

Jürgen Müller

Einführung in die Funktionalanalysis

Skriptum zur Vorlesung
Wintersemester 2022/2023
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1	Banachräume, Hilberträume und beschränkte Operatoren	3
2	Hauptsätze für Operatoren auf Banachräumen	14
3	Kompaktheit und kompakte Operatoren	22
4	Dualität und Sätze von Hahn-Banach	27
5	Resolvente und Spektrum	33
6	Selbstadjungierte Operatoren	40
7	Zerlegungen kompakter Operatoren	47
8	Sobolev-Räume	52
A	Maße und Integrale	60
B	Zornsches Lemma	63

1 Banachräume, Hilberträume und beschränkte Operatoren

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 1.1 Es sei $X = (X, +, \cdot)$ ein linearer Raum über \mathbb{K} .

1. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ heißt **Halbnorm** (auf X), falls

(i) (**Homogenität**) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (x \in X, \lambda \in \mathbb{K}),$

(ii) (**Dreiecksungleichung**) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in X).$

Gilt zusätzlich $\|x\| > 0$ für alle $x \neq 0$ (**Definitheit**), so heißt $\|\cdot\|$ eine **Norm** (auf X). Der Raum $X = (X, \|\cdot\|)$ heißt entsprechend **halbnormierter Raum** beziehungsweise **normierter Raum**.

2. Sind $A, B \subset X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, so schreiben wir $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ sowie $\lambda A := \{\lambda x : x \in A\}$. Ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf X , so heißt $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ die **Einheitskugel** in X und damit $M \subset X$ **beschränkt**, wenn ein $r > 0$ existiert mit $M \subset rB_X$. Insbesondere ist rB_X beschränkt.

Bemerkung und Definition 1.2 Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist durch

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

eine Metrik auf X definiert (man spricht von der durch die Norm induzierten Metrik). Im Weiteren soll $(X, \|\cdot\|)$ stets – wenn nicht anders gesagt – durch $d_{\|\cdot\|}$ metrisiert sein. Ist die Metrik $d_{\|\cdot\|}$ vollständig, so heißt $X = (X, \|\cdot\|)$ **Banachraum**. Wir verwenden im Weiteren folgende Aussagen ([Ü]): Sind (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, so gilt $A^\circ = \bigcup\{U : U \subset A \text{ offen}\}$ und $\bar{A} = \bigcap\{B : B \supset A \text{ abgeschlossen}\}$. Da beliebige Vereinigungen offener Mengen offen und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, sind insbesondere A° offen und \bar{A} abgeschlossen. In normierten Räumen ist der Abschluss eines Teilraumes wieder ein Teilraum.

Beispiele 1.3 1. Es seien $S \neq \emptyset$ eine Menge, $(E, |\cdot|_E)$ ein normierter Raum und

$$B(S, E) := \{f : S \rightarrow E : f(S) \subset E \text{ beschränkt}\}.$$

Dann ist $(B(S, E), \|\cdot\|_\infty)$ mit

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty, S} := \sup_{t \in S} |f(t)|_E$$

ein normierter Raum und im Falle, dass E ein Banachraum ist, auch ein Banachraum.¹

Für $(E, |\cdot|_E) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ schreiben wir $B(S) := B(S, \mathbb{C})$. Speziell setzen wir

$$\ell_\infty := B(\mathbb{N}) = \{x = (x_n) : \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ beschränkt}\}.$$

¹siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 1.21

2. Es sei $p \in [1, \infty)$. Für $p \in [1, \infty)$ sind $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ mit

$$\ell_p := \{x = (x_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

Banachräume. Ist $I = [a, b]$ mit $a < b$ ein kompaktes Intervall, so ist durch

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (f \in C(I))$$

eine Norm auf $C(I)$ gegeben. Der Raum $(C(I), \|\cdot\|_p)$ ist *kein* Banachraum. Ist jedoch (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, so ist auf $\mathcal{L}_p(\mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar, } \int |f|^p d\mu < \infty\}$ durch

$$\|f\|_p := \|f\|_{p,\mu} := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

eine Halbnorm gegeben (siehe Anhang) und mit $N := \{f \in \mathcal{L}_p(\mu) : f = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}$ wird $L_p(\mu) := \mathcal{L}_p(\mu)/N$ mit $\|[f]\|_p := (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ ein Banachraum.²

Bemerkung 1.4 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt:

1. Ist $\dim(X) < \infty$, so ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.³
2. Ist X ein Banachraum und ist $L \subset X$ ein Teilraum, so ist $(L, \|\cdot\|)$ ein Banachraum genau dann, wenn $L \subset X$ abgeschlossen ist ($[Ü]$).

Bemerkung 1.5 1. Sind (S, d) ein metrischer Raum und $(E, |\cdot|_E)$ ein Banachraum, so setzen wir

$$C(S, E) := \{f : S \rightarrow E, f \text{ stetig}\} \quad \text{und} \quad CB(S, E) := C(S, E) \cap B(S, E).$$

Dann ist $CB(S, E) \subset B(S, E)$ abgeschlossen, also $(CB(S, E), \|\cdot\|_{\infty})$ ein Banachraum.⁴ Ist (S, d) kompakt, so gilt $C(S, E) = CB(S, E)$ (warum?).

2. Die Räume $c := \{(x_n) \in \ell_{\infty} : (x_n) \text{ konvergent}\}$ und $c_0 := \{(x_n) \in \ell_{\infty} : x_n \rightarrow 0\}$ sind abgeschlossene Teilräume von ℓ_{∞} , also Banachräume ($[Ü]$).

Satz 1.6 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:

a) X ist ein Banachraum.

b) Ist (x_j) eine Folge in X mit $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$, so existiert $\sum_{j=1}^{\infty} x_j := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j$.⁵

²Ein Grund für die Entwicklung der Maßtheorie liegt in diesem wesentlichen Vorteil gegenüber dem Raum der Regelfunktionen oder dem Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen. Mehr zu Eigenschaften der L^p -Räume findet man etwa unter <https://de.wikipedia.org/wiki/Lp-Raum>.

³Siehe etwa Werner, D., Funktionalanalysis, 5., erw. Auflage, Springer, Berlin, 2005, S. 26.

⁴siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 1.19

⁵Kurz: Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz.

Beweis. a) \Rightarrow b): Es sei (x_j) eine Folge in X mit $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$. Da X ein Banachraum

ist, genügt es zu zeigen: $\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)$ ist eine Cauchy-Folge.

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=n'+1}^n \|x_j\| < \varepsilon \quad (n > n' \geq N).$$

Also ist nach der Dreiecksungleichung auch

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{j=1}^{n'} x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n'+1}^n x_j \right\| \leq \sum_{j=n'+1}^n \|x_j\| < \varepsilon \quad (n > n' \geq N).$$

b) \Rightarrow a): Es sei (y_k) eine Cauchy-Folge in X . Dann existiert eine Teilfolge $(y_{k_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\|y_{k_n} - y_{k_{n-1}}\| < 1/2^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Setzt man $x_j := y_{k_j} - y_{k_{j-1}}$, so ist

$$y_{k_n} = y_{k_0} + \sum_{j=1}^n (y_{k_j} - y_{k_{j-1}}) = y_{k_0} + \sum_{j=1}^n x_j \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aus $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 1/2^j = 1 < \infty$ folgt, dass $\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)_n$ und damit auch (y_{k_n}) in X konvergiert. Da (y_k) eine Cauchy-Folge ist, ist auch (y_k) konvergent.⁶ \square

Definition 1.7 Es seien X, Y lineare Räume über \mathbb{K} .

1. Ein (linearer) **Operator** T von X nach Y ist eine lineare Abbildung $T : D(T) \rightarrow Y$ (genauer: das Tupel $(X, Y, T, D(T))$, wobei $D(T)$ ein linearer Teilraum von X ist. Ist $Y = \mathbb{K}$, so nennt man T auch ein (lineares) **Funktional**. Der \mathbb{K} -lineare Raum X^* aller linearen Funktionale $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **algebraisches Dual** von X .

2. Sind $(X, \|\cdot\| = \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\| = \|\cdot\|_Y)$ halbnormiert und $T : X \rightarrow Y$ linear, so heißt T (lokal) **beschränkt**, falls $T(B_X) \subset Y$ beschränkt ist.

Satz 1.8 Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ linear. Dann sind äquivalent:

- T ist beschränkt.
- Es existiert ein $c \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$.
- T ist (Lipschitz-)stetig auf X .
- T ist stetig an 0.

⁶siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Bem. 1.9

Beweis. Man beachte: Da T linear ist, ist stets $T0 = 0$.

a) \Rightarrow b): Mit $c := \sup_{u \in B_X} \|Tu\|$ gilt für $x \neq 0$

$$\|Tx\| = \|x\| \cdot \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq c\|x\|.$$

b) \Rightarrow c): Für $x, y \in X$ gilt

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Damit ist T Lipschitz-stetig auf X (also insbesondere stetig).

c) \Rightarrow d): Klar.

d) \Rightarrow a): Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit $\|Tx\| \leq 1$ für $\|x\| \leq \delta$. Damit folgt für $x \in B_X \setminus \{0\}$

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{\|x\|} \cdot x\right) \right\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

□

Bemerkung und Definition 1.9 Es seien X ein halbnormierter und Y ein normierter Raum über \mathbb{K} . Wir setzen

$$L(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y : T \text{ linear und beschränkt}\}$$

und $L(X) := L(X, X)$. Da die Abbildung $L(X, Y) \ni T \mapsto T|_{B_X} \in B(B_X, Y)$ linear und injektiv ist, ist durch

$$\|T\| := \|T|_{B_X}\|_\infty = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|$$

eine Norm auf $L(X, Y)$ definiert. Nach Satz 1.8 gilt

a) $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ für $x \in X$,

b) $\|T\| = \min\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| \text{ für } x \in X\}$.

Sind $(Z, \|\cdot\|)$ ein weiterer normierter Raum und $S \in L(Y, Z)$, so gilt

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

Außerdem ist $\{T|_{B_X} : T \in L(X, Y)\}$ abgeschlossen in $B(B_X, Y)$.

Denn: Ist (T_n) eine Folge in $L(X, Y)$ mit $T_n|_{B_X} \rightarrow f$ in $B(B_X, Y)$, so gilt für alle $x \in X \setminus \{0\}$

$$T_n(x) = \|x\| T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \rightarrow \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aus der Linearität von T_n folgt, dass durch $T0 := 0$ und $Tx := \|x\|f(x/\|x\|)$ für $x \neq 0$ ein Operator $T \in L(X, Y)$ definiert ist mit $T|_{B_X} = f$.

Ist Y ein Banachraum, so ist damit nach Beispiel 1.3 und Bemerkung 1.4 auch $L(X, Y)$ ein Banachraum. Insbesondere ist der Raum

$$X' := L(X, \mathbb{K}) = \{T : X \rightarrow \mathbb{K} : T \text{ linear und beschränkt}\}$$

stets ein Banachraum. $X' = (X, \|\cdot\|)'$ heißt **Dualraum** oder kurz **Dual** von X .

Beispiel 1.10 Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$. Dann ist durch

$$\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad (f \in C^1(I))$$

eine Norm auf $C^1(I)$ gegeben, mit der $(C^1(I), \|\cdot\|_{1,\infty})$ zum Banachraum wird ([Ü]). Ist $T : C^1(I) \rightarrow C(I)$ definiert durch

$$Tf := f' \quad (f \in C^1(I)),$$

so ist

$$\|Tf\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{1,\infty} \quad (f \in C^1(I)).$$

Damit ist T beschränkt mit $\|T\| \leq 1$ (tatsächlich gilt $\|T\| = 1$; [Ü]). Betrachtet man jedoch T als Operator von $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ nach $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ mit $D(T) = C^1(I)$, so ist T unbeschränkt!

Denn: Ohne Einschränkung sei $0 \in I$. Ist $f_n(t) = \sin(nt)$, so ist $\|f_n\|_\infty \leq 1$ und $Tf_n(t) = n \cos(nt)$, also $\|Tf_n\|_\infty = |Tf_n(0)| = n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

Definition 1.11 Es sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} . Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt** auf X , falls gilt

- (i) Für alle $y \in X$ ist $\langle \cdot, y \rangle \in X^*$.
- (ii) Für alle $x, y \in X$ ist $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
- (iii) Für $x \neq 0$ ist $\langle x, x \rangle > 0$.

In diesem Fall heißt $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ **unitärer Raum** oder **Prähilbertraum**. Weiter heißen $x, y \in X$ **orthogonal**, falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. Wir schreiben dann $x \perp y$. Ist $A \subset X$, so schreiben wir $x \perp A$, falls $x \perp y$ für alle $y \in A$ und $A^\perp := \{x \in X : x \perp A\}$.

Bemerkung und Definition 1.12 Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Dann gilt (siehe Lineare Algebra)

1. (**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**): Für alle $x, y \in X$ ist

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Daraus ergibt sich, dass durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in X$ eine Norm auf X definiert ist. Ist damit $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so nennt man $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen **Hilbertraum**.

2. (**Parallelogrammgleichung**): Für alle $x, y \in X$ ist

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

3. (**Satz des Pythagoras**) Sind x, y orthogonal, so gilt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Beispiel 1.13 Mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j \quad (x, y \in \ell_2)$$

ist $(\ell_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Allgemeiner ist für jeden Maßraum (Ω, Σ, μ) mit

$$\langle f, g \rangle := \int f \bar{g} d\mu \quad (f, g \in L_2(\mu))$$

$(L_2(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung entspricht hier der Hölder-Ungleichung für $p = q = 2$. Der Raum $(C(I), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein Prähilbertraum, aber kein Hilbertraum.

Satz 1.14 *Es seien $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum und $C \subset X$ konvex und so, dass $(C, d_{\|\cdot\|})$ vollständig ist. Dann existiert in jedem $x \in X$ genau ein $y \in C$ mit $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$.⁷ Außerdem ist y dadurch charakterisiert, dass $\text{Re}\langle x - y, u - y \rangle \leq 0$ für alle $u \in C$ gilt.*

Beweis. 1. Wir setzen $d := \text{dist}(x, C)$. Aus der Parallelogrammgleichung folgt für beliebige $u, v \in C$ wegen $\|x - (u + v)/2\| \geq d$

$$\begin{aligned} 2(\|x - u\|^2 + \|x - v\|^2) &= \|2x - u - v\|^2 + \|v - u\|^2 \\ &= 4\|x - (u + v)/2\|^2 + \|v - u\|^2 \geq 4d^2 + \|v - u\|^2, \end{aligned}$$

also

$$\|v - u\|^2 \leq 2(\|x - u\|^2 - d^2) + 2(\|x - v\|^2 - d^2). \quad (1.1)$$

Es sei nun (y_n) eine Folge in C mit $\|x - y_n\| \rightarrow d$ für $n \rightarrow \infty$. Mit $u := y_n, v := y_{n'}$ in (1.1) sieht man, dass (y_n) eine Cauchy-Folge in C ist. Da $(C, d_{\|\cdot\|})$ vollständig ist, existiert ein $y \in C$ mit $y_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$). Wegen

$$d \leq \|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$$

folgt $\|x - y\| = d$. Ist $z \in C$ mit $\|x - z\| = d$, so ergibt sich $y = z$ aus (1.1), also auch die Eindeutigkeit von y .

2. Für $z, u \in C$ und $t \in [0, 1]$ ist $z + t(u - z) \in C$ und

$$\|x - (z + t(u - z))\|^2 - \|x - z\|^2 = -2t \text{Re}\langle x - z, u - z \rangle + t^2 \|u - z\|^2. \quad (1.2)$$

⁷Sind (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$, so heißt $\text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ der **Abstand** von x und A .

Ist einerseits $z \in C$ so, dass $\operatorname{Re}\langle x - z, u - z \rangle \leq 0$ für alle $u \in C$, so ergibt sich mit $t = 1$ in (1.2)

$$\|x - u\|^2 - \|x - z\|^2 \geq 0.$$

Damit ist $\operatorname{dist}(x, C) = \|x - z\|$, also $z = y$. Andererseits ist für $z = y$ die linke Seite in (1.2) für alle $u \in C$ nichtnegativ. Also ist für $t \in (0, 1]$ auch

$$-2 \operatorname{Re}\langle x - y, u - y \rangle + t\|u - y\|^2 \geq 0.$$

Für $t \rightarrow 0^+$ folgt $\operatorname{Re}\langle x - y, u - y \rangle \leq 0$. \square

Definiert man man in der Situation von Satz 1.14 $P_C : X \rightarrow X$ durch

$$P_C(x) := y$$

für $y \in X$, so gilt $P_C(X) = C$ und $P_C \circ P_C = P_C$. Wir betrachten jetzt spezieller Teilräume L statt konvexer Mengen.

Satz 1.15 (Projektionssatz) *Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum, und es sei $L \subset X$ ein vollständiger Teilraum. Ist $x \in X$, so gilt*

$$\|x\|^2 = \|x - P_L(x)\|^2 + \|P_L(x)\|^2 \quad (1.3)$$

und $y = P_L(x)$ für $y \in L$ genau dann wenn

$$(x - y) \perp L. \quad (1.4)$$

Außerdem ist P_L linear mit $\|P_L\| \leq 1$.⁸

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst die 2. Aussage.

\Rightarrow : Es sei $y = P_L(x)$. Ist $u \in L$, so gilt nach Satz 1.14

$$0 \geq \operatorname{Re}\langle x - y, tu - y \rangle = t \operatorname{Re}\langle x - y, u \rangle - \operatorname{Re}\langle x - y, y \rangle$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies impliziert $\operatorname{Re}\langle x - y, u \rangle = 0$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ergibt sich mit it statt t auch $\operatorname{Im}\langle x - y, u \rangle = 0$.

\Leftarrow : Ist $(x - y) \perp L$, so ist $\langle x - y, u - y \rangle = 0$ für alle $u \in L$. Aus Satz 1.14 folgt $P_L(x) = y$.

2. Wegen $P_L(x) \in L$ ist nach dem Satz des Pythagoras und (1.4)

$$\|x\|^2 = \|x - P_L(x) + P_L(x)\|^2 = \|x - P_L(x)\|^2 + \|P_L(x)\|^2.$$

Sind $x, x' \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist $z := \lambda P_L(x) + P_L(x') \in L$ und mit (1.4) gilt

$$\lambda x + x' - z = \lambda(x - P_L(x)) + (x' - P_L(x')) \perp L.$$

Wieder mit (1.4) ist $P_L(\lambda x + x') = z$, also P_L linear. Wegen (1.3) ist $\|P_L x\| \leq \|x\|$ und damit $\|P_L\| \leq 1$. \square

⁸Man nennt P_L die **Orthogonalprojektion** auf L .

Definition 1.16 Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt **Orthonormalsystem**, falls $\langle e, f \rangle = \delta_{e,f}$ (Kronecker-Symbol) für $e, f \in M$ gilt. Für $x \in X$ und $e \in M$ nennt man die Zahlen $\widehat{x}_e := \langle x, e \rangle$ die **Fourier-Koeffizienten** von x (bezüglich M). Ist $\text{span}(M)$ dicht in X ,⁹ so heißt M eine **Orthonormalbasis**.

