}$$

unendlich ist. Entsprechend existiert ein $y_2 \in F_2$ so, dass

$$I_2 := \{j \in I_1 : x_j \in U_{1/2}(y_2)\}$$

⁵⁰siehe etwa J. Müller, Konzepte der Funktionentheorie, Springer Spektrum, 2018, Satz 6.17.

unendlich ist. Induktiv erhält man auf diese Weise eine Folge (y_n) und eine Folge (I_n) unendlicher Mengen mit $I_{n+1} \subset I_n \subset \mathbb{N}$ mit $x_j \in U_{1/n}(y_n)$ für $j \in I_n$. Setzt man $j_0 := 1$ und wählt für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $j_k \in I_k$ mit $j_k > j_{k-1}$, so ist $j_k \geq k$ und $x_{j_m} \in U_{1/k}(y_k)$ für $m \geq k$, also $d(x_{j_m}, x_{j_{m'}}) < 2/k$ für $m, m' \geq k$ und damit (x_{j_k}) eine Cauchy-Folge in X . Da (X, d) vollständig ist, ist (x_{j_k}) konvergent. \square

Bemerkung C.3 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Als Folgerung aus Satz C.2 ergibt sich: Jede relativ kompakte Teilmenge ist präkompakt und im Fall, dass X vollständig ist, sind relative Kompaktheit und Präkompaktheit äquivalent.

Denn: Ist $M \subset X$ relativ kompakt, so ist \overline{M} kompakt, also auch präkompakt. Ist $\varepsilon > 0$, so existiert eine endliche Menge $F \subset \overline{M}$ mit $\overline{M} \subset \bigcup_{x \in F} U_{\varepsilon/2}(x)$.⁵¹ Wählt man zu $x \in F$ ein $y \in M$ mit $d(x, y) < \varepsilon/2$, so ist $U_\varepsilon(y) \supset U_{\varepsilon/2}(x)$. Damit kann M mit endlich vielen ε -Kugeln mit Mittelpunkten in M überdeckt werden. Ist X vollständig, so ist \overline{M} für alle $M \subset X$ vollständig. Ist dabei M präkompakt, so ist auch \overline{M} präkompakt, also dann auch kompakt.

Satz C.4 (Arzelà-Ascoli)

Sind (S, d) und (K, d') kompakte metrische Räume, so ist $\mathcal{F} \subset C(K, S)$ relativ kompakt genau dann, wenn \mathcal{F} gleichgradig stetig ist.

Beweis. Es reicht, \Leftarrow zu zeigen, und dazu, dass \mathcal{F} präkompakt ist (siehe Bemerkung C.3). Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für jedes $a \in K$ existiert ein $\delta_a = \delta_{a, \varepsilon} > 0$ mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle x mit $d'(x, a) < \delta_a$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Da K kompakt und damit überdeckungskompakt ist (siehe wieder Bemerkung C.3) und da $(U_{\delta_a})_{a \in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, existiert eine endliche Teilmenge E von K mit

$$K = \bigcup_{a \in E} U_{\delta_a}(a).$$

Da (S, d) kompakt ist, ist auch $(C(E, S), d_E) = (\text{Abb}(E, S), d_E)$ kompakt.⁵² Also ist $\mathcal{F}|_E$ präkompakt (da relativ kompakt), das heißt, für eine endliche Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ gilt

$$\mathcal{F}|_E \subset \bigcup_{g \in \mathcal{E}} U_\varepsilon(g|_E).$$

Es sei $f \in \mathcal{F}$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{E}$ mit $f|_E \in U_\varepsilon(g|_E)$. Ist $x \in K$ beliebig, so ist $x \in U_{\delta_a}(a)$ für ein $a \in E$. Für dieses a gilt

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d(g(x), g(a)) < \varepsilon,$$

⁵¹Die Kugeln $U_\delta(x)$ werden hier in X betrachtet.

⁵²siehe etwa Bem. 9.9 in https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_Analysis_1617.pdf.

also

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), g(a)) + d(g(a), g(x)) < 3\varepsilon.$$

Folglich ist $d_K(f, g) < 3\varepsilon$ und damit $\mathcal{F} \subset \bigcup_{g \in \mathcal{E}} U_{3\varepsilon}(g)$.

□