Beispiel 1.17 Es sei $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Für $f \in C(\mathbb{S})$ schreiben wir¹⁰

$$\int f \, dm := \int f(z) \, dm(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \, dt.$$

Mit

$$\langle f, g \rangle := \int f \bar{g} \, dm \quad (f, g \in C(\mathbb{S}))$$

ist $(C(\mathbb{S}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Weiter setzen wir $e_k(z) := z^k$ für $z \in \mathbb{S}$ und $k \in \mathbb{Z}$ und

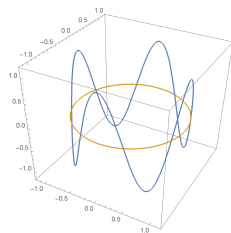


Abbildung 1: $\text{Re}(z^4) = \cos(4t)$ mit $z = e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

$M := \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$. In Polarkoordinaten $z = e^{it}$ ist $z^k = e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$. Daher spricht man auch vom trigonometrischen System M . Wegen

$$\int e_k \, dm = \int z^k \, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \, dt = \begin{cases} (ik)^{-1} e^{ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

gilt $\langle e_k, e_j \rangle = \int e_{k-j} \, dm = \delta_{jk}$ für $j, k \in \mathbb{Z}$ (beachte: $\bar{z} = z^{-1}$ für $z \in \mathbb{S}$). Also ist M ein Orthonormalsystem in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_2)$. Man kann zeigen, dass $\text{span}(M)$ dicht in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$ ist¹¹, also wegen $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$ auch in $C(\mathbb{S})$ versehen mit der Integralnorm $\|\cdot\|_2$. Damit ist M eine Orthonormalbasis in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_2)$.

Bemerkung 1.18 Es seien X ein unitärer Raum und $M \subset X$ ein Orthonormalsystem.

1. Sind $F \subset M$ endlich und $L := \text{span}(F)$, so gilt für $x \in X$ und $f \in F$

$$\langle x - \sum_{e \in F} \widehat{x}_e \cdot e, f \rangle = \langle x, f \rangle - \sum_{e \in F} \langle x, e \rangle \langle e, f \rangle = 0.$$

⁹Ist (X, d) ein metrischer Raum, so heißt $M \subset X$ **dicht** in X , falls zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in M$ existiert mit $d(x, y) < \varepsilon$.

¹⁰Aus Sicht der Maßtheorie: m ist das normierte Bogenmaß auf \mathbb{S} .

¹¹Weierstraßscher Approximationssatz; Satz von Fejér; siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/Fourier_und_Laplace/FTFR_WS2122.pdf, Satz 1.13

Nach Satz 1.15 ist damit

$$P_L x = \sum_{e \in F} \widehat{x}_e \cdot e. \quad (1.5)$$

Außerdem folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$\sum_{e \in F} |\widehat{x}_e|^2 = \sum_{e \in F} \|\widehat{x}_e \cdot e\|^2 = \left\| \sum_{e \in F} \widehat{x}_e \cdot e \right\|^2 = \|P_L x\|^2, \quad (1.6)$$

also mit (1.3)

$$\|x\|^2 - \sum_{e \in F} |\widehat{x}_e|^2 = \|x - P_L x\|^2 = \text{dist}^2(x, L). \quad (1.7)$$

2. Ist $(c_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie in $[0, \infty)$, so setzen wir $\sum_{\alpha \in I} c_\alpha := \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} c_\alpha : F \subset I \text{ endlich} \right\}$.
Nach (1.7) gilt damit die **Besselsche Ungleichung**: Für alle $x \in X$ ist

$$\sum_{e \in M} |\widehat{x}_e|^2 \leq \|x\|^2. \quad (1.8)$$

Zudem liegt x , wieder nach (1.7), genau dann im Abschluss von $\text{span}(M)$,¹² wenn die **Parsevalsche Gleichung**

$$\sum_{e \in M} |\widehat{x}_e|^2 = \|x\|^2 \quad (1.9)$$

erfüllt ist. Also ist M genau dann eine Orthonormalbasis, wenn (1.9) für alle $x \in X$ gilt.

Beispiel 1.19 Es sei $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ wie in Beispiel 1.17, d. h. $e_k(z) = z^k$ für $z \in \mathbb{S}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist für $f \in C(\mathbb{S})$

$$\widehat{f}_k := \widehat{f}_{e_k} = \langle f, e_k \rangle = \int f(z) z^{-k} dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Da $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $(C(\mathbb{S}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist, gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\int |f|^2 dm = \|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2.$$

Als passend zur Hilbertraumtheorie erweist sich das Konzept der Summierbarkeit:

Bemerkung und Definition 1.20 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ in X heißt **summierbar** (in X), falls ein $x \in X$ und für alle $\varepsilon > 0$ eine *endliche* Menge $F_\varepsilon \subset I$ so existieren, dass

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in F_\varepsilon} x_\alpha \right\| < \varepsilon$$

¹²Sind (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, so nennt man die Menge $\overline{A} := \{x \in X : \text{dist}(x, A) = 0\}$ den **Abschluss** von A in X . Damit ist A genau dann dicht in X , wenn $\overline{A} = X$ gilt. Außerdem heißen die Menge $A^\circ := \{x : x \text{ innerer Punkt von } A\}$ das **Innere** von A und $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ der **Rand** von A .

für alle endlichen Mengen $F \subset I$ mit $F_\varepsilon \subset F$ gilt. In diesem Fall ist $\{\alpha \in I : x_\alpha \neq 0\}$ abzählbar ([Ü]) und der Wert

$$x =: \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$$

eindeutig bestimmt. Es gilt folgendes Cauchy-Kriterium für Summierbarkeit: Ist X ein Banachraum und ist (x_α) eine Familie in X , so ist (x_α) genau dann summierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F_\varepsilon \subset I$ existiert mit $\|\sum_{\alpha \in G} x_\alpha\| < \varepsilon$ für alle endlichen Mengen $G \subset I \setminus F_\varepsilon$. Man sieht damit leicht (vgl. Satz 1.6): Ist X ein Banachraum und ist $\sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\| < \infty$, so ist (x_α) summierbar mit $\|\sum_{\alpha \in I} x_\alpha\| \leq \sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|$.

Satz 1.21 *Es seien X ein unitärer Raum und $M \subset X$ ein Orthonormalsystem. Für $x \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a) x erfüllt die Parsevalsche Gleichung.
- b) $(\widehat{x}_e)_{e \in M}$ ist summierbar und es gilt $x = \sum_{e \in M} \widehat{x}_e e$.¹³

Beweis. Nach (1.5) und (1.7) ist für $F \subset M$ endlich und $L := \text{span}(F)$

$$\|x\|^2 - \sum_{e \in F} |\widehat{x}_e|^2 = \|x - \sum_{e \in F} \widehat{x}_e e\|^2.$$

Aus der Definition der Summierbarkeit ergibt sich damit die Äquivalenz von a) und b). \square

Beispiel 1.22 1. In der Situation von Beispiel 1.19 gilt nach Satz 1.21 in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_2)$

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k e_k \quad (f \in C(\mathbb{S})).$$

Ist $L_n := \text{span}\{e_k : |k| \leq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, so nennt man die Folge $(S_n f)$ mit

$$S_n f := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e_k = P_{L_n} f$$

die **Fourier-Reihe** von f . Es gilt damit $\int |f - S_n f|^2 dm \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

2. Ist $I = [-\pi, \pi]$ und setzt man $C_{\text{per}}(I) := \{f \in C(I) : f(\pi) = f(-\pi)\}$, so ist für $f \in C_{\text{per}}(I)$ die Funktion $f_* : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f_*(e^{it}) := f(t)$ für $t \in (-\pi, \pi]$, stetig auf \mathbb{S} . Versieht man $C_{\text{per}}(I)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_I := \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} = 2\pi \int f_* \bar{g}_* dm$$

¹³Man spricht von der **Fourier-Entwicklung** von x .

und setzt man $g_k := \exp(ik \cdot)$ für $k \in \mathbb{Z}$, so ist $(g_k)_* = e_k$ und $\langle f, g_k \rangle_I = 2\pi(\widehat{f}_*)_k$, also nach 1.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, g_k \rangle_I g_k \quad (1.10)$$

in $(C_{\text{per}}(I), \|\cdot\|_2)$. Damit ist durch $\{(2\pi)^{-1/2}g_n : n \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $C_{\text{per}}(I)$ gegeben und (1.10) die Fourier-Entwicklung von f bezüglich dieser Basis.

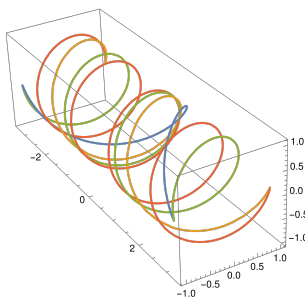


Abbildung 2: g_1, \dots, g_4 .

Zum Abschluss diskutieren wir kurz die Frage nach der Existenz von Orthonormalbasen.

Bemerkung 1.23 Es sei $X \neq \{0\}$ ein unitärer Raum. Ist $A \subset X$ abzählbar, so existiert zunächst eine linear unabhängige Menge $B \subset A$ mit $\text{span}(A) = \text{span}(B)$ und dann nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren (siehe Lineare Algebra) ein abzählbares Orthonormalsystem M mit $\text{span}(A) = \text{span}(M)$. Existiert also eine abzählbare Menge A so, dass $\text{span}(A)$ dicht in X ist, so existiert eine abzählbare Orthonormalbasis in X .

Wir wollen zeigen, dass in Hilberträumen stets Orthonormalbasen existieren. Der Beweis beruht auf einer Anwendung des Zornschen Lemmas (siehe B.1).

Satz 1.24 Sind $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $N \subset X$ ein Orthonormalsystem, so existiert eine Orthonormalbasis M von X mit $N \subset M$. Insbesondere existiert eine Orthonormalbasis.

Beweis. Ist $0 \neq a \in X$, so ist $\{a/\|a\|\}$ ein Orthonormalsystem. Also reicht es, die erste Aussage zu zeigen. Wir setzen $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ Orthonormalsystem mit } N \subset A\}$. Dann ist \subset eine Halbordnung auf \mathcal{A} . Ist \mathcal{B} eine Kette in \mathcal{A} , so ist $S := \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ ein Orthonormalsystem und damit obere Schranke von \mathcal{B} . Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element M . Wir zeigen: M ist eine Orthonormalbasis. Angenommen, nicht. Dann ist der Abschluss L von $\text{span}(M)$ ein abgeschlossener Teilraum von X und $L \neq X$. Ist $x \notin L$, so ist nach dem Projektionssatz $0 \neq (x - P_L x) \perp L$. Mit $e := (x - P_L x)/\|x - P_L x\|$ ist $M \cup \{e\} \neq M$ ein Orthonormalsystem, im Widerspruch zur Maximalität von M . \square

2 Hauptsätze für Operatoren auf Banachräumen

Wir beweisen in diesem Abschnitt verschiedene zentrale Sätze über lineare Abbildungen auf Banachräumen. Die wesentlichen laufen unter den Namen:

- Satz von Banach-Steinhaus,
- Satz von der offenen Abbildung,
- Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Als Ausgangspunkt für die Hauptsätze dient ein Ergebnis der Analysis, das in vielen Situationen äußerst nützlich ist:

Satz 2.1 (Baire) *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Ist (U_n) eine Folge offener Mengen so, dass U_n dicht in X ist für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ dicht in X .*

Beweis.¹⁴ Es seien $a \in X$, $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist: $B_\varepsilon(a) \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Wir setzen $A_0 := B_\varepsilon(a)$. Da U_1 dicht in X ist, ist $U_\varepsilon(a) \cap U_1 \neq \emptyset$ und offen. Also existieren $b \in X$, $0 < \delta \leq 1/2$ mit $A_1 := B_\delta(b) \subset A_0 \cap U_1$. Dabei ist $\text{diam}(A_1) \leq 2\delta \leq 1$. Da U_2 dicht in X ist, ist $U_\delta(b) \cap U_2 \neq \emptyset$ und offen. Mit gleicher Argumentation wie vorher existiert eine abgeschlossene Kugel $A_2 \subset A_1 \cap U_2$ mit $\text{diam}(A_2) \leq 1/2$. Induktiv erhält man so eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Kugeln mit

$$A_n \subset A_{n-1} \cap U_n \subset A_0 \cap U_n$$

und $\text{diam}(A_n) \leq 1/n$. Wählt man $x_j \in A_j$, so ist (x_j) wegen $\text{diam}(A_j) \rightarrow 0$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x_j \rightarrow x$ für $j \rightarrow \infty$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt $x_j \in A_j \subset A_n$ für $j \geq n$, also $x \in A_n \subset A_0 \cap U_n$, da A_n abgeschlossen ist. Damit ist $x \in A_0 \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. \square

Bemerkung und Definition 2.2 In vollständigen metrischen Räumen (X, d) sind nach dem Satz von Baire abzählbare Schnitte offener, dichter Mengen dichte G_δ -Mengen.¹⁵ Enthält $M \subset X$ eine dichte G_δ -Menge, so nennt man M **residual** in X . Der Satz von Baire zeigt, dass abzählbare Schnitte residualer Mengen wieder residual sind ($[\dot{U}]$).

Bemerkung 2.3 Es seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\mathcal{F} \subset C(X)$. Wir setzen für $x \in X$

$$s^*(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| \in [0, \infty].$$

¹⁴Sind (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r > 0$, so schreiben wir $U_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$ für die offene Kugel um x mit Radius r und $B_r(a) := \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ für die abgeschlossene. Für $A \subset X$ ist $\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ der **Durchmesser** von A .

¹⁵Einen abzählbaren Schnitt offener Mengen bezeichnet man als **G_δ -Menge**.

Da Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen offen sind, ist

$$V_n := \{x \in X : s^*(x) > n\} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} |f|^{-1}((n, \infty))$$

für $n \in \mathbb{N}$ offen. Also ist die Menge

$$A := \{x \in X : s^*(x) = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

eine G_δ -Menge. Dabei gilt: Entweder ist A dicht in X und damit residual, oder es existiert eine nichtleere offene Menge $U \subset X$ mit $\sup_{x \in U} s^*(x) < \infty$.

Denn: Ist V_n dicht in X für alle n , so ist A nach dem Satz von Baire dicht in X . Ist V_n nicht dicht in X für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $U := X \setminus \overline{V_n}$ nichtleer und offen. Für alle $x \in U$ ist $s^*(x) \leq n$, also auch $\sup_{x \in U} s^*(x) \leq n$.

Satz 2.4 (Banach-Steinhaus; Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

Es seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$ und

$$A := \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\| = \infty\}.$$

Dann ist A entweder residual in X oder leer. Im zweiten Fall ist \mathcal{T} beschränkt, d. h.

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty.$$

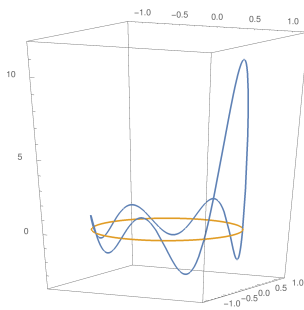
Beweis. Wir wenden Bemerkung 2.3 auf die Familie $\mathcal{F} := \{x \mapsto \|Tx\| : T \in \mathcal{T}\}$ an. Ist die erste Alternative nicht gegeben, so existieren nach Bemerkung 2.3 ein $a \in X$ und $\delta, c > 0$ mit $\|Tu\| \leq c$ für alle $u \in B_\delta(a)$ und $T \in \mathcal{T}$. Für $T \in \mathcal{T}$ und $x \in B_X$ gilt $\delta x + a \in B_\delta(a)$, also

$$\delta \|Tx\| = \|T(\delta x + a) - Ta\| \leq c + \|Ta\| \leq 2c.$$

Damit ist $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| \leq 2c/\delta =: d$ und für alle $x \in X$ folglich auch $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\| \leq d\|x\|$, also A leer. \square

Es seien S_n wie in Beispiel 1.22. Wir haben dort gesehen, dass $S_n f \rightarrow f$ in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_2)$ gilt. Es drängt sich die Frage nach der punktweisen Konvergenz von $(S_n f)$ auf. Wir zeigen als Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus, dass stetige Funktionen f existieren, deren Fourierreihe nicht überall punktweise konvergiert.

Satz 2.5 Für eine residuale Menge von Funktionen $f \in C(\mathbb{S})$ ist die Folge $((S_n f)(1))_n$ unbeschränkt.

Abbildung 3: Dirichlet-Kern D_5 .

Beweis. Mit dem n -ten **Dirichlet-Kern** $D_n := \sum_{k=-n}^n e_k$ gilt

$$(S_n f)(1) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k = \sum_{k=-n}^n \int f \bar{e}_k dm = \int f \overline{D_n} dm =: T_n f.$$

Dabei ist $T_n \in (C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)'$ mit $\|T_n\| = \|D_n\|_1$ ([Ü]). Nach dem Satz von Banach-Steinhaus, angewandt auf $\mathcal{T} = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, genügt es, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n\|_1 = \infty$ zu zeigen. Für $t \in [-\pi, \pi]$ gilt nach dem Schrankensatz $|e^{it} - 1| \leq |t|$, also für $z = e^{it} \neq 1$ mit der geometrischen Summenformel

$$|D_n(z)| = |z^n D_n(z)| = \frac{|z^{2n+1} - 1|}{|z - 1|} \geq \frac{\operatorname{Re}(e^{(2n+1)it} - 1)}{|t|} = \frac{1 - \cos((2n+1)t)}{|t|}$$

und damit (da der Integrand gerade ist)

$$\begin{aligned} \pi \|D_n\|_1 &\geq \int_0^\pi (1 - \cos((2n+1)t)) \frac{dt}{t} \geq \int_1^{(2n+1)\pi} (1 - \cos u) \frac{du}{u} \\ &= \ln(2n+1) + \ln \pi - \int_1^{(2n+1)\pi} \frac{\cos u}{u} du. \end{aligned}$$

Da das uneigentliche Integral $\int_1^\infty u^{-1} \cos u du$ existiert,¹⁶ folgt $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). \square

Wir befassen uns jetzt mit der „Vererbung“ von Konvergenz bei beschränkten Familien in $L(X, Y)$.

Satz 2.6 *Es seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $I \subset \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt und $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie in $L(X, Y)$ mit*

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| < \infty.$$

Existiert $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_\alpha x$ für alle x aus einer in X dichten Menge D , so existiert $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_\alpha x =: Tx$ für alle $x \in X$. Dabei ist $T \in L(X, Y)$ und $\|T\| \leq \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|$.

¹⁶siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Bem. 2.36

Beweis. Es seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $y \in D$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Weiter existiert ein $R > 0$ mit $\|T_\alpha y - T_{\alpha'} y\| < \varepsilon$ für $\alpha, \alpha' \geq R$. Also gilt für $\alpha, \alpha' \geq R$ auch

$$\|T_\alpha x - T_{\alpha'} x\| \leq \|T_\alpha(x - y)\| + \|T_\alpha y - T_{\alpha'} y\| + \|T_{\alpha'}(y - x)\| \leq (2 \sup_{\beta \in I} \|T_\beta\| + 1)\varepsilon.$$

Da Y ein Banachraum ist existiert $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_\alpha x$.¹⁷ Da die Abbildungen T_α linear sind, ist T ebenfalls linear. Für $x \in B_X$ gilt zudem $\|Tx\| = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|T_\alpha x\| \leq \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|$. \square

Bemerkung 2.7 Da konvergente Folgen in normierten Räumen beschränkt sind, ergibt sich aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und Satz 2.6 insbesondere: Sind X, Y Banachräume und ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$, so sind äquivalent:

- Für alle $x \in X$ ist die Folge $(T_n x)_n$ konvergent in Y .
- Es gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ und es existiert eine dichte Teilmenge D von X so, dass $(T_n x)_n$ für alle $x \in D$ konvergiert.

Außerdem ist in diesem Fall der punktweise Grenzwert $T \in L(X, Y)$ und schon festgelegt durch die Werte auf D , d. h. ist $S \in L(X, Y)$ mit $S|_D = T|_D$ so, ist $T = S$.

Beispiel 2.8 (Quasi-Monte Carlo Integration) Es seien $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\zeta := e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{S}$. Dann ist $\zeta^k \neq 1$ alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.¹⁸

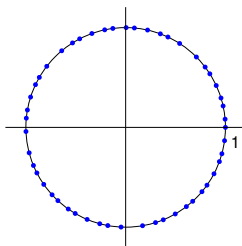


Abbildung 4: $\zeta^k = e^{2k\pi i \theta}$ für $k = 0, \dots, 50$ und $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Die Idee ist, für $f \in C(\mathbb{S})$ arithmetische Mittel der Form

$$Q_n f := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(\zeta^j)$$

als Näherung für $\int f dm$ zu wählen. Wir wollen zeigen, dass dies gerechtfertigt ist:

¹⁷Cauchy-Kriterium für Familien; vgl. https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_GW_WS2020-21.pdf, Bemerkung 5.25

¹⁸Die Zahlen ζ^k verteilen sich quasi zufällig auf \mathbb{S} .

Zunächst ist $Q_n : C(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{C}$ linear mit $|Q_n f| \leq \|f\|_\infty$, also $Q_n \in (C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)'$ und $\|Q_n\| \leq 1$. Wegen $Q_n 1 = 1$ ist $\|Q_n\| = 1$. Für $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ erhält man mit der geometrischen Summenformel

$$Q_n e_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \zeta^{jk} = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \zeta^{k(n+1)}}{1 - \zeta^k}.$$

Daher gilt

$$|Q_n e_k| \leq \frac{1}{n+1} \frac{2}{|1 - \zeta^k|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

also (vgl. Bem. 1.17) $Q_n e_k \rightarrow 0 = \int e_k dm$ für $n \rightarrow \infty$. Wegen $Q_n e_0 = Q_n 1 = 1 = \int e_0 dm$ ergibt sich für $p \in \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ aus Linearitätsgründen

$$Q_n p \rightarrow \int p dm \quad (n \rightarrow \infty).$$

Da $\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$ ist (Bem. 1.17), gilt nach Bemerkung 2.7

$$Q_n f \rightarrow \int f dm \quad (n \rightarrow \infty)$$

für beliebige $f \in C(\mathbb{S})$.

Sind X, Y metrische Räume, so heißt $f : X \rightarrow Y$ **offen**, falls für alle offenen Mengen $U \subset X$ auch $f(U) \subset Y$ offen ist. Wir wenden uns nun der Frage nach der Offenheit stetiger linearer Abbildungen zu.

Bemerkung 2.9 Es seien X, Y lineare Räume und $T : X \rightarrow Y$ linear. Wir verwenden in Weiterem dass $T(\lambda A) = \lambda T(A)$ und $T(A + B) = T(A) + T(B)$ für $A, B \subset X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt. Außerdem ist $U_{\delta r}(a) = a + rU_\delta(0)$ für $a \in X$ und $r, \delta > 0$. Sind X, Y normiert, so ergibt sich

1. Ist $T(B_X)$ eine Nullumgebung,¹⁹ so ist T offen.

Denn: Es sei $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(0) \subset T(B_X)$. Ist $U \subset X$ offen und ist $y \in T(U)$, so existieren ein $x \in U$ mit $y = Tx$ und ein $\rho > 0$ mit $x + \rho B_X \subset U$. Also folgt $T(U) \supset T(x + \rho B_X) = y + \rho T(B_X) \supset y + \rho U_\delta(0) = U_{\delta\rho}(y)$.

2. Ist T offen, so ist T surjektiv.

Denn: Es sei $\delta > 0$ mit $T(B_X) \supset T(U_1(0)) \supset U_\delta(0)$. Dann ist

$$T(X) = T\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB_X\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nT(B_X) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{n\delta}(0) = Y.$$

Satz 2.10 Es seien X ein Banachraum, Y normiert und $T \in L(X, Y)$. Ist $\overline{T(B_X)}$ eine Nullumgebung, so ist T schon offen.²⁰

¹⁹Ist E ein normierter Raum, so heißt $A \subset E$ **Nullumgebung**, falls $0 \in A^\circ$ gilt.

²⁰Die Aussage wird auch als **Schauder-Lemma** bezeichnet.

Beweis. Es sei $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(0) \subset \overline{T(B_X)}$. Dann gilt für $r > 0$ auch²¹

$$U_{\delta r}(0) = rU_\delta(0) \subset r\overline{T(B_X)} = \overline{T(rB_X)}. \quad (2.1)$$

Nach Bemerkung 2.9.1 reicht es also,

$$\overline{T(2^{-1}B_X)} \subset T(B_X)$$

zu zeigen. Dazu sei $y \in \overline{T(2^{-1}B_X)}$. Dann existiert ein $x_1 \in 2^{-1}B_X$ mit $\|y - Tx_1\| < \delta/4$, also $y - Tx_1 \in U_{\delta/4}(0) \subset \overline{T(4^{-1}B_X)}$. Entsprechend existiert ein $x_2 \in 4^{-1}B_X$ mit

$$y - T(x_1 + x_2) = (y - Tx_1) - Tx_2 \in U_{\delta/8}(0).$$

Induktiv erhält man eine Folge (x_n) mit $x_n \in 2^{-n}B_X$ und

$$y - T\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \in U_{\delta/2^{n+1}}(0).$$

Aus $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ folgt mit Satz 1.6 die Existenz von $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$. Außerdem ist $\|x\| \leq 1$, also $x \in B_X$. Da T stetig ist, folgt $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) = T(x) \in T(B_X)$. \square

Bemerkung und Definition 2.11 Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt **von erster Kategorie** oder **mager** in X , falls $A^c = X \setminus A$ residual ist. Andernfalls heißt A **von zweiter Kategorie** in X . Insbesondere sind offene nichtleere Mengen von zweiter Kategorie. Außerdem gilt: A ist genau dann von erster Kategorie, wenn eine Folge abgeschlossener Mengen B_n existiert mit $B_n^\circ = \emptyset$ und $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Denn: A^c ist genau dann residual, wenn eine Folge (U_n) offener, dichter Mengen existiert mit $A^c \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Mit $B_n = (U_n)^c$ ist dies äquivalent zu $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, wobei B_n abgeschlossen und $B_n^\circ = \emptyset$ sind.

Satz 2.12 (von der offenen Abbildung)

Es seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

- a) T ist offen.
- b) T ist surjektiv.
- c) $T(X)$ ist von zweiter Kategorie in Y .

Beweis. a) \Rightarrow b) folgt aus Bemerkung 2.9.2 und b) \Rightarrow c) aus Bemerkung und Definition 2.11. Es bleibt also lediglich, c) \Rightarrow a) zu zeigen.

²¹Sind E ein normierter Raum, $A, B \subset E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$ und $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.

Mit $E_n := \overline{T(nB_X)}$ ist $T(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(nB_X) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Da nach Voraussetzung $T(X)$ nicht von erster Kategorie ist, existiert nach Bemerkung 2.11 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $E_n^\circ \neq \emptyset$, d. h. es existieren ein $y \in E_n$ und ein $\delta > 0$ mit $y + U_\delta(0) = U_\delta(y) \subset E_n$. Wegen $-nB_X = nB_X$ ist $-y \in -E_n = \overline{T(-nB_X)} = E_n$. Also ergibt sich mit $nB_X + nB_X = 2nB_X$

$$U_\delta(0) \subset E_n - y \subset E_n + E_n \subset \overline{T(nB_X) + T(nB_X)} = \overline{T(2nB_X)}$$

und damit $U_{\delta/(2n)}(0) \subset \overline{T(B_X)}$ wegen (2.1). Nach Satz 2.10 ist T offen. \square

Bemerkung 2.13 Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung ist die „automatische“ Stetigkeit von Inversen: Sind X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$ bijektiv, so ist $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ offen in Y für alle offenen Mengen $U \subset X$. Also ist T^{-1} stetig²² und damit $T^{-1} \in L(Y, X)$. Ist Y kein Banachraum, so kann T^{-1} unstetig sein: Betrachtet man etwa die identische Abbildung $\text{id} : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_1)$, so ist id stetig (da $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$), aber id^{-1} nicht, wie etwa die Folge $f_n(t) = 1/(1+n^2t^2)$ für $[a, b] = [-1, 1]$ zeigt ([Ü]).

Bemerkung und Definition 2.14 Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.
1. Durch

$$\|(x, y)\| := \|(x, y)\|_\oplus := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad ((x, y) \in X \times Y)$$

ist eine Norm auf $X \times Y$ gegeben. Wir schreiben für den entsprechend normierten Produktraum $X \oplus Y$. Damit gilt $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ in $X \oplus Y$ genau dann, wenn $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$. Außerdem ist $X \oplus Y$ genau dann ein Banachraum, wenn X und Y Banachräume sind.

2. Ist T ein Operator T von X nach Y , so ist der Graph

$$G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset X \times Y$$

ein linearer Teilraum. T heißt **abgeschlossen**, falls $G(T)$ in $X \oplus Y$ abgeschlossen ist.

Bemerkung 2.15 Es seien X, Y normierte Räume. Ein Operator T von X nach Y ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist (x_n) in $D(T)$ mit $x_n \rightarrow x$ und $Tx_n \rightarrow y$, so ist $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

Denn: Ist $G(T)$ abgeschlossen und (x_n) in $D(T)$ mit $x_n \rightarrow x$ und $Tx_n \rightarrow y$, so gilt $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$. Also ist (x, y) in $G(T)$ und damit $y = Tx$. Ist umgekehrt die Konvergenzbedingung erfüllt und (x_n, Tx_n) eine Folge in $G(T)$ mit $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$, so gilt $x_n \rightarrow x$ und $Tx_n \rightarrow y$, also $Tx = y$ und damit $(x, y) \in G(T)$.

²²Sind X, Y metrische Räume, so ist $f : X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Damit sieht man ([Ü]): Ist T stetig, so ist T genau dann abgeschlossen, wenn $D(T)$ abgeschlossen in X ist. Insbesondere ist jeder Operator $T \in L(X, Y)$ damit abgeschlossen.

Beispiele 2.16 1. Es seien $I = [a, b]$, $X = Y = (C(I), \|\cdot\|_\infty)$ und T als Operator von X nach Y definiert durch $D(T) := C^1(I)$ und $Tf := f'$. Ist (f_n) in $C^1(I)$ mit $f_n \rightarrow f$ in $C(I)$ und $Tf_n = f'_n \rightarrow g$ in $C(I)$, so ist $f \in C^1(I)$ mit $g = f'$ ([Ü]). Nach Bemerkung 2.15 ist T abgeschlossen. Man beachte: Nach Beispiel 1.10 ist T nicht beschränkt.

2. Nicht jeder Operator ist abgeschlossen. Sind etwa $I = [-1, 1]$, $X = Y = (L_2(I), \|\cdot\|_2)$ und T als Operator von X nach Y wieder definiert durch $Tf := f'$ für $f \in D(T) := C^1(I)$, so gilt ([Ü])

$$f_n(t) := \sqrt{t^2 + 1/n^2} \rightarrow |t| =: f(t) \quad (n \rightarrow \infty)$$

gleichmäßig auf I , also auch in $L_2(I)$, und $f'_n \rightarrow \text{sign}$ in $L_2(I)$. Allerdings ist $f \notin D(T)$.²³

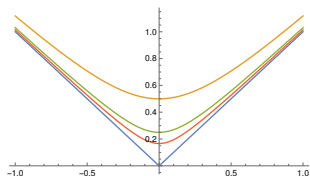


Abbildung 5: f_2, f_4, f_6 und $|\cdot|$.

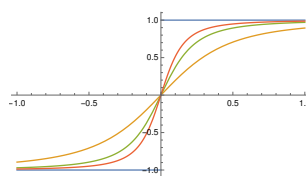


Abbildung 6: f'_2, f'_4, f'_6 und sign .

Satz 2.17 (vom abgeschlossenen Graphen; Graphensatz)

Es seien X, Y Banachräume. Ist $T : X \rightarrow Y$ linear und abgeschlossen, so ist $T \in L(X, Y)$.²⁴

Beweis. Da $G(T)$ abgeschlossen im Banachraum $X \oplus Y$ ist, ist $G(T)$ ein Banachraum. Wir definieren $P_X : X \times Y \rightarrow X$ und $P_Y : X \times Y \rightarrow Y$ durch

$$P_X(x, y) := x, \quad P_Y(x, y) := y \quad ((x, y) \in X \times Y).$$

Dann sind $P_X \in L(X \oplus Y, X)$ und $P_Y \in L(X \oplus Y, Y)$. Wir betrachten

$$S := P_X|_{G(T)} \in L(G(T), X),$$

also $S(x, Tx) = x$ für $x \in X = D(T)$. Dann ist S injektiv (da T eine Funktion ist) und surjektiv. Also ist $S^{-1} \in L(X, G(T))$ nach Bemerkung 2.13. Wegen

$$(P_Y \circ S^{-1})(x) = P_Y(x, Tx) = Tx \quad (x \in X)$$

ist $T \in L(X, Y)$. □

²³Die Argumentation ist etwas fishy, da man es bei Objekten in L_2 mit Äquivalenzklassen von Funktionen zu tun hat. Jede solche enthält aber höchstens eine stetige Funktion.

²⁴Die wesentliche Botschaft: Sind X, Y Banachräume, so ist jeder einigermaßen vernünftige Operator $T : X \rightarrow Y$ stetig, denn die Bedingung der Abgeschlossenheit bedeutet hier lediglich, dass aus $x_n \rightarrow x$ und $Tx_n \rightarrow y$ schon $Tx = y$ folgt.

3 Kompaktheit und kompakte Operatoren

Bemerkung und Definition 3.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt X

1. **folgenkompakt** oder kurz **kompakt**, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat.
2. **präkompakt** oder auch **total beschränkt**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F \subset X$ mit $X = \bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x)$ existiert.

Weiter heißt $M \subset X$ **kompakt** bzw. **präkompakt**, falls $(M, d|_{M \times M})$ kompakt bzw. präkompakt ist. Schließlich heißt M **relativ kompakt**, falls jede Folge in M eine in X konvergente Teilfolge besitzt. Es gilt damit ([Ü]): M ist relativ kompakt genau dann, wenn \overline{M} kompakt ist. Außerdem ist jede kompakte Teilmenge abgeschlossen in X .

Da Cauchyfolgen mit konvergenter Teilfolge konvergieren, sind kompakte Räume vollständig. Präziser gilt

Satz 3.2 *Ein metrischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.*

Beweis. \Rightarrow Angenommen, es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $X \neq \bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x)$ für alle endlichen Mengen $F \subset X$. Wir definieren induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X so, dass $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für alle j, k mit $j \neq k$ gilt. Dazu wählen wir $x_1 \in X$ beliebig und nehmen an, dass wir $x_1, \dots, x_n \in M$ mit $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für $j, k = 1, \dots, n, j \neq k$ bereits definiert haben. Nach Annahme existiert dann ein $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(x_j)$. Mit $x_{n+1} := x$ ist also $d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ für $j = 1, \dots, n$. Damit ist (x_n) wie gewünscht. Die Folge (x_n) hat keine konvergente Teilfolge, also Widerspruch.

\Leftarrow Da X präkompakt ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $F_n \subset X$ mit

$$X = \bigcup_{y \in F_n} U_{1/n}(y).$$

Es sei $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Da F_1 endlich ist, existiert ein $y_1 \in F_1$ so, dass

$$I_1 := \{j \in \mathbb{N} : x_j \in U_1(y_1)\}$$

unendlich ist. Entsprechend existiert ein $y_2 \in F_2$ so, dass

$$I_2 := \{j \in I_1 : x_j \in U_{1/2}(y_2)\}$$

unendlich ist. Induktiv erhält man auf diese Weise eine Folge (y_n) und eine Folge (I_n) unendlicher Mengen mit $I_{n+1} \subset I_n \subset \mathbb{N}$ mit $x_j \in U_{1/n}(y_n)$ für $j \in I_n$. Setzt man $j_0 := 1$ und wählt für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $j_k \in I_k$ mit $j_k > j_{k-1}$, so ist $j_k \geq k$ und $x_{j_m} \in U_{1/k}(y_k)$ für $m \geq k$, also $d(x_{j_m}, x_{j_{m'}}) < 2/k$ für $m, m' \geq k$ und damit (x_{j_k}) eine Cauchy-Folge in X . Da (X, d) vollständig ist, ist (x_{j_k}) konvergent. \square

Bemerkung 3.3 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Als Folgerung aus Satz 3.2 ergibt sich: Jede relativ kompakte Teilmenge ist präkompakt und im Fall, dass X vollständig ist, sind relative Kompaktheit und Präkompaktheit äquivalent.

Denn: Ist $M \subset X$ relativ kompakt, so ist \overline{M} kompakt, also auch präkompakt. Ist $\varepsilon > 0$, so existiert eine endliche Menge $F \subset \overline{M}$ mit $\overline{M} \subset \bigcup_{x \in F} U_{\varepsilon/2}(x)$.²⁵ Wählt man zu $x \in F$ ein $y \in M$ mit $d(x, y) < \varepsilon/2$, so ist $U_{\varepsilon}(y) \supset U_{\varepsilon/2}(x)$. Damit kann M mit endlich vielen ε -Kugeln mit Mittelpunkten in M überdeckt werden. Ist X vollständig, so ist \overline{M} für alle $M \subset X$ vollständig. Ist dabei M präkompakt, so ist auch \overline{M} präkompakt, also dann auch kompakt.

In normierten Räumen sind präkompakte Teilmengen stets beschränkt, da $\bigcup_{x \in F} U_1(x) = F + U_1(0)$ für endliche F beschränkt ist. Ist X endlich-dimensional, so ist umgekehrt auch jede beschränkte Teilmenge prä- und damit relativ kompakt (Satz von Bolzano-Weierstraß, [Ü]), also eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist (Satz von Heine-Borel). Im Fall $\dim(X) = \infty$ ist die Situation dramatisch anders:

Satz 3.4 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:

- a) B_X ist kompakt,
- b) B_X ist präkompakt.
- c) $\dim(X) < \infty$,

Beweis. c) \Rightarrow a) folgt aus dem Satz von Heine-Borel und a) \Rightarrow b) aus Satz 3.2.

b) \Rightarrow c): Es sei $F \subset B_X$ endlich mit

$$B_X \subset \bigcup_{x \in F} U_{1/2}(x) = F + 2^{-1}U_1(0) \subset F + 2^{-1}B_X.$$

Wir setzen $L := \text{span } F$. Wegen $L + 2^{-1}L = L$ gilt

$$B_X \subset L + 2^{-1}B_X \subset L + 2^{-1}(L + 2^{-1}B_X) = L + 4^{-1}B_X,$$

also induktiv $B_X \subset L + 2^{-k}B_X$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $x \in B_X$, so existiert damit eine Folge (x_k) in L mit $\|x - x_k\| \leq 1/2^k$ für $k \in \mathbb{N}$, also $x_k \rightarrow x$. Da L endlich-dimensional und damit ein Banachraum ist, ist L abgeschlossen in X . Also folgt $x \in L$ und damit $B_X \subset L$. Folglich ist $X = \bigcup_{r>0} r B_X \subset L$, also $X = L$. \square

Bemerkung 3.5 1. Sind X und Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig und $M \subset X$ (relativ) kompakt, so ist die Bildmenge $f(M)$ ebenfalls (relativ) kompakt ([Ü]); eine Aussage, die für die gesamte Analysis von fundamentaler Bedeutung ist.

²⁵Die Kugeln $U_{\delta}(x)$ werden hier in X betrachtet.

2. Es seien X ein normierter Raum und $A, B \subset X$ (relativ) kompakt. Aus der Stetigkeit von $X \ni x \mapsto \lambda x \in X$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ folgt mit 1., dass auch λA (relativ) kompakt ist. Außerdem ist $A \times B$ (relativ) kompakt in $X \oplus X$ ([Ü]). Da die Addition $X \oplus X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ stetig ist, folgt wieder mit 1., dass auch $A + B$ (relativ) kompakt ist.

Bemerkung und Definition 3.6 Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ linear. Ist X endlich-dimensional, so ist B_X kompakt und T stetig. Damit ist auch das Bild $T(B_X)$ der Einheitskugel kompakt. Für allgemeine X heißt T **kompakt**, falls $T(B_X) \subset Y$ relativ kompakt ist. Wir setzen

$$K(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y : T \text{ linear und kompakt}\}$$

und $K(X) := K(X, X)$. Da relativ kompakte Mengen in normierten Räumen beschränkt sind, ist $K(X, Y) \subset L(X, Y)$. Ist $\dim(X) = \infty$, so ist nach Satz 3.4 die identische Abbildung $\text{id}_X \in L(X)$ nicht kompakt.

Satz 3.7 Es seien X, Y normierte Räume. Dann gilt

1. $K(X, Y)$ ist ein Teilraum von $L(X, Y)$.
2. Ist Y ein Banachraum, so ist $K(X, Y)$ abgeschlossen in $(L(X, Y), \|\cdot\|)$.²⁶

Beweis. 1. Es seien $T, S \in K(X, Y)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt $(T + S)(B_X) \subset T(B_X) + S(B_X)$ und $(\lambda T)(B_X) = \lambda(T(B_X))$. Nach Bemerkung 3.5 sind $(T + S)(B_X)$ und $(\lambda T)(B_X)$ relativ kompakt.

2. Es sei (T_n) eine Folge in $K(X, Y)$ mit $T_n \rightarrow T$ in $L(X, Y)$. Da Y ein Banachraum ist, reicht es nach Bemerkung 3.3 zu zeigen, dass $T(B_X)$ präkompakt ist. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T - T_N\| < \varepsilon$. Für $x \in B_X$ folgt

$$Tx = (T - T_N)x + T_Nx \in U_\varepsilon(0) + T_N(B_X).$$

Da $T_N(B_X)$ relativ kompakt und damit nach Bemerkung 3.3 auch präkompakt ist, existiert eine endliche Menge $F \subset Y$ mit $T_N(B_X) \subset \bigcup_{y \in F} U_\varepsilon(y)$. Hieraus folgt

$$T(B_X) \subset U_\varepsilon(0) + T_N(B_X) \subset U_\varepsilon(0) + \bigcup_{y \in F} U_\varepsilon(y) \subset \bigcup_{y \in F} U_{2\varepsilon}(y).$$

□

Satz 3.8 Es seien X, Y, Z normierte Räume. Sind $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$ und S oder T kompakt, so ist auch ST kompakt.²⁷

²⁶Nach Bem. 1.4 und Bem. und Def. 1.9 ist also $(K(X, Y), \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

²⁷Wir schreiben im Weiteren oft kurz ST statt $S \circ T$.

Beweis. Ist T kompakt, so ist $T(B_X) \subset Y$ relativ kompakt. Da $S : Y \rightarrow Z$ stetig ist, ist auch $(ST)(B_X) = S(T(B_X))$ relativ kompakt. Ist S kompakt, so ist $S(rB_Y) = rS(B_Y)$ relativ kompakt für alle $r > 0$. Da $T \in L(X, Y)$ ist, existiert ein $r > 0$ mit $T(B_X) \subset rB_Y$. Damit ist auch $S(T(B_X)) \subset S(rB_Y)$ relativ kompakt. \square

Ist (S, d) ein kompakter metrischer Raum, so ist $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$ nach Bemerkung 1.5 ein Banachraum. Wir wollen eine wichtige Aussage über die Kompaktheit gewisser Teilmengen von $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$ beweisen.

Definition 3.9 Sind (S, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{F} \subset C(S)$, so heißt \mathcal{F} **gleichgradig stetig** an $t \in S$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ für alle $s \in U_\delta(t)$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Ist \mathcal{F} gleichgradig stetig an allen $t \in S$, so heißt \mathcal{F} kurz gleichgradig stetig.

Satz 3.10 (Arzelà-Ascoli) *Es seien S ein kompakter Raum und $\mathcal{F} \subset C(S)$. Ist \mathcal{F} gleichgradig stetig und $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(s)| < \infty$ für alle $s \in S$, so ist \mathcal{F} relativ kompakt in $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.3 genügt es, zu zeigen, dass \mathcal{F} präkompakt ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $t \in S$ existiert ein $\delta_t = \delta_{t, \varepsilon} > 0$ so, dass $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ für alle $s \in U_{\delta_t}(t)$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt. Da S kompakt ist und $S = \bigcup_{t \in S} U_{\delta_t}(t)$ gilt, existiert eine endliche Menge $T \subset S$ mit²⁸

$$S = \bigcup_{t \in T} U_{\delta_t}(t).$$

Da T endlich ist, ist der Raum $X := \text{Abb}(T, \mathbb{C})$ endlich-dimensional. Wir betrachten auf X die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ und definieren $p : \mathcal{F} \rightarrow X$ durch

$$p(f) = f|_T \quad (f \in \mathcal{F}).$$

Da $\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$ für alle $t \in S$ beschränkt ist, ist auch $p(\mathcal{F}) \subset X$ beschränkt und damit präkompakt. Folglich existiert eine endliche Menge $F \subset p(\mathcal{F})$ mit

$$p(\mathcal{F}) \subset \bigcup_{h \in F} U_\varepsilon(h).$$

Wir wählen $G \subset \mathcal{F}$ endlich mit $p(G) = F$. Ist nun $f \in \mathcal{F}$, so existiert ein $g \in G$ mit $\|p(f) - p(g)\|_\infty < \varepsilon$, also $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in T$. Ist $s \in S$ beliebig, so ist $s \in U_{\delta_t}(t)$ für ein $t = t_s \in T$. Für dieses t gilt

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |g(s) - g(t)| < \varepsilon,$$

²⁸Ein metrischer Raum X heißt überdeckungskompakt, falls zu jeder Familie $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ offener Mengen mit $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ eine endliche Menge $J \subset I$ existiert mit $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Wir verwenden hier, dass Kompaktheit Überdeckungskompaktheit impliziert; siehe etwa Müller, J., Konzepte der Funktionentheorie, Springer Spektrum, 2018, Satz 6.1.7

also

$$|f(s) - g(s)| \leq |f(s) - f(t)| + |f(t) - g(t)| + |g(t) - g(s)| < 3\varepsilon.$$

Folglich ist $\|f - g\|_\infty \leq 3\varepsilon$ und damit $\mathcal{F} \subset \bigcup_{g \in G} U_{4\varepsilon}(g)$. \square

Bemerkung 3.11 Es seien S ein kompakter metrischer Raum, X ein normierter Raum und $T \in L(X, C(S))$. Dann ist $\sup_{x \in B_X} |Tx(s)| \leq \sup_{x \in B_X} \|Tx\|_\infty = \|T\|$ für $s \in S$. Ist $T(B_X)$ gleichgradig stetig, so ist nach dem Satz von Arzelà-Ascoli $T(B_X)$ relativ kompakt, also T kompakt.

Beispiel 3.12 Es seien $S \subset \mathbb{C}$ kompakt, $I = [a, b]$ und $k \in C(S \times I)$. Dann ist durch

$$(Kf)(s) := \int_a^b f(t)k(s, t) dt \quad (s \in S, f \in L_1(I))$$

ein kompakter linearer Operator $K : L_1(I) \rightarrow C(S)$ definiert.

Denn: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $S \times I$ kompakt ist, ist k gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit

$$|k(s, t) - k(s', t)| < \varepsilon \quad (|s - s'| < \delta, t \in I).$$

Hieraus folgt für alle $f \in L_1(I)$ und alle s, s' mit $|s - s'| < \delta$

$$|Kf(s) - Kf(s')| \leq \int_a^b |f(t)| |k(s, t) - k(s', t)| dt \leq \varepsilon \|f\|_1.$$

Dies zeigt zunächst $Kf \in C(S)$ und dann auch, dass $K(B_{L_1(I)}) \subset C(S)$ gleichgradig stetig ist. Offensichtlich ist K linear. Schließlich gilt für $f \in B_{L_1(I)}$

$$|Kf(s)| \leq \int_a^b |f(t)| |k(s, t)| dt \leq \|k\|_\infty \cdot \|f\|_1 \leq \|k\|_\infty \quad (s \in S).$$

Damit ist K stetig mit $\|K\| \leq \|k\|_\infty$. Nach Bemerkung 3.11 ist K kompakt.

4 Dualität und Sätze von Hahn-Banach

Schon der Name deutet darauf hin, dass in der Funktionalanalysis Funktionale eine zentrale Rolle spielen. Wir wollen zunächst der Frage nachgehen, wie die Dualräume der von uns meist betrachteten Banachräume aussehen.

Bemerkung und Definition 4.1 Es seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $j : X \rightarrow Y$ heißt **isometrisch**, falls $d_Y(j(x), j(x')) = d_X(x, x')$ für $x, x' \in X$ gilt. Insbesondere sind isometrische Abbildungen stetig und injektiv. Existiert eine Isometrie j , so sagt auch, dass X (vermittels j) **isometrisch eingebettet** in Y ist. Sind $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, so heißt $j : X \rightarrow Y$ **normerhaltend**, falls $\|j(x)\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt. Normerhaltende Abbildungen mit $j(x) - j(y) = j(x - y)$ sind isometrisch.

Oft kann man relativ leicht natürliche Vertreter linearer Funktionale ausmachen. Das Problem besteht dann meist darin, zu zeigen, dass man damit alle erfasst. Wir betrachten als Ausgangspunkt unitäre Räume X . Ist $|\cdot|$ die induzierte Norm, so folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $\langle \cdot, y \rangle \in X'$ für $y \in X$ und

$$\|\langle \cdot, y \rangle\| = |y|$$

([Ü]). Damit ist die Abbildung $j : X \rightarrow X'$, definiert durch $j(y) := \langle \cdot, y \rangle$ für $y \in X$, normerhaltend und nach Definition des Skalarproduktes antilinear²⁹, also auch isometrisch. Folglich ist X mittels j antilinear isometrisch in sein Dual X' eingebettet. Ist X ein Hilbertraum, so ist X in diesem Sinne sogar zu sich selbst dual, denn es gilt

Satz 4.2 (Rieszscher Darstellungssatz für Hilberträume)

Ist X ein Hilbertraum, so ist die Einbettung j surjektiv, d. h. zu jedem $x' \in X'$ existiert ein $y \in X$ mit $x' = \langle \cdot, y \rangle$.

Beweis. Es sei $x' \in X'$. Ist $x' = 0$, so ist $j(0) = x'$. Ist $x' \neq 0$, so ist x' surjektiv. Wir wählen ein $z \in X$ mit $x'(z) = 1$. Dann ist für alle $x \in X$

$$x'(x - x'(x)z) = x'(x) - x'(x) = 0,$$

d. h. $x - x'(x)z \in \ker(x') =: L$. Da x' stetig ist, ist $L \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum, also $(L, |\cdot|)$ ein Banachraum. Nach dem Projektionssatz (Satz 1.15) ist $0 \neq z_L := z - P_L z \perp L$ und mit $\alpha := \langle z, z_L \rangle$ dann

$$0 = \langle x - x'(x)z, z_L \rangle = \langle x, z_L \rangle - \alpha x'(x),$$

also

$$\alpha x'(x) = \langle x, z_L \rangle \quad (x \in X).$$

Für $x = z_L$ ergibt sich $\alpha x'(z_L) = \langle z_L, z_L \rangle > 0$. Also ist $\alpha \neq 0$ und damit $j(y) = x'$ für $y := (1/\alpha)z_L$. \square

²⁹ $T : X \rightarrow Y$ heißt antilinear, falls $T(x) + T(y) = T(x + y)$ und $T(\lambda x) = \bar{\lambda}T(x)$ für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

Bemerkung 4.3 Ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, so ist für $p, q \in (1, \infty)$ mit $p + q = pq$ und jedes $h \in L_q(\mu)$ durch

$$j(h)(f) := \int fh d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

ein Funktional $j(h) \in L_p(\mu)'$ gegeben mit $\|j(h)\| = \|h\|_q$.

Denn: Es sei $h \in L_q(\mu)$. Zunächst ist $\langle \cdot, h \rangle$ linear. Die Hölder-Ungleichung besagt, dass

$$|j(h)(f)| \leq \|h\|_q \|f\|_p \quad (f \in L_p(\mu))$$

gilt. Damit ist $j(h)$ beschränkt mit Operatornorm $\leq \|h\|_q$. Für $h \neq 0$ und

$$f := |h|^{-1} \bar{h} (\|h\|_q^{-1} |h|)^{q/p}$$

rechnet man $\|f\|_p = 1$ und $\int fh d\mu = \|h\|_q$ nach ([Ü]). Also ist $\|j(h)\| = \|h\|_q$.

Damit ist $L_q(\mu)$ mittels j linear isometrisch eingebettet in $L_p(\mu)'$. Im Fall $p = 2$ ist $q = 2$ und $(f, h) \mapsto \int f \bar{h} d\mu$ das übliche Skalarprodukt in $L_2(\mu)$. Also ist in diesem Fall j nach Satz 4.2 surjektiv. Unter Verwendung weitergehender Hilfsmittel aus der Maßtheorie (insbesondere dem Satz von Radon-Nikodym) kann man mit einiger Anstrengung zeigen, dass j auch für beliebige $1 < p < \infty$ surjektiv ist.³⁰

Bemerkung 4.4 Es sei (S, d) ein kompakter metrischer Raum. Sind μ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}(S)$ und $h : S \rightarrow \mathbb{C}$ messbar mit $|h| = 1$, so ist durch

$$(h\mu)(A) := \int_A h d\mu \quad (A \in \mathcal{B}(S))$$

ein komplexes Maß³¹ gegeben. Wegen

$$\left| \int fh d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \leq \mu(S) \|f\|_\infty \quad (f \in C(S))$$

definiert

$$j(h\mu)(f) := \int fh d\mu \quad (f \in C(S))$$

ein Funktional $j(h\mu) \in (C(S), \|\cdot\|_\infty)'$ mit $\|j(h\mu)\| \leq \mu(S)$. Man kann wieder zeigen, dass $\|j(h\mu)\| = \mu(S)$ gilt und dass jedes stetige Funktional auf $C(S)$ von der Form $j(h\mu)$ ist. Dies ist die zentrale Aussage des (tiefliegenden) Rieszschen Darstellungssatzes für $C(S)$.³²

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Fortsetzbarkeit linearer Funktionale.

Definition 4.5 Es sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} . Eine Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **sublinear**, falls $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für $x, y \in X$ und $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ für $\alpha \geq 0$ und $x \in X$ gilt. Insbesondere sind Halbnormen sublinear.

³⁰Ein Beweis findet sich etwa in D. Werner, Funktionalanalysis, 5. Aufl., Springer, 2005, Satz II 2.4

³¹ein komplexes Maß ist eine σ -additive Mengenfunktion.

³²siehe wieder etwa D. Werner, Funktionalanalysis, 5. Aufl., Springer, 2005, jetzt Satz II 2.5

Satz 4.6 (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach)

Es seien X ein linearer Raum über \mathbb{K} und $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear. Weiterhin seien $L \subset X$ ein Teilraum und $f \in L^*$ so, dass $\operatorname{Re} f \leq p$ auf L . Dann existiert ein $F \in X^*$ mit $F|_L = f$ und $\operatorname{Re} F \leq p$ auf X . Sind p eine Halbnorm und $f \in L'$, so ist $F \in X'$ mit $\|F\| = \|f\|$.

Beweis. 1. Wir setzen

$$\mathcal{A} := \{g \in (D(g))^* : D(g) \supset L, g|_L = f, \operatorname{Re} g \leq p\}$$

und definieren eine Relation \subset auf \mathcal{A} durch $g_1 \subset g_2$, falls $D(g_1) \subset D(g_2)$ und $g_2|_{D(g_1)} = g_1$, also $G(g_1) \subset G(g_2)$, gilt. Man sieht leicht, dass \subset eine Halbordnung auf \mathcal{A} ist. Es sei \mathcal{B} eine Kette in \mathcal{A} . Dann ist durch

$$D(g) := \bigcup_{h \in \mathcal{B}} D(h)$$

und $g(x) := h(x)$ für $x \in D(h)$ eine Funktion $g : D(g) \rightarrow \mathbb{K}$ wohldefiniert.

Denn: Ist $x \in D(h_1) \cap D(h_2)$ für $h_1, h_2 \in \mathcal{B}$, so ist $h_1 \subset h_2$ oder $h_2 \subset h_1$. Gilt etwa $h_1 \subset h_2$, so ist $D(h_1) \subset D(h_2)$ und $h_2|_{D(h_1)} = h_1$, also $h_1(x) = h_2(x)$.

Ähnlich sieht man, dass $D(g)$ ein linearer Teilraum von X ist und dass $g : D(g) \rightarrow \mathbb{K}$ linear ist. Außerdem gilt $\operatorname{Re} g \leq p$ auf $D(g)$. Schließlich ist $D(h) \subset D(g)$ und $g|_{D(h)} = h$ für alle $h \in \mathcal{B}$. Damit ist g obere Schranke von \mathcal{B} . Nach dem Zornschen Lemma besitzt \mathcal{A} ein maximales Element F .

Wir zeigen: $U := D(F) = X$. Dann ist F wie gewünscht, da $F \in \mathcal{A}$. Den Beweis führen wir nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ läßt sich relativ leicht darauf zurückführen. Man verwendet dabei: Ist g ein \mathbb{C} -lineares Funktional, so ist $\operatorname{Re} g$ ein \mathbb{R} -lineares Funktional, und es gilt $g = \operatorname{Re} g - i \operatorname{Re} g(i \cdot)$.

Angenommen, es ist $U \neq X$. Wir fixieren ein $a \in X \setminus U$. Dann gilt für $x, u \in U$

$$F(x) + F(u) = F(x + u) = F(x + a + u - a) \leq p(x + a) + p(u - a),$$

also

$$F(u) - p(u - a) \leq p(x + a) - F(x).$$

Mit

$$c := \sup_{u \in L} (F(u) - p(u - a))$$

ergibt sich $c \leq p(x + a) - F(x)$ und $F(x) - p(x - a) \leq c$, also

$$F(x) \pm c \leq p(x \pm a) \quad (x \in U). \quad (4.1)$$

Wir setzen $U_a := U \oplus (\mathbb{R} \cdot a)$ ³³ und definieren $F_a = F_{a,c} : U_a \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_a(x + ta) := F(x) + tc \quad (x \in U, t \in \mathbb{R}).$$

³³Ist X ein linearer Raum und sind $U, V \subset X$ Teilräume, so schreibt man $U \oplus V$, falls die Summe $U + V$ direkt ist, also $U \cap V = \emptyset$ gilt.

Dann ist F_a linear mit $F_a|_L = F$. Aus (4.1) folgt für $t \neq 0$

$$F_a(x + ta) = |t| F_a(|t|^{-1}x + \text{sign}(t)a) \leq |t| p(|t|^{-1}x + \text{sign}(t)a) = p(x + ta).$$

Also ist $F_a \in \mathcal{A}$ mit $F \subset F_a$ sowie $U_a \neq U$, was der der Maximilität von F widerspricht.
2. Ohne Einschränkung sei $f \neq 0$ und $\|f\| = 1$ (sonst betrachte man $f/\|f\|$). Dann ist $\text{Re } f \leq |f| \leq p$. Da p sublinear ist, existiert nach 1. ein $F \in X^*$ mit $F|_L = f$ und $\text{Re } F \leq p$. Ist $x \in X$, so existiert ein $\gamma \in \mathbb{K}$ mit $|\gamma| = 1$ und $|F(x)| = \gamma F(x)$, also

$$|F(x)| = \gamma F(x) = F(\gamma x) = \text{Re } F(\gamma x) \leq p(\gamma x) = |\gamma| p(x) = p(x).$$

Damit ist $\|F\| \leq 1$. Klar ist, dass $\|F\| \geq \|f\| = 1$ gilt. \square

Wir schreiben im Weiteren für normierte Räume und $x' \in X'$ oft $\langle \cdot, x' \rangle$ statt x' . Außerdem schreiben wir $x' \perp L$, falls $x'|_L = 0$ gilt.³⁴

Satz 4.7 (Trennungssatz von Hahn-Banach)

Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $x \in X$. Ist $L \subset X$ ein Teilraum, so existiert ein $x' \in B_{X'}$ mit $\langle x, x' \rangle = \text{dist}(x, L)$ und $x' \perp L$. Außerdem gilt³⁵

$$\|x\| = \max_{x' \in B_{X'}} |\langle x, x' \rangle|.$$

Beweis. Ist $d := \text{dist}(x, L) = 0$, so ist $x' = 0$ passend. Es sei also $d > 0$. Wir betrachten $L_x := L \oplus (\mathbb{K} \cdot x)$ definieren $f_x : L_x \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f(u + \lambda x) := \lambda d \quad (u \in L, \lambda \in \mathbb{K}).$$

Dann ist f linear mit $f(x) = d$ und $f \perp L$. Für $\lambda \neq 0$ und $u \in L$ gilt

$$\|u + \lambda x\| = |\lambda| \|\lambda^{-1}u + x\| = |\lambda| \|x - (-\lambda^{-1}u)\| \geq |\lambda| d = |f(u + \lambda x)|.$$

Also ist $\|f\| \leq 1$. Aus Satz 4.6 folgt damit die erste Behauptung. Nach der Definition der Operatornorm ist $\|x\| \geq \sup_{x' \in B_{X'}} |\langle x, x' \rangle|$. Wegen $\|x\| = \text{dist}(x, \{0\})$ ergibt sich = und max statt sup aus der ersten Aussage mit $L = \{0\}$. \square

Bemerkung 4.8 Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und L ein Teilraum. Nach Satz 4.7 existiert zu jedem $x \notin \bar{L}$ ein $x' \in X'$ mit $\langle x, x' \rangle \neq 0$ und $x' \perp L$. Insbesondere ist damit L dicht in X , wenn aus $x' \in X'$ und $x' \perp L$ schon $x' = 0$ folgt. Wegen der Stetigkeit von x' ist die Bedingung auch notwendig dafür, dass L dicht ist, was aber weniger prickelnd ist.

³⁴Die an das Skalarprodukt angelehnten Schreibweisen erweisen sich als recht suggestiv. Man spricht bei (X, X') von einer dualen Paarung; siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Duale_Paarung.

³⁵Nach Definition der Operatornorm ist $\|x'\| = \sup_{x \in B_X} |\langle x, x' \rangle|$. Hier hat man die „duale“ Aussage, sogar mit max statt sup!

Interessante Anwendungen ergeben sich etwa in der Approximationstheorie. Ein typisches Beispiel ist der folgende Spezialfall des Satzes von Mergelyan, der eine wesentliche Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes für (algebraische) Polynome darstellt:

Satz 4.9 *Es sei $S \subset \mathbb{C}$ kompakt mit $\lambda_2(S) = 0$ und zusammenhängendem Komplement $\mathbb{C} \setminus S$.³⁶ Dann ist die Menge der Polynome $\text{span}\{s \mapsto s^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$.*

Beweisskizze. Wir schreiben $e_k(s) := s^k$ für $s \in S$, $k \in \mathbb{N}_0$. Nach Bemerkung 4.8 reicht es, zu zeigen: Ist $x' \in C(S)'$ mit $x'(e_k) = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $x' = 0$.

Die Cauchy-Transformierte $c = c_{x'} : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ von x' ist definiert durch

$$c(z) := x'(1/(z - e_1)) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus S)$$

(man beachte $s \mapsto 1/(z - s)$ ist stetig auf S). Für $|z| > \max_{s \in S} |s|$ gilt mit geometrischer Reihe wegen $e_k = e_1^k$

$$\frac{1}{z - e_1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - e_1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} e_k$$

in $C(S)$ und damit $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} x'(e_k) = 0$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz für $C(S)$ existiert ein komplexes Maß $h\mu$ mit $\int fh d\mu = \langle f, x' \rangle$ für $f \in C(S)$, also insbesondere

$$c(z) = \int \frac{h(s) d\mu(s)}{z - s} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus S).$$

Mit Differenziation von Parameterintegralen kann man zeigen, dass c stetig komplex differenzierbar ist. Nach den Identitätssatz³⁷ gilt dann $c = 0$ auf $\mathbb{C} \setminus S$. Mit $\lambda_2(S) = 0$ folgt daraus, dass $h\mu = 0$, also $x' = 0$ ist.³⁸ \square

Wir kommen jetzt zu einer weiteren Version eines Hahn-Banach-Satzes, bei dem es um die Trennung konvexer Mengen geht.

Bemerkung und Definition 4.10 Es sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} , und es sei $A \subset X$. Dann heißt die Abbildung $p_A : X \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$p_A(x) := \inf\{r > 0 : x \in rA\} = \inf\{r > 0 : x/r \in A\} \quad (x \in X),$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$, **Minkowski-Funktional** von A . Aus der Definition ergibt sich sofort: Aus $B \subset A$ folgt $p_A \leq p_B$ und für $\alpha > 0$ ist $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$ (mit $\alpha \infty := \infty$). Ist X normiert, so gilt $p_{U_\delta(0)}(x) = \|x\|/\delta$ und damit im Fall $U_\delta(0) \subset A$ auch $p_A \leq \|\cdot\|/\delta$.

³⁶Ein metrischer Raum heißt zusammenhängend, falls X und \emptyset die einzigen offen und abgeschlossenen Mengen sind.

³⁷siehe etwa <https://www.math.uni-trier.de/~mueller/Funktionentheorie/Funktionentheorie2014.pdf>, Abschnitt 1

³⁸siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/Funktionentheorie/HFT_2019.pdf, Satz 8.8. Der Beweis ist also kurz, aber keineswegs elementar, da er neben dem Satz von Hahn-Banach in Form von Bemerkung 4.8 den Rieszschen Darstellungssatz für $C(S)$ und die Aussage über die Eindeutigkeit von Cauchy-Transformierten nutzt.

Bemerkung 4.11 Sind X normiert und $C \subset X$ eine konvexe Nullumgebung, so gilt:

1. Das Minkowski-Funktional p_C ist sublinear.

Denn: Wegen $p_C(0) = 0$ reicht es nach Bemerkung und Definition 4.10, die Subadditivität zu zeigen. Dazu seien $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $r, s > 0$ mit $x/r \in C$, $y/s \in C$ und $r \leq p_C(x) + \varepsilon$ sowie $s \leq p_C(y) + \varepsilon$. Also folgt

$$(r + s)^{-1}(x + y) = r(r + s)^{-1}x/r + s(r + s)^{-1}y/s \in C$$

und damit $p_C(x + y) \leq r + s \leq p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

2. Ist C offen, so ist $C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$.

Denn: Es sei $x \in C$. Da C offen ist, existiert ein $r < 1$ mit $x/r \in C$. Also ist $p_C(x) < 1$. Ist umgekehrt $p_C(x) < 1$, so existiert ein $r < 1$ mit $x/r \in C$. Mit $0 \in C$ ist auch $x = rx/r + (1 - r)0 \in C$.

Satz 4.12 Es sei X ein normierter Raum. Ist $U \subset X$ konvex und offen mit $0 \notin U$, so existiert ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re}\langle x, x' \rangle < 0$ für alle $x \in U$.

Beweis. Wir führen den Beweis wieder nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lässt sich wie beim Beweis zu Satz 4.6 darauf zurückführen. Wir fixieren ein $a \in -U$ und setzen $C := U + a$. Dann ist C offen und konvex mit $a \notin C$ und $0 \in C$. Nach Bemerkung 4.11.1 ist $p := p_C$ sublinear. Wir definieren $f \in (\mathbb{R} \cdot a)^*$ durch

$$f(ta) = tp(a) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt $f \leq p$, denn ist $t \leq 0$, so ist $f(ta) \leq 0 \leq p(ta)$, und ist $t > 0$, so ist $f(ta) = tp(a) = p(ta)$. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach (Satz 4.6) existiert ein $x' \in X^*$ mit $x'|_{\mathbb{R} \cdot a} = f$ und $x' \leq p$. Ist $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subset C$, so gilt $p \leq \|\cdot\|/\delta$ nach Bemerkung und Definition 4.10 und damit $\pm x'(x) \leq p(\pm x) \leq \|x\|/\delta$ für alle x , also $x' \in X'$ mit $\|x'\| \leq 1/\delta$. Ist nun $x \in U$, so ist $c := x + a \in C$. Aus Bemerkung 4.11.2 folgt $x'(c) \leq p(c) < 1$ und wegen $a \notin C$ zudem $x'(a) = f(a) = p(a) \geq 1$. Damit ist $x'(x) = x'(c) - x'(a) < 0$. \square

Als Folgerung ergibt sich

Satz 4.13 (Trennungssatz von Hahn-Banach für konvexe Mengen)

Es seien X ein normierter Raum und $D, C \subset X$ disjunkte konvexe Mengen. Ist D offen, so existiert ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re}\langle x, x' \rangle < \operatorname{Re}\langle y, x' \rangle$ für alle $x \in D$ und $y \in C$.

Beweis. Es sei $U := D - C$. Dann ist U konvex und aus $U = \bigcup_{y \in C} (D - y)$ folgt, dass U auch offen ist. Außerdem ist $0 \notin U$. Also existiert nach Satz 4.12 ein $x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re}\langle x, x' \rangle - \operatorname{Re}\langle y, x' \rangle = \operatorname{Re}\langle x - y, x' \rangle < 0 \quad (x \in D, y \in C).$$

\square

5 Resolvente und Spektrum

Kurze Erinnerung an die lineare Algebra: Sind X ein linearer Raum über K und $T : X \rightarrow X$ linear, so heißt $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von T , falls $\lambda I - T$ (mit $I := \text{id}_X$) nicht injektiv ist, also ein $x \in X$ mit $x \neq 0$ und $Tx = \lambda x$ existiert. Man nennt

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ Eigenwert von } T\}$$

das **Punktspektrum** von T .

Definition 5.1 1. Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $C^2(\Omega)$ der Raum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω . Ist L ein Unterraum von $C^2(\Omega)$, so ist der **Laplace-Operator** $\Delta = \Delta_L : L \rightarrow C(\Omega)$ definiert durch

$$\Delta u := \sum_{k=1}^d \partial_k^2 u \quad (u \in C^2(\Omega)).$$

2. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Ist $u : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $u(t, \cdot) \in C^2(\Omega)$, so schreiben wir $(\Delta_x u)(t, x) := \Delta u(t, \cdot)(x)$. Damit heißen

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0$$

Wärmeleitungsgleichung und

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0$$

Wellengleichung.

Bemerkung 5.2 Oft versucht man, Lösungen $u \neq 0$ der Form

$$u(t, x) = v(t)w(x) \quad (t \in I, x \in \Omega)$$

mit $w \in C^2(\Omega)$ zu finden. Bei einem solchen Ansatz spricht man von Trennung der Variablen. Im Falle der Wärmeleitungs- und der Wellengleichung führt Trennung der Variablen auf Eigenwertprobleme für den Ableitungsoperator und den Laplace-Operator:

1. Ist $v \in C^1(I)$, so ist u Lösung der Wärmeleitungsgleichung genau dann wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $v' = \lambda v$ und $\Delta w = \lambda w$.
2. Ist $v \in C^2(I)$, so ist u Lösung der Wellengleichung genau dann wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $v'' = \lambda v$ und $\Delta w = \lambda w$.

Denn: 1. Für $(t, x) \in I \times \Omega$ gilt

$$(\partial_t u - \Delta_x u)(t, x) = v'(t)w(x) - v(t)\Delta w(x). \quad (5.1)$$

Ist also u mit v, w wie angegeben, so erfüllt nach (5.1) u die Wärmeleitungsgleichung. Erfüllt $u = vw$ umgekehrt die Wärmeleitungsgleichung und ist (s, y) so, dass $u(s, y) \neq 0$, also $v(s) \neq 0$ und $w(y) \neq 0$, so folgt aus (5.1) zunächst

$$v'(t) = v(t)\Delta w(y)/w(y) = \lambda v(t) \quad (t \in I)$$

mit $\lambda := \Delta w(y)/w(y)$ und damit wiederum

$$\Delta w(x) = v'(s)w(x)/v(s) = \lambda w(x) \quad (x \in \Omega).$$

2. Hier gilt

$$(\partial_t^2 u - \Delta_x u)(t, x) = v''(t)w(x) - v(t)\Delta w(x).$$

Mit entsprechender Argumentation wie in 1. erhält man die zweite Aussage.

Beispiel 5.3 Es seien $I = [-\pi, \pi]$ und $T : C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$ definiert durch $Tf := f'$ für $f \in C^\infty(I)$. Dann ist $T^2 f = f''$. Für $n \in \mathbb{Z}$ und $g_n := \exp(in \cdot)$ gilt

$$g_n(\pi) = g_n(-\pi) = (-1)^n$$

und $Tg_n = in g_n$ sowie

$$g_n'' = T^2 g_n = -n^2 g_n.$$

Setzt man $C_{\text{per}}^\infty(I) := C^\infty(I) \cap C_{\text{per}}(I)$ und versieht $C_{\text{per}}^\infty(I)$ mit dem Skalarprodukt aus Beispiel 1.22, so ist $\{(2\pi)^{-1/2} g_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $C_{\text{per}}^\infty(I)$. Also hat man eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\Delta : C_{\text{per}}^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$ mit Eigenwerten $-n^2$.

In Anwendungen stellt sich oft die Frage nach Eigenfunktionen w des Laplace-Operators, die die **Dirichlet-Randbedingung** $w|_{\partial\Omega} = 0$ erfüllen.

Beispiel 5.4 Mit $\Omega = (0, \pi)$ und g_n wie in Beispiel 5.3 betrachten wir

$$f_n := \sin(n \cdot) = \text{Im}(g_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist

$$\Delta f_n = f_n'' = -n^2 f_n$$

Außerdem gilt wegen $\overline{g_k} = g_{-k}$

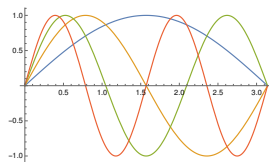
$$f_n f_m = -\frac{1}{4}(g_n - g_{-n})(g_m - g_{-m}) = -\frac{1}{4}(g_{n+m} - g_{n-m} - g_{m-n} + g_{-(n+m)})$$

und wegen $g_{-k}(t) = g_k(-t)$ damit

$$\int_0^\pi f_n f_m = -\frac{1}{4} \left(\int_{-\pi}^\pi e^{i(n+m)t} dt - \int_{-\pi}^\pi e^{i(n-m)t} dt \right) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi/2, & n = m \end{cases}.$$

Also ist $\{(2/\pi)^{1/2} f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(\Omega)$. Tatsächlich ist M eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega)$, wie man unter Verwendung von Beispiel 1.22 und der Tatsache, dass die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L_2(\Omega)$ ist,³⁹ zeigen kann ([Ü]). Also haben wir eine L_2 -Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\Delta : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ gefunden. Man beachte, dass die f_n hier (anders als im Fall von Beispiel 5.3) die Dirichlet-Randbedingung erfüllen.

³⁹siehe etwa J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, 7. Aufl. Springer, 2011, Satz 2.31.

Abbildung 7: f_1, \dots, f_4 .

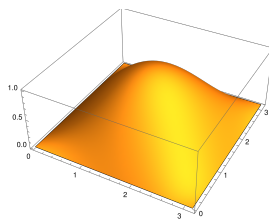
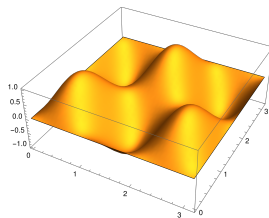
Beispiel 5.5 Es seien $d = 2$, $\Omega = (0, \pi)^2$ und für jedes $(k, m) \in \mathbb{N}^2$

$$f_{k,m}(t, s) := \sin(ks) \sin(mt) = f_k(t)f_m(s) \quad ((s, t) \in \Omega).$$

Hier ist

$$\Delta f_{k,m} = -(k^2 + m^2)f_{k,m} \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

und wieder $(f_{k,m})_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ und damit $f_{k,m} \in H_0(\Omega)$. Aus Beispiel 5.4 und dem Satz von Fubini ergibt sich, dass $\{(2/\pi)f_{k,m} : k, m \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega)$ ist. Also haben wir auch hier eine L_2 -Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\Delta : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ und wieder verschwinden die Funktionen am Rand von Ω .⁴⁰

Abbildung 8: $f_{1,1}$.Abbildung 9: $f_{2,3}$.

Definition 5.6 Es seien X ein Banachraum und T ein abgeschlossener Operator in X .⁴¹ Dann heißt

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T : D(T) \rightarrow X \text{ bijektiv}\}$$

⁴⁰Man kann $f_{k,m}(t, x)$ auch als Lösung der Wellengleichung für $I = (0, \pi)$ und $\Omega = (0, \pi)$ interpretieren.

⁴¹also $T : X \supset D(T) \rightarrow X$ abgeschlossen

Resolventenmenge von T . Die Menge $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T) \supset \sigma_p(T)$ heißt **Spektrum** von T . Weiterhin nennt man die Abbildung $R = R_T : \rho(T) \rightarrow \text{Abb}(X, D(T))$ mit

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} \quad (\lambda \in \rho(T)),$$

Resolvente von T .

Bemerkung 5.7 Ist $\dim(X) < \infty$ und $T : X \rightarrow x$ linear, so ist $\lambda I - T$ injektiv genau dann, wenn $\lambda I - T$ surjektiv ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(\lambda I - T) \neq 0$ ist. Also gilt hier $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ und da $\lambda \mapsto \det(\lambda I - T)$ ein Polynom ist, ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ das Spektrum stets nichtleer. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Situation anders. So hat etwa die Drehung

$$Tx = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

auf \mathbb{R}^2 wegen $\det(\lambda I - T) = \lambda^2 + 1$ keine (reellen) Eigenwerte und damit leeres Spektrum. Im Fall $\dim(X) = \infty$ kann $\sigma_p(T) \neq \sigma(T)$ sein: Ist etwa $X = C[0, 1]$ mit der Max-Norm $\|\cdot\|_\infty$ und $V : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ der **Volterra-Operator**, definiert durch

$$(Vf)(t) = \int_0^t f \quad (t \in [0, 1], f \in C[0, 1]),$$

so gilt $V \in K(X)$ mit $0 \in \sigma(V) \setminus \sigma_p(V)$ ([Ü]).

Satz 5.8 *Es seien X ein Banachraum, T ein abgeschlossener Operator in X . Ist λ kein Eigenwert, so ist $(\lambda I - T)^{-1} : \text{Bild}(\lambda I - T) \rightarrow X$ abgeschlossen. Im Fall $\lambda \in \rho(T)$ ist $R_T(\lambda) \in L(X)$.*

Beweis. Ist (x_n) eine Folge in $D(T)$ mit $x_n \rightarrow x$ und $(\lambda I - T)x_n \rightarrow y$, so gilt

$$Tx_n = \lambda x_n - (\lambda I - T)x_n \rightarrow \lambda x - y.$$

Da T abgeschlossen ist, folgt $x \in D(T)$ und $Tx = \lambda x - y$, also $(\lambda I - T)x = y$. Damit ist auch $\lambda I - T$ abgeschlossen. Ist nun $\lambda I - T$ injektiv, so existiert $(\lambda I - T)^{-1} : \text{Bild}(\lambda I - T) \rightarrow X$. Mit $G(\lambda I - T) \subset X \times X$ ist auch $G((\lambda I - T)^{-1})$ abgeschlossen.⁴² Ist $\lambda \in \rho(T)$, also $\lambda I - T$ sogar bijektiv, so ist $(\lambda I - T)^{-1} : X \rightarrow X$ abgeschlossen. Nach dem Graphensatz (Satz 2.17) ist $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$ \square

⁴²Ist $j : X \oplus X \rightarrow X \oplus X$ definiert durch $j(x, y) := (y, x)$, so ist j stetig und $G(S^{-1}) = j^{-1}(G(S))$ für invertierbare S .

Bemerkung und Definition 5.9 Es seien X ein Banachraum und $T \in L(X)$. Wegen $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ gilt

$$r(T) := \inf\{s \geq 0 : \|T^n\|^{1/n} \leq s \text{ für } n \text{ genügend groß}\} \leq \|T\|.$$

Die Zahl $r(T)$ heißt **Spektralradius** von T . Ist T normerhaltend, so gilt $\|T^n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $r(T) = 1$. Für den Volterra-Operator V rechnet man $\|V\| = 1$ und $r(V) = 0$ nach ([Ü]). Hier ist der Spektralradius also echt kleiner als die Operatornorm.

Bemerkung 5.10 Sind X ein Banachraum und $T \in L(X)$, so ist $I - hT$ für $|h| < 1/r(T)$ invertierbar in $L(X)$ mit

$$(I - hT)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} h^k T^k.$$

Diese Version der geometrischen Reihe nennt man **Neumannsche Reihe**.

Denn: Es sei $s > r(T)$ so, dass $|h|s < 1$. Nach Voraussetzung ist $\|(hT)^n\|^{1/n} \leq |h|s$ für n genügend groß. Nach dem Wurzelkriterium⁴³ und Satz 1.6 ist damit die Reihe $S := \sum_{k=0}^{\infty} h^k T^k$ konvergent in $L(X)$. Aus⁴⁴

$$S(I - hT) \leftarrow \left(\sum_{k=0}^n h^k T^k \right) (I - hT) = I - h^{n+1} T^{n+1} \rightarrow I \quad (n \rightarrow \infty),$$

folgt $S(I - hT) = I$. Entsprechend sieht man $(I - hT)S = I$.

Bemerkung und Definition 5.11 Sind $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, E ein Banachraum und $f : \Omega \rightarrow E$, so heißt f **analytisch** an $a \in \Omega$, falls ein $\delta > 0$ und eine Folge (c_k) in E existieren mit

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^k c_k \quad (|h| < \delta).$$

In diesem Fall ist f beliebig oft differenzierbar auf $U_\delta(a)$ mit $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.⁴⁵ Wie üblich heißt f analytisch, falls f analytisch an allen $a \in \Omega$ ist.

Satz 5.12 Es seien X ein Banachraum und T ein abgeschlossener Operator in X . Dann sind $\rho(T)$ offen und R_T analytisch.⁴⁶ Ist $T \in L(X)$, so gilt zudem $\{\lambda : |\lambda| > r(T)\} \subset \rho(T)$ und

$$R_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} T^k \quad (|\lambda| > r(T)).$$

⁴³etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_GW_WS2020-21.pdf, S. 5.17

⁴⁴Man beachte: Die Multiplikation $L(X) \oplus L(X) \ni (A, B) \rightarrow AB$ ist stetig wegen der Submultiplikativität der Operatornorm.

⁴⁵siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 1.26 und Bem. 1.33, wobei zu beachten ist, dass das Ergebnis auch für E -wertige Funktionen gilt.

⁴⁶falls $\rho(T) \neq \emptyset$

Beweis. Es sei $\rho(T) \neq \emptyset$ und $a \in \rho(T)$. Nach Satz 5.8 ist $S := R(a) \in L(X)$. Ist $|h| \leq 1/r(S)$, so ist $I + hS$ nach Bemerkung 5.10 invertierbar in $L(X)$ mit

$$(I + hS)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h^k S^k.$$

Weiter ist wegen $S^{-1} = aI - T$

$$(I + hS)S^{-1} = S^{-1} + hI = (a + h)I - T,$$

also $(a + h)I - T : D(T) \rightarrow X$ bijektiv und damit $a + h \in \rho(T)$. Außerdem ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h^k S^{k+1} = S(I + hS)^{-1} = ((a + h)I - T)^{-1} = R(a + h).$$

Damit ist a ein innerer Punkt von $\rho(T)$ und R analytisch an a . Ist $T \in L(X)$ und $|\lambda| > r(T)$, so ist nach Bemerkung 5.10 zudem

$$\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$$

invertierbar mit $R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} T^k$. □

Bemerkung 5.13 1. Es seien X ein Banachraum und T ein abgeschlossener Operator in X . Satz 5.12 zeigt, dass das Spektrum $\sigma(T)$ stets abgeschlossen ist, und dass für $T \in L(X)$ zudem

$$\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq r(T)\} = r(T)B_{\mathbb{K}}$$

gilt und damit $\sigma(T)$ insbesondere kompakt ist. Außerdem kann man zeigen: Ist $\dim X = \infty$ und $T \in K(X)$, so ist stets $0 \in \sigma(T)$ ([Ü]). Ist T unstetig, so kann $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und damit $\rho(T) = \emptyset$ sein: Ist etwa $T : C[0, 1] \supset C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ der Ableitungsoperator, also $Tf := f'$, so ist T abgeschlossen nach Beispiel 2.16 und $T \exp(\lambda \cdot) = \lambda \exp(\lambda \cdot)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, also $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$.

2. Schon die Drehung T aus Bemerkung 5.7 zeigt, dass im Fall reeller Banachräume das Spektrum leer sein kann. Das Punktspektrum kann auch in Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ leer sein: Ist etwa V der Volterra-Operator aus Bemerkung 5.7, so ist $r(V) = 0$ nach Beispiel 5.9 und damit $\sigma(V) = \{0\}$ nach 1. und Bemerkung 5.7. Da $0 \notin \sigma_p(V)$ gilt, ist $\sigma_p(V) = \emptyset$.

Wir zeigen abschließend, dass im Fall komplexer Banachräume X das Spektrum stetiger Operatoren stets nichtleer ist. Dabei verwenden wir ein Ergebnis der Funktionentheorie, das einen wesentlichen Unterschied zur reellen Analysis markiert:⁴⁷ Es seien $(E, \|\cdot\|)$ ein

⁴⁷Beide Aussagen ergeben sich als Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel für Kreise; siehe etwa <https://www.math.uni-trier.de/~mueller/Funktionentheorie/Funktionentheorie2014.pdf>, Seiten 6-8. Auch hier ist zu beachten, dass die entsprechenden Aussagen für E -wertige f gelten.

Banachraum und $f : U_\delta(0) \rightarrow E$ stetig komplex differenzierbar. Dann ist f analytisch an 0 mit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k c_k \quad (|z| < \delta)$$

und $c_n = r^{-n} \int f(r\zeta) dm(\zeta)$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $0 < r < \delta$, also

$$\|c_n\| \leq r^{-n} \max_{|z|=r} \|f(z)\| \quad (n \in \mathbb{N}_0, 0 < r < \delta).$$

Mit $\delta = \infty$ ergibt sich der Satz von Liouville: Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow E$ stetig differenzierbar und beschränkt, so gilt $\|c_n\| \leq r^{-n} \|f\|_\infty \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) und damit $c_n = 0$ für alle $n \neq 0$. Also ist f konstant $= c_0 = f(0)$.

Satz 5.14 *Es seien $X \neq \{0\}$ ein komplexer Banachraum und $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ nichtleer und*

$$r(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst die zweite Aussage. Dazu sei

$$M := \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

(mit $\max \emptyset := 0$). Nach Bemerkung 5.13 ist jedenfalls $r(T) \geq M$. Aus Satz 5.12 folgt, dass $f : U_{1/M}(0) \rightarrow L(X)$, definiert durch $f(z) := R(1/z)$ für $z \neq 0$ und $f(0) = 0$, analytisch und damit stetig differenzierbar ist mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k T^{k-1} \quad (|z| < 1/r(T)).$$

Die Vorbemerkung impliziert, dass dies sogar für $|z| < 1/M$ gilt und dass für $s > M$

$$\|T^{n-1}\|^{1/n} \leq s \left(\max_{|z|=1/s} \|f(z)\| \right)^{1/n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

erfüllt ist. Wegen $q^{1/n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ und $q > 0$ folgt $r(T) \leq M$.

2. Ist $\rho(T) = \mathbb{C}$, so ist $1/M = \infty$. Da R analytisch an 0 ist, ist $f : \mathbb{C} \rightarrow L(X)$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist $f = f(0) = 0$, also auch $R = 0$. Insbesondere ist dann $0 = -R(0) = T^{-1}$. Dies impliziert $X = \{0\}$. \square

6 Selbstadjungierte Operatoren

Wir wollen nun eine wichtige Klasse von Operatoren auf Hilberträumen untersuchen.

Bemerkung und Definition 6.1 Es seien X, Y Hilberträume und T ein Operator von X nach Y . Ist T **dicht definiert**, also $D(T) \subset X$ dicht, so setzen wir

$$D(T^*) := \{y \in Y : \langle \cdot, y \rangle \circ T \in D(T)'\}.$$

Ist $y \in D(T^*)$, so existiert nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach (Satz 4.6) ein $x' \in X'$ mit $\langle \cdot, y \rangle \circ T = x'|_{D(T)}$ und nach dem Rieszschen Darstellungssatz (Satz 4.2) ein $u \in X$ mit $x' = \langle \cdot, u \rangle$. Da $D(T) \subset X$ dicht ist, existiert nur ein solches $u \in X$. Dies zeigt, dass durch

$$T^*(y) := u \quad (y \in D(T^*))$$

eine Abbildung $T^* : D(T^*) \rightarrow X$ definiert ist. T^* heißt **Adjungierte** von T . Nach Definition gilt damit

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (x \in D(T), y \in D(T^*)).$$

Außerdem ist T^* linear, also ein Operator von Y nach X .

Satz 6.2 *Es seien X, Y Hilberträume und T ein dicht definierter Operator von X nach Y . Dann ist T^* abgeschlossen und es gilt $\text{Bild}(T)^\perp = \text{Kern}(T^*)$.*

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $D(T^*)$ mit $y_n \rightarrow y$ und $T^*y_n \rightarrow u \in X$. Dann gilt für alle $x \in D(T)$

$$\langle Tx, y \rangle \leftarrow \langle Tx, y_n \rangle = \langle x, T^*y_n \rangle \rightarrow \langle x, u \rangle \quad (n \rightarrow \infty),$$

also $\langle \cdot, y \rangle \circ T = \langle \cdot, u \rangle|_{D(T)}$. Damit ist $y \in D(T^*)$ und $T^*y = u$. Nach Bemerkung 2.15 ist T^* abgeschlossen.

Es sei nun $y \in Y$. Dann ist $y \in \text{Bild}(T)^\perp$ genau dann, wenn $\langle Tx, y \rangle = 0$ für alle $x \in D(T)$, also $\langle \cdot, y \rangle \circ T = 0$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $y \in D(T^*)$ und $T^*y = 0$, also mit $y \in \text{Kern}(T^*)$. \square

Bemerkung 6.3 Es seien X, Y Hilberträume. Ist $T \in L(X, Y)$, so gilt $D(T^*) = Y$. Mit Satz 4.7 und Satz 4.2 ist

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{y \in B_Y} |\langle Tx, y \rangle| = \sup_{y \in B_Y} \sup_{x \in B_X} |\langle T^*y, x \rangle| = \sup_{y \in B_Y} \|T^*y\|.$$

Also ist $T^* \in L(Y, X)$ mit $\|T\| = \|T^*\|$. Aus der Definition ergibt sich $(T + S)^* = T^* + S^*$ und $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$ für $T, S \in L(X, Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Damit ist die Abbildung

$$L(X, Y) \ni T \mapsto T^* \in L(Y, X)$$

antilinear und isometrisch. Wegen

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \overline{\langle T^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^*x \rangle} = \langle (T^*)^*x, y \rangle$$

ist $T^{**} := (T^*)^* = T$. Zudem gilt $\|T^*T\| = \|T\|^2$ ([Ü]).⁴⁸ Sind Z ein weiterer Hilbertraum und $S \in L(Y, Z)$, so ist schließlich ([Ü])

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

Bemerkung und Definition 6.4 Es seien X, Y lineare Räume und T, S Operatoren von X nach Y . Wir schreiben $T \subset S$, falls $D(T) \subset D(S)$ und $S|_{D(T)} = T$ (also $G(T) \subset G(S)$) gilt. Ist $X = Y$ ein Hilbertraum und ist T dicht definiert, so heißt T **symmetrisch**, falls $T \subset T^*$ gilt und **selbstadjungiert** falls $T = T^*$ ist. Jeder selbstadjungierte Operator ist symmetrisch. Ist $D(T) = X$, so ist natürlich T genau dann symmetrisch, wenn T selbstadjungiert ist, und in diesem Fall ist $T = T^*$ abgeschlossen nach Satz 6.2, also nach dem Graphensatz stetig.⁴⁹

Satz 6.5 *Es seien X ein Hilbertraum und T ein dicht definierter Operator in X . Dann sind äquivalent:*⁵⁰

- a) T ist symmetrisch,
- b) $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ für alle $x, y \in D(T)$,

und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- c) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D(T)$.

Beweis. a) \Rightarrow b): Aus $D(T) \subset D(T^*)$ folgt für alle $x \in D(T)$ und $y \in D(T) \subset D(T^*)$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

b) \Rightarrow a): Ist $y \in D(T)$, so gilt $\langle \cdot, y \rangle \circ T = \langle \cdot, Ty \rangle|_{D(T)}$ nach Voraussetzung. Also ist $y \in D(T^*)$ mit $T^*y = Ty$. Da $y \in D(T)$ beliebig war, folgt $D(T) \subset D(T^*)$ und $T^*|_{D(T)} = T$.

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

b) \Rightarrow c): Für alle $x \in D(T)$ ist $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$, also $\langle Tx, x \rangle$ reell.

c) \Rightarrow b): Es seien $x, y \in D(T)$. Dann gilt

$$\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle Tx, x \rangle - \langle Ty, y \rangle \in \mathbb{R}$$

also $\text{Im}\langle Tx, y \rangle = -\text{Im}\langle Ty, x \rangle = \text{Im}\langle x, Ty \rangle$. Mit ix statt x ergibt sich

$$\text{Re}\langle Tx, y \rangle = \text{Im}(i\langle Tx, y \rangle) = \text{Im}\langle T(ix), y \rangle = \text{Im}\langle ix, Ty \rangle = \text{Im}(i\langle x, Ty \rangle) = \text{Re}\langle x, Ty \rangle.$$

Damit ist $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. □

⁴⁸Damit ist $L(X)$ eine C^* -Algebra; vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/C*-Algebra.

⁴⁹Dies ist der Satz von Hellinger-Toeplitz.

⁵⁰Manchmal definiert man symmetrische Operatoren über die Eigenschaft b). In diesen Fall muss man nicht voraussetzen, dass der Operator dicht definiert ist.

Beispiel 6.6 Nicht jeder symmetrische Operator ist selbstadjungiert: Für $I = [-1, 1]$ betrachten wir

$$D(T) := \{f \in C^1(I) : f(-1) = f(1)\}$$

und $T : L_2(I) \supset D(T) \rightarrow L_2(I)$ mit

$$Tf := if' \quad (f \in D(T)).$$

Man kann zeigen, dass $D(T)$ dicht in $L_2(I)$ ist.⁵¹ Wegen $(\bar{g})' = \overline{g'}$ gilt mit partieller Integration

$$\langle Tf, g \rangle = i \int_{-1}^1 f' \bar{g} = if \bar{g} \Big|_{-1}^1 - i \int_{-1}^1 f \bar{g}' = \int_{-1}^1 f(\overline{ig'}) = \langle f, Tg \rangle \quad (f, g \in D(T)).$$

Nach Satz 6.5 ist T symmetrisch. Da T nicht abgeschlossen ist (vgl. Beispiel 2.16), ist T nach Satz 6.2 jedoch nicht selbstadjungiert. Wegen $\text{Bild}(\lambda I - T) \subset C(I) \neq L_2(I)$ ist $\sigma(T) = \mathbb{C}$. Außerdem gilt $\sigma_p(T) = \pi\mathbb{Z}$ ([Ü]).

Satz 6.7 *Es seien X ein Hilbertraum und T ein symmetrischer Operator in X . Dann ist $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ und $(\lambda I - T)^{-1} : \text{Bild}(\lambda I - T) \rightarrow X$ stetig für alle $\lambda \notin \mathbb{R}$. Außerdem gilt*

$$\text{Kern}(\lambda I - T) \perp \text{Kern}(\mu I - T) \quad (\lambda, \mu \in \sigma_p(T), \lambda \neq \mu).$$

Beweis. 1. Ohne Einschränkung sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Normaldarstellung $\alpha + i\beta$. Nach Satz 6.5 gilt $\text{Re}(i\beta \langle x, Tx \rangle) = 0$ für $x \in D(T)$, also

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2 - 2\text{Re}\langle \alpha x, Tx \rangle + \|Tx\|^2 = \|(\alpha I - T)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2.$$

Ist $\beta \neq 0$, so ist damit $\lambda I - T$ injektiv. Mit $y := (\lambda I - T)x$ ist zudem $\|(\lambda I - T)^{-1}y\| \leq |\beta^{-1}| \|y\|$, also $(\lambda I - T)^{-1}$ stetig.

2. Sind λ, μ Eigenwerte, so ist $\mu = \bar{\mu}$ nach 1. Also gilt für $x \in \text{Kern}(\lambda I - T)$ und $y \in \text{Kern}(\mu I - T)$

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \mu \langle x, y \rangle,$$

und damit $(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0$. Ist $\lambda \neq \mu$, so folgt $\langle x, y \rangle = 0$. □

Für selbstadjungierte Operatoren auf (komplexen) Hilberträumen lässt sich Satz 6.7 wesentlich verschärfen.

Satz 6.8 *Es seien X ein Hilbertraum und T ein selbstadjungierter Operator in X . Dann gilt $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

⁵¹siehe etwa J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, 7. Aufl., Springer, 2010, Satz VI 2.31.

Beweis. Es sei $\lambda \notin \mathbb{R}$. Nach Satz 6.7 sind $\lambda I - T$ und $\bar{\lambda}I - T$ injektiv. Weiter ist

$$(\lambda I - T)^* = (\lambda I)^* - T^* = \bar{\lambda}I - T,$$

also mit Satz 6.2

$$\text{Bild}(\lambda I - T)^\perp = \text{Kern}((\lambda I - T)^*) = \text{Kern}(\bar{\lambda}I - T) = \{0\}.$$

Nach Bemerkung 4.8 und Satz 4.2 ist $\text{Bild}(\lambda I - T)$ dicht in X . Mit Satz 6.7 ist $(\lambda I - T)^{-1}$ stetig und nach Satz 6.2 zudem $T(= T^*)$ abgeschlossen, also mit Satz 5.8 auch $(\lambda I - T)^{-1}$. Nach Bemerkung 2.15 ist $\text{Bild}(\lambda I - T) = D((\lambda I - T)^{-1})$ abgeschlossen. Wegen der Dichtigkeit gilt $\text{Bild}(\lambda I - T) = X$ und damit $\lambda \in \rho(T)$. \square

Wir betrachten ab jetzt nur noch Operatoren in $L(X)$. Nach Bemerkung 6.3 ist stets $\|T\| = \sup_{x,y \in B_X} |\langle Tx, y \rangle|$. Für symmetrische T gilt mehr:

Satz 6.9 Sind X ein Hilbertraum und $T \in L(X)$ symmetrisch, so ist

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Beweis. Es ist nur \leq zu zeigen. Mit $d := \sup_{x \in B_X} |\langle Tx, x \rangle|$ ist $|\langle Tu, u \rangle| \leq d\|u\|^2$ für $u \in X$. Sind $x, y \in B_X$, so gilt $|\langle T(x \pm y), x \pm y \rangle| \leq d\|x \pm y\|^2$. Weiter ist

$$\langle T(x + y), x + y \rangle - \langle T(x - y), x - y \rangle = 2\langle Tx, y \rangle + 2\langle Ty, x \rangle = 4\text{Re}\langle Tx, y \rangle,$$

also mit Dreiecksungleichung und Parallelogrammidentität

$$4\text{Re}\langle Tx, y \rangle \leq d(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = 2d(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq 4d.$$

Ist γ mit $|\gamma| = 1$ so, dass $|\langle Tx, y \rangle| = \gamma \langle Tx, y \rangle$, so ergibt sich mit $\gamma x \in B_X$

$$|\langle Tx, y \rangle| = \langle T(\gamma x), y \rangle = \text{Re}\langle T(\gamma x), y \rangle \leq d.$$

Also ist auch $\|T\| = \sup_{x,y \in B_X} |\langle Tx, y \rangle| \leq d$. \square

Für stetige Operatoren auf komplexen Banachräumen existiert nach Satz 5.14 stets ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$. Wir zeigen für kompakte symmetrische Operatoren:

Satz 6.10 Es seien $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $T \in K(X)$ symmetrisch. Dann existiert ein Eigenwert $\lambda \in \{\pm \|T\|\}$.

Beweis. Nach Satz 6.9 existiert eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $|\langle Tx_n, x_n \rangle| \rightarrow \|T\|$ für $n \rightarrow \infty$. Da $\langle Tx_n, x_n \rangle$ reell ist, existieren ein $\lambda \in \{\pm \|T\|\}$ und eine Teilfolge $(x_n)_{n \in J}$ mit

$$\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda \quad (J \ni n \rightarrow \infty),$$

also

$$\|(\lambda I - T)x_n\|^2 = \lambda^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n \rangle + \|Tx_n\|^2 \leq 2\|T\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$$

für $J \ni n \rightarrow \infty$. Da T kompakt ist, existieren eine Teilfolge $(x_n)_{n \in I}$ von $(x_n)_{n \in J}$ und ein $y \in X$ mit $Tx_n \rightarrow y$ für $I \ni n \rightarrow \infty$, also

$$\lambda x_n = (\lambda I - T)x_n + Tx_n \rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty, n \in I).$$

Ohne Einschränkung sei $T \neq 0$ und damit $\lambda \neq 0$. Dann gilt $x_n \rightarrow \lambda^{-1}y$, also auch $Tx_n \rightarrow \lambda^{-1}Ty$ für $I \ni n \rightarrow \infty$. Folglich ist $y = \lambda^{-1}Ty$. Aus $\|x_n\| = 1$ ergibt sich $\|\lambda^{-1}y\| = 1$, also $y \neq 0$. Dies zeigt $\lambda \in \sigma_p(T)$. \square

Bemerkung 6.11 Es seien $I = [a, b]$ und $k \in C(I^2)$. Nach Beispiel 3.12 ist durch

$$(Kf)(s) := \int_a^b f(t)k(s, t)dt \quad (s \in [a, b], f \in L_1(I))$$

ein kompakter Operator $K : L_1(I) \rightarrow C(I)$ definiert. Aus der Hölder-Ungleichung ergibt sich $\|f\|_1 \leq (b-a)^{1/2}\|f\|_2$. Also ist die Einbettung $j_1 : L_2(I) \rightarrow L_1(I)$ mit $j_1(f) := f$ stetig. Außerdem ist wegen $\|f\|_2 \leq (b-a)\|f\|_\infty$ die Einbettung $j_2 : C(I) \rightarrow L_2(I)$ stetig. Nach Satz 3.8 ist also

$$T := T_k := j_2 \circ K \circ j_1 : L_2(I) \rightarrow L_2(I)$$

kompakt. Weiter gilt für $f, g \in L_2(I)$ mit $k^*(t, s) := \overline{k(s, t)}$ nach dem Satz von Fubini⁵²

$$\begin{aligned} \langle T_k f, g \rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b f(t)k(s, t)dt \right) \overline{g(s)} ds = \int_a^b f(t) \left(\int_a^b \overline{k^*(t, s)} \overline{g(s)} ds \right) dt \\ &= \int_a^b f(t) \cdot \overline{(T_{k^*} g)}(t) dt = \langle f, T_{k^*} g \rangle. \end{aligned}$$

Folglich ist $(T_k)^* = T_{k^*}$ und insbesondere T_k im Fall $k = k^*$ symmetrisch. Nach Satz 6.10 existiert im Fall $k = k^*$ ein Eigenwert $\lambda \in \{\pm \|T_k\|\}$.

Bemerkung 6.12 1. Es seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X, Y)$. Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ summierbar in X , so ist aufgrund der Stetigkeit von T die Familie $(Tx_\alpha)_{\alpha \in I}$ summierbar in Y mit $T\left(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in I} Tx_\alpha$ ([Ü]).

2. Sind X ein unitärer Raum, $M \subset X$ ein Orthonormalsystem und (μ_e) eine Familie in \mathbb{K} so, dass $(\mu_e e)$ summierbar ist mit $\sum_{e \in M} \mu_e e = 0$, so ergibt sich aus 1. mit $T = \langle \cdot, f \rangle$

$$0 = \left\langle \sum_{e \in M} \mu_e e, f \right\rangle = \sum_{e \in M} \mu_e \langle e, f \rangle = \mu_f \quad (f \in M).$$

⁵²siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Fubini.

Für $e \in M$ ist $\{e\}$ ein Orthonormalsystem. Mit $P_e := P_{\text{span}\{e\}}$ ist nach (1.5)

$$P_e x = \widehat{x}_e e \quad (x \in X)$$

und damit $\langle P_e x, y \rangle = \widehat{x}_e \langle e, y \rangle = \widehat{x}_e \cdot \overline{\widehat{y}_e} = \langle x, e \rangle \overline{\widehat{y}_e} = \langle x, P_e y \rangle$ für $x, y \in X$, also $P_e^* = P_e$. Ist M eine Orthonormalbasis, so ist nach Satz 1.21 zudem

$$x = \sum_{e \in M} \widehat{x}_e e = \sum_{e \in M} P_e x \quad (x \in X). \quad (6.1)$$

Satz 6.13 *Es seien X ein Hilbertraum, $M \subset X$ eine Orthonormalbasis und $(\lambda_e)_{e \in M}$ eine beschränkte Familie in \mathbb{K} . Dann ist $(\lambda_e P_e x)$ summierbar für alle $x \in X$ und durch*

$$Tx := \sum_{e \in M} \lambda_e P_e x$$

ein Operator $T \in L(X)$ definiert mit $\|T\| = \sup_{e \in M} |\lambda_e|$ und $\sigma_p(T) = \{\lambda_e : e \in M\}$. Weiter gilt $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$ und

$$R(\lambda) = \sum_{e \in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} P_e \quad (\lambda \notin \overline{\sigma_p(T)}).$$

Im Fall $\lambda_e \in \mathbb{R}$ für alle $e \in M$ ist T zusätzlich symmetrisch.

Beweis. Wir setzen $s := \sup_{e \in M} |\lambda_e|$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für $x \in X$ und endliche $E \subset M$

$$\left\| \sum_{e \in E} \lambda_e \widehat{x}_e e \right\|^2 = \sum_{e \in E} |\lambda_e \widehat{x}_e|^2 \leq \max_{e \in E} |\lambda_e|^2 \cdot \sum_{e \in E} |\widehat{x}_e|^2 \leq s^2 \sum_{e \in E} |\widehat{x}_e|^2.$$

Nach der Bessel-Ungleichung ist $(|\widehat{x}_e|^2)_{e \in M}$ summierbar. Daher folgt aus dem Cauchy-Kriterium (Bemerkung und Definition 1.20) die Summierbarkeit von $(\lambda_e P_e x)_e$. Die Linearität von T ist klar. Mit $T_E := \sum_{e \in E} \lambda_e P_e$ gilt zudem $\|T_E\| \leq s$, wieder mit Bessel-Ungleichung.

Es sei nun $x \in B_X$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert eine endliche Menge $E = E_\varepsilon \subset M$ mit $\|Tx - T_E x\| < \varepsilon$, also $\|Tx\| \leq \|Tx - T_E x\| + \|T_E x\| < s + \varepsilon$. Damit ist $\|Tx\| \leq s$, also $T \in L(X)$ mit $\|T\| \leq s$. Aus $T e = \lambda_e e$ für $e \in M$ folgt $\|T\| \geq s$ und $\lambda_e \in \sigma_p(T)$. Umgekehrt seien $\lambda \notin \{\lambda_e : e \in M\}$ und $x \in X$ mit $Tx = \lambda x$, also $\sum_{e \in M} (\lambda - \lambda_e) \widehat{x}_e e = 0$ nach (6.1). Dann ist $(\lambda - \lambda_e) \widehat{x}_e = 0$ nach Bemerkung 6.12, also $\widehat{x}_e = 0$ für alle $e \in M$. Nach der Parsevalschen Gleichung gilt $x = 0$. Damit ist $\lambda \notin \sigma_p(T)$.

Da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist, gilt $\sigma(T) \supset \overline{\sigma_p(T)}$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\text{dist}(\lambda, \{\lambda_e : e \in M\}) > 0$, so ist $((\lambda - \lambda_e)^{-1})_{e \in M}$ beschränkt in \mathbb{K} . Nach dem ersten Teil existiert

$$S := \sum_{e \in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} P_e \in L(X).$$

Mit Bemerkung 6.12.1 und (6.1) gilt für $x \in X$

$$(\lambda I - T)Sx = \sum_{e \in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} (\lambda I - T)P_e x = \sum_{e \in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} (\lambda - \lambda_e) \widehat{x}_e e = x.$$

Damit ist $\lambda I - T$ auch surjektiv, also $\lambda \in \rho(T)$ und $R(\lambda) = S$. Ist schließlich λ_e reell für $e \in M$, so gilt

$$T_E^* = \sum_{e \in E} \lambda_e P_e^* = \sum_{e \in E} \lambda_e P_e = T_E$$

für alle endlichen $E \subset M$ und damit auch $T = T^*$. \square

Bemerkung 6.14 Es seien X ein Hilbertraum und M eine Orthonormalbasis in X . Nach Satz 6.13 die Abbildung

$$B(M, \mathbb{K}) \ni (\lambda_e)_{e \in M} \mapsto \sum_{e \in M} \lambda_e P_e \in L(X)$$

linear und normerhaltend, also $B(M, \mathbb{K})$ linear isometrisch eingebettet in $L(X)$. Für Familien in $B(M, \mathbb{R})$ sind die entsprechenden Operatoren zudem symmetrisch.

Es seien nun (λ_e) eine abklingende Familie⁵³ und

$$T := \sum_{e \in M} \lambda_e P_e.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert eine endliche Menge $F \subset M$ mit $|\lambda_e| < \varepsilon$ für $e \in M \setminus F$. Dann gilt für alle endlichen Mengen $E \subset M \setminus F$ mit T_E wie im Beweis vorher

$$\|T_E\| \leq \sup_{e \in M \setminus F} |\lambda_e| \leq \varepsilon.$$

Da $K(X)$ ein Banachraum ist, ist $(\lambda_e P_e)$ nach dem Cauchy-Kriterium summierbar in $K(X)$ und insbesondere $T \in K(X)$. Damit ist der Teilraum $B_0(M, \mathbb{K})$ der abklingenden (λ_e) isometrisch eingebettet in $K(X)$, hier sogar mit Summierbarkeit von $(\lambda_e P_e)$ in $K(X)$.

⁵³Wir sagen, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ sei abklingend, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F_\varepsilon \subset I$ existiert mit $\|x_\alpha\| < \varepsilon$ für $\alpha \in I \setminus F_\varepsilon$.

7 Zerlegungen kompakter Operatoren

Aus der linearen Algebra ist bekannt: Ist X ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und ist $T : X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator, so existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Wir wollen ein entsprechendes Ergebnis für Hilberträume X und symmetrische Operatoren $T \in K(X)$ beweisen.

Satz 7.1 (Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren)

Es seien $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $T \in K(X)$ symmetrisch. Dann existieren eine Orthonormalbasis M von X und eine Familie $(\lambda_e) \in B_0(M, \mathbb{R})$ mit $Te = \lambda_e e$ für $e \in M$.

Beweis. Nach Satz 6.10 existiert ein Eigenwert $\mu_1 \in \mathbb{R}$ mit $|\mu_1| = \|T\|$. Es sei e_1 so, dass $\|e_1\| = 1$ und

$$Te_1 = \mu_1 e_1.$$

Der Teilraum $X_1 := \{e_1\}^\perp$ ist abgeschlossen in X . Ist $X_1 = \{0\}$, so ist $X = \text{span}\{e_1\}$ und wir sind fertig. Ist $X_1 \neq \{0\}$ und ist $x \in X_1$, so gilt

$$\langle Tx, e_1 \rangle = \langle x, Te_1 \rangle = \mu_1 \langle x, e_1 \rangle = 0,$$

also auch $Tx \in X_1$. Damit ist $T(X_1) \subset X_1$ und $T_1 := T|_{X_1} \in K(X_1)$ symmetrisch.

Nun verfahren wir wie oben mit T_1 statt T : Wir wählen einen Eigenwert μ_2 von T_1 mit $|\mu_2| = \|T_1\|$ und $e_2 \in X_1$ so, dass $\|e_2\| = 1$ und $Te_2 = T_1 e_2 = \mu_2 e_2$. Dann ist mit $X_2 := \{e_1, e_2\}^\perp$ entweder $X_2 = \{0\}$, also $X = \text{span}\{e_1, e_2\}$ und wir sind fertig, oder der Operator $T_2 := T_1|_{X_2} \in K(X_2)$ symmetrisch. So fortfahrend erhält man: Entweder existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $X_n = \{0\}$ und damit $X = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, oder es ist $X_n \neq \{0\}$ für alle n . Im ersten Fall ist nichts mehr zu zeigen. Wir betrachten also den zweiten (und damit $\dim(X) = \infty$). Hier erhalten wir eine Folge $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} so, dass $(|\mu_j|)$ fallend ist, und ein Orthonormalsystem $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ mit $Te_j = \mu_j e_j$ für $j \in \mathbb{N}$. Dabei gilt $\mu_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$), denn angenommen, das ist nicht der Fall. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|\mu_j| \geq \delta$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also

$$\|Te_j - Te_k\|^2 = \|\mu_j e_j - \mu_k e_k\|^2 = \mu_j^2 + \mu_k^2 \geq 2\delta^2 \quad (j, k \in \mathbb{N}, j \neq k).$$

Dies widerspricht der Kompaktheit von T , nach der $(Te_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Wegen Satz 1.24 lässt sich $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ zu einer Orthonormalbasis M von X erweitern (falls nötig). Mit $\lambda_{e_j} := \mu_j$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\lambda_e := 0$ für $e \in M \setminus \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ gilt dann $Te = \lambda_e e$ für alle $e \in M$, denn für $e \in M \setminus \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ ist $e \in \{e_1, \dots, e_n\}^\perp = D(T_n)$, also

$$\|Te\| = \|T_n e\| \leq \|T_n\| = |\mu_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

und folglich $Te = 0$.

Damit haben wir in allen Fällen eine Orthonormalbasis M und $(\lambda_e) \in B_0(M, \mathbb{R})$ gefunden mit $Te = \lambda_e e$. \square

Bemerkung 7.2 Da in der Situation von Satz 7.1 sowohl T als auch $\sum_{e \in M} \lambda_e P_e$ linear und stetig sind und auf M übereinstimmen, gilt wegen der Dichtheit von $\text{span}(M)$ in X

$$T = \sum_{e \in M} \lambda_e P_e$$

mit Summierbarkeit in $K(X)$. Nach Satz 6.13 ist $\sigma_p(T) = \{\lambda_e : e \in M\}$ sowie $\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$ und für $\lambda \notin \{\lambda_e : e \in M\} \cup \{0\}$ die Gleichung $(\lambda I - T)x = y$ für jedes $y \in X$ eindeutig lösbar mit

$$x = R(\lambda)y = \sum_{e \in M} (\lambda - \lambda_e)^{-1} \hat{y}_e \cdot e,$$

also glatter Abhängigkeit der Lösung von λ und stetiger von y . Im Fall $\dim(X) = \infty$ ist mit Bemerkung 5.13 zudem $0 \in \sigma(T)$, also

$$\sigma(T) = \{\lambda_e : e \in M\} \cup \{0\}.$$

Da T kompakt und damit $T(U_1(0))$ dann wegen Satz 3.4 nicht offen, also T nach dem Satz von der offenen Abbildung nicht surjektiv ist, ist die Gleichung $Tx = y$ nicht für alle $y \in X$ lösbar.

Beispiel 7.3 Es sei $T = T_k$ der kompakte und symmetrische Integraloperator aus Beispiel 6.11. Dann existieren nach Satz 7.1 eine Orthonormalbasis M von $L_2(I)$ und $(\lambda_e) \in B_0(M, \mathbb{R})$ mit $Te = \lambda_e e$ für $e \in M$. Nach Bemerkung 7.2 ist die **Fredholm-Gleichung erster Art**

$$Tf = \int f(t)k(\cdot, t) dt = g$$

nicht für alle $g \in L_2(I)$ lösbar. Andererseits ist für beliebiges $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \neq \lambda_e$ und $g \in L_2(I)$ die **Fredholm-Gleichung zweiter Art**

$$(\lambda I - T)f = \lambda f - \int_a^b f(t)k(\cdot, t) dt = g$$

eindeutig lösbar.

Bemerkung 7.4 Man beachte, dass die Orthonormalbasis M aus Satz 7.1 im Allgemeinen durch T nicht eindeutig bestimmt ist. So ist etwa im Fall $\dim X < \infty$ und $T = I$ jede Orthonormalbasis von X geeignet, wenn man $\lambda_e = 1$ für alle $e \in M$ wählt. Wir wollen eine Zerlegung herleiten, die in gewissem Sinne charakteristisch für T ist:

Ist $N \subset M$ und $L := \overline{\text{span}(N)}$, so gilt $e \in L^\perp$ für $e \in M \setminus N$ und damit auch⁵⁴

$$x - \sum_{e \in N} \hat{x}_e e = \sum_{e \in M \setminus N} \hat{x}_e e \in L^\perp,$$

also nach dem Projektionssatz

$$P_L = \sum_{e \in N} P_e.$$

⁵⁴mit $\sum_{\emptyset} := 0$

Mit $M_\lambda := \{e \in M : \lambda = \lambda_e\}$ ist der Situation von Satz 7.1 damit $\sum_{e \in M_\lambda} P_e = P_{\text{Kern}(\lambda I - T)}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $\dim(\text{Kern}(\lambda I - T)) < \infty$ für alle $\lambda \neq 0$, da (λ_e) abklingend ist. Definiert man $E = E_T : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ durch

$$E(\lambda) := E_T(\lambda) := P_{\text{Kern}(\lambda I - T)},$$

so gilt

$$T = \sum_{e \in M} \lambda_e P_e = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda \sum_{e \in M_\lambda} P_e = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \lambda E(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda E(\lambda) \quad (7.1)$$

mit Summierbarkeit in $K(X)$. Die Darstellung (7.1) nennt man **Spektralzerlegung** von T . Wegen $P_e P_f = P_f P_e = \delta_{e,f} P_e$ für $e, f \in M$ ist $E(\lambda)E(\mu) = \delta_{\lambda,\mu} E(\lambda)$. Aus (1.5), (1.7) und der Parsevalschen Gleichung folgt zudem $\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} E(\lambda) = I$. Die Spektralzerlegung ist eindeutig in folgendem Sinne ([Ü]): Ist $Tx = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda P_{L(\lambda)} x$ für $x \in X$, wobei $L(\lambda)$ abgeschlossene Teilräume von X sind mit $P_{L(\lambda)} P_{L(\mu)} = P_{L(\mu)} P_{L(\lambda)} = \delta_{\lambda,\mu} P_{L(\lambda)}$ und $\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} P_{L(\lambda)} = I$, so folgt $P_{L(\lambda)} = E(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition 7.5 Es seien X ein unitärer Raum und $T : X \rightarrow X$ linear. Ist $S : X \rightarrow X$ linear, so nennt man S eine **Wurzel** aus T , falls $S^2 = T$ gilt. Ist T ein symmetrischer Operator, so schreiben wir $T \geq 0$, falls $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ für $x \in D(T)$ gilt.⁵⁵ In dem Fall ist $\sigma_p(T) \subset [0, \infty)$.

Bemerkung und Definition 7.6 Es seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X, Y)$. Nach Bemerkung 6.3 ist $T^*T \in L(X)$ symmetrisch. Wegen $\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle \geq 0$ ist zudem

$$T^*T \geq 0.$$

Existiert eine Wurzel W aus T^*T mit $W = W^*$, so gilt

$$\|Wx\|^2 = \langle Wx, Wx \rangle = \langle x, W^2x \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \quad (x \in X).$$

Insbesondere ist $\text{Kern}(W) = \text{Kern}(T)$.

Sind X, Y Hilberträume, so nennt man $U \in L(X, Y)$ eine **partielle Isometrie**, falls $U|_{\text{Kern}(U)^\perp}$ isometrisch ist.

Satz 7.7 (Polarzerlegung) *Es seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X, Y)$ so, dass eine symmetrische Wurzel W aus T^*T existiert. Dann existiert genau eine partielle Isometrie $U = U_W$ mit $T = UW$ und $\text{Kern}(U) = \text{Kern}(T)$.*

⁵⁵Man spricht dann auch von einem positiven Operator.

Beweis. Wir setzen $L := \text{Bild}(W)$. Ist $u \in L$ und sind $x, x' \in X$ mit $Wx = u = Wx'$, so gilt $W(x - x') = 0$, also auch $T(x - x') = 0$ und damit $Tx = Tx'$. Also ist durch

$$Su := S(Wx) := Tx \quad (u \in L)$$

eine lineare Abbildung $S : L \rightarrow Y$ (wohl-)definiert mit $SW = T$. Außerdem ist

$$\|Su\| = \|Tx\| = \|Wx\| = \|u\| \quad (u \in L),$$

also S isometrisch. Da S damit auch gleichmäßig stetig ist, lässt sich S eindeutig auf den Abschluss von L zu einem dann ebenfalls isometrischen Operator $S : \bar{L} \rightarrow Y$ fortsetzen ([Ü]). Wir definieren

$$U := SP_{\bar{L}} \in L(X, Y).$$

Dann ist $UW = SW = T$. Nach Bemerkung und Definition 7.6 und Satz 6.2 ist außerdem

$$\text{Kern}(T) = \text{Kern}(W) = \text{Kern}(W^*) = L^\perp$$

und damit $U|_{\text{Kern}(T)} = U|_{L^\perp} = 0$ sowie $U|_{(\text{Kern}(T))^\perp} = U|_{L^{\perp\perp}} = U|_{\bar{L}} = S$ wegen $\bar{L} = L^{\perp\perp}$ (siehe [Ü]). Also ist U eine partielle Isometrie mit $\text{Kern}(U) = \text{Kern}(T)$. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, dass notwendig $U|_L = S$ gelten muss. \square

Wir betrachten nun wieder kompakte Operatoren. Mit $K(X)_+ := \{T \in K(X) : T \geq 0\}$ gilt

Satz 7.8 *Es seien X ein Hilbertraum und $P \in K(X)_+$. Dann existiert genau eine Wurzel $W \in K(X)_+$ aus P .*⁵⁶

Beweis. Nach Satz 7.1 und (7.1) existieren eine Orthonormalbasis M von X und $(\lambda_e) \in B_0(M, \mathbb{R})$ mit $\lambda_e \geq 0$ und $P = \sum_{e \in M} \lambda_e P_e = \sum_{\lambda > 0} \lambda E(\lambda) \in K(X)$. Damit existiert nach Bemerkung 6.14 auch

$$W := \sum_{e \in M} \sqrt{\lambda_e} P_e = \sum_{\lambda > 0} \sqrt{\lambda} E(\lambda)$$

in $K(X)$. Wegen $\langle Wx, x \rangle = \sum_{e, f \in M} \sqrt{\lambda_e} \hat{x}_e \hat{x}_f \langle e, f \rangle = \sum_{e \in M} \sqrt{\lambda_e} |\hat{x}_e|^2 \geq 0$ ist $W \geq 0$ mit

$$W^2 = W \sum_{\nu > 0} \sqrt{\nu} E(\nu) = \sum_{\nu > 0} \sum_{\lambda > 0} \sqrt{\lambda} \sqrt{\nu} E(\lambda) E(\nu) = \sum_{\lambda > 0} \lambda E(\lambda) = P.$$

Umgekehrt sei $U \in K(X)_+$ mit $P = U^2$. Mit (7.1) ist $U = \sum_{\mu > 0} \mu E_U(\mu) = \sum_{\lambda > 0} \sqrt{\lambda} E_U(\sqrt{\lambda})$ in $K(X)$, also wie vorher

$$P = U^2 = \sum_{\lambda > 0} \lambda E_U(\sqrt{\lambda})$$

Wieder nach Bemerkung 7.4 ist damit $E_U(\sqrt{\lambda}) = E(\lambda)$ für $\lambda > 0$, also $U = W$. \square

⁵⁶man schreibt $W =: P^{1/2} =: \sqrt{P}$

Bemerkung und Definition 7.9 Sind X, Y Hilberträume und ist $T \in K(X, Y)$, so ist $T^*T \in K(X)_+$. Wir schreiben $|T|$ für die nach Satz 7.8 existierende und in $K(X)_+$ eindeutig bestimmte Wurzel aus T^*T . Nach Bemerkung 7.4 ist

$$|T| = \sum_{\mu > 0} \mu E_{|T|}(\mu).$$

Die $\mu > 0$ mit $E_{|T|}(\mu) \neq 0$, also die nichtverschwindenden Eigenwerte von $|T|$, heißen **Singulärwerte** von T . Wir schreiben $s(T)$ für die (abzählbare) Menge der Singulärwerte von T . Ist $U = U_{|T|}$ wie in Satz 7.7, so hat $UE_{|T|}(\mu)$ wegen $\dim(\text{Kern}(\mu I - |T|)) < \infty$ (vgl. Bemerkung 7.4) ein endlichdimensionales Bild und es gilt

$$T = U|T| = \sum_{\mu \in s(T)} \mu UE_{|T|}(\mu)$$

in $K(X, Y)$. Diese Zerlegung nennt man **Singulärwertzerlegung** von T . Eine unmittelbare Folgerung ist, dass der Unterraum der Operatoren mit endlichdimensionalem Bild dicht in $K(X, Y)$ ist.

8 Sobolev-Räume

Wir führen in diesem Abschnitt eine Familie von Hilberträumen ein, die insbesondere im Zusammenhang mit der Lösung partieller Differenzialgleichungen eine wichtige Rolle spielt. Dazu skizzieren wir zunächst das Konzept schwacher Ableitungen.

Bemerkung und Definition 8.1 Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi \in C(\Omega)$, so heißt der Abschluss $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$ von $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$ in Ω der **Träger** von φ .⁵⁷ Damit setzen wir

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \text{ kompakt}\}.$$

Funktionen aus $\mathcal{D}(\Omega)$ nennt man auch **Testfunktionen** (auf Ω). Dabei gilt $\text{supp}(\partial^\alpha \varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.⁵⁸ Man kann zeigen, dass $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp(-1/(1 - |x|^2)), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

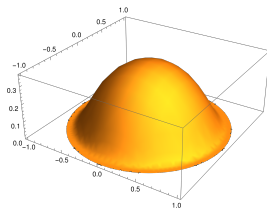


Abbildung 10: $\exp(-1/(1 - |x|^2))$ für $|x| < 1$ im Fall $d = 2$.

beliebig oft differenzierbar ist. Also gilt $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp}(\rho) = B := B_{\mathbb{R}^d}$. Für $h > 0$ und $a \in \mathbb{R}^d$ ist allgemeiner $\rho_{a,h} := \rho(h^{-1}(\cdot - a)) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp}(\rho_{a,h}) = a + hB$. Wählt man a, h so, dass $a + hB \subset \Omega$, so ist damit insbesondere $\mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}$ nichtleer.

Bemerkung und Definition 8.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

1. Sind $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, so schreiben wir $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, falls eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ existiert mit $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf Ω (bzw. K) für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Dann gilt auch $\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ für alle α . Ein lineares Funktional $T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ heißt **Distribution** auf Ω , falls für alle Folgen (φ_n) in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ auch $T\varphi_n \rightarrow T\varphi$ gilt. Wir schreiben $\mathcal{D}'(\Omega)$ für den Raum der Distributionen auf Ω .
2. Eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **lokal integrierbar** auf Ω , falls für jedes $a \in \Omega$ eine Umgebung U von a existiert mit $f \in \mathcal{L}(U)$. Insbesondere sind auf Ω stetige Funktionen lokal integrierbar. Außerdem sind lokal integrierbare Funktionen auf jeder kompakten Teilmenge von Ω integrierbar. Wir schreiben (vgl. Bemerkung 1.3)

$$L_{\text{loc}}(\Omega) := \{f : f \text{ lokal integrierbar auf } \Omega\} / N.$$

⁵⁷Englisch support

⁵⁸Zur Erinnerung: $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$; für weitere Bezeichnungen in dem Zusammenhang siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Seite 43.

Satz 8.3 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann ist⁵⁹ durch

$$T_f \varphi := \langle \varphi, f \rangle := \int \varphi f := \int_{\text{supp}(\varphi)} \varphi f \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

eine Distribution $T_f = \langle \cdot, f \rangle$ auf Ω definiert. Ist $f \in C^m(\Omega)$, so gilt

$$T_{\partial^\alpha f} \varphi = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), |\alpha| \leq m). \quad (8.1)$$

Beweis. 1. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist

$$\int |\varphi f| = \int_{\text{supp}(\varphi)} |\varphi f| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \int_{\text{supp}(\varphi)} |f| < \infty.$$

Also ist φf integrierbar und damit $T_f \varphi$ definiert. Außerdem ist T_f linear. Ist (φ_n) in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, so gilt für $K \subset \Omega$ kompakt mit $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$

$$|T\varphi_n - T\varphi| \leq \int_K |\varphi_n - \varphi| \cdot |f| \leq \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \cdot \int_K |f| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

2. Wegen $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$ reicht es, zu zeigen: Ist $f \in C^1(\Omega)$, so gilt

$$\int \varphi \partial_j f = - \int \partial_j \varphi f \quad (j = 1, \dots, d).$$

Ohne Einschränkung sei $j = 1$. Dann gilt mit dem Satz von Fubini⁶⁰ und partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \varphi \partial_1 f &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} (\varphi \partial_1 f)_0(t, u) dt du \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left((\varphi f)_0(t, u) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{\mathbb{R}} (\partial_1 \varphi f)_0(t, u) dt \right) du = - \int \partial_1 \varphi f. \end{aligned}$$

□

In Beispiel 2.16.2 hatten wir gesehen, dass der Ableitungsoperator $f \mapsto f'$ in $L_2(I)$ mit Definitionsbereich $C^1(I)$ nicht abgeschlossen ist. Die Argumentation lief im Wesentlichen darüber, dass die Betragsfunktion $|\cdot|$ nicht (stetig) differenzierbar ist. Etwas schade, denn bis auf die Stelle 0 ist sign die Ableitung. Wir schwächen die klassische punktweise Definition der Ableitung so ab, dass in einem klar definierten Sinn etwa sign als Ableitung von $|\cdot|$ identifiziert werden kann.

Bemerkung und Definition 8.4 Es seien $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Wegen der Linearität von $\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(D^\alpha T)\varphi := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \quad (8.2)$$

⁵⁹mit der Notation aus Bemerkung A.7

⁶⁰siehe wieder etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Fubini.

linear und wegen $\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$D^\alpha T \varphi_n = (-1)^{|\alpha|} T \partial^\alpha \varphi_n \rightarrow (-1)^{|\alpha|} T \partial^\alpha \varphi = (D^\alpha T) \varphi \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also ist $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Aus der Definition ergibt sich, dass $D^{\alpha+\beta} T = D^\alpha D^\beta T$ gilt. Ist $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$, so schreibt man kurz $D^\alpha f := D^\alpha T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und nennt $D^\alpha f$ die **Distributionsableitung** der Ordnung α von f . Außerdem ist im Falle $f \in C^m(\Omega)$ nach Satz 8.3

$$D^\alpha f = T_{\partial^\alpha f} \quad (|\alpha| \leq m). \quad (8.3)$$

Bemerkung und Definition 8.5 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Man kann zeigen, dass die lineare Abbildung

$$L_{\text{loc}}(\Omega) \ni f \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

injektiv ist.⁶¹ Man identifiziert f und T_f und fasst so $L_{\text{loc}}(\Omega)$ als Teilraum von $\mathcal{D}'(\Omega)$ auf. Weiterhin ist $L_p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$, im Fall $p > 1$ nach der Hölder-Ungleichung. Damit kann man auch $L_p(\Omega)$ als Teilraum von $\mathcal{D}'(\Omega)$ auffassen. Ist $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ und ist α so, dass $D^\alpha f = T_g = g$ für ein $g \in L_{\text{loc}}(\Omega)$, so nennt man g die **schwache Ableitung** der Ordnung α von f . Nach (8.3) stimmen für $f \in C^m(\Omega)$ und $|\alpha| \leq m$ klassische und schwache Ableitung überein. Man schreibt daher auch $\partial^\alpha f := g$ und verwendet in diesem erweiterten Sinne Schreibweisen wie $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_d f)$ und Δf .⁶²

Beispiel 8.6 Es seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $f := |\cdot|$. Da f stetig ist, gilt $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned} T_{\text{sign}} \varphi &= \int_0^\infty \varphi \cdot 1 - \int_{-\infty}^0 \varphi \cdot 1 = t\varphi(t)|_0^\infty - \int_0^\infty t\varphi'(t) dt - \left(t\varphi(t)|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 t\varphi'(t) dt \right) \\ &= - \int |\cdot| \varphi' = (D^1 f) \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}(I)), \end{aligned}$$

also $D^1 f = T_{\text{sign}}$. Wegen $\text{sign} \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ist damit $\text{sign} = D^1 f = f'$ die schwache Ableitung von f . Sind $c \in \mathbb{R}$ und δ_c definiert durch $\delta_c \varphi := \varphi(c)$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, so gilt darüber hinaus $D^2 f = 2\delta_0$ ([Ü]).

Bemerkung und Definition 8.7 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$H^k(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : D^\alpha f \in L_2(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq k\}$$

Sobolev-Raum der Ordnung k . Für $f \in H^k(\Omega)$ existieren also die schwachen Ableitungen $\partial^\alpha f$ mit $|\alpha| \leq k$, und zwar in $L_2(\Omega)$. Durch

$$\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha f \cdot \overline{\partial^\alpha g}$$

⁶¹siehe etwa D. Werner, Funktionalanalysis, 5. Aufl., Springer, 2005, Seite 427

⁶²Man beachte, dass schwache Ableitungen nicht punktweise definiert, sondern Äquivalenzklassen von Funktionen sind.

für $f, g \in H^k(\Omega)$ ist ein Skalarprodukt auf $H^k(\Omega)$ definiert. Für die induzierte Norm $\|\cdot\|_k$ gilt

$$\|f\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (f \in H^k(\Omega)) \quad (8.4)$$

Im Fall $k = 1$ schreibt sich das Skalarprodukt mit $a \cdot b := a^\top b$ für $a, b \in \mathbb{C}^d$ kurz als

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_{\Omega} f \bar{g} + \int_{\Omega} \nabla f \cdot \overline{\nabla g}.$$

Bemerkung 8.8 Es seien (f_n) eine Folge in $H^k(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$ so, dass $f_n \rightarrow f$ und $\partial^\alpha f_n \rightarrow g$ in $L_2(\Omega)$. Dann sind $f, g \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ und es gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$T_g \varphi = \int \varphi g \leftarrow \int \varphi \partial^\alpha f_n = (-1)^{|\alpha|} \int \partial^\alpha \varphi f_n \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \int \partial^\alpha \varphi f = (\partial^\alpha f) \varphi \quad (n \rightarrow \infty),$$

also $g = T_g = \partial^\alpha f$. Nach Bemerkung 2.15 impliziert dies, dass im Fall $d = 1$ der Ableitungsoperator $T : L_2(\Omega) \supset H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ mit $Tf := f'$ für $f \in D(T) = H^1(\Omega)$ abgeschlossen ist (vgl. Beispiel 2.16.2).

Satz 8.9 $(H^k(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $H^k(\Omega)$. Wegen (8.4) ist $(\partial^\alpha f_n)$ für alle $|\alpha| \leq k$ eine Cauchy-Folge in $L_2(\Omega)$. Also existiert zu jedem α mit $|\alpha| \leq k$ ein $g_\alpha \in L_2(\Omega)$ so, dass $\partial^\alpha f_n \rightarrow g_\alpha$ in $L_2(\Omega)$ für $n \rightarrow \infty$. Setzt man $f := g_0$, so gilt $\partial^\alpha f = g_\alpha$ für $|\alpha| \leq k$ nach Bemerkung 8.8. Folglich ist $f \in H^k(\Omega)$ mit $\|f_n - f\|_k \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung und Definition 8.10 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir schreiben $H_0^k(\Omega)$ für den Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^k(\Omega)$ und kurz $H_0(\Omega) := H_0^1(\Omega)$. Als abgeschlossener Teilraum von $H^k(\Omega)$ ist $H_0^k(\Omega)$ ebenfalls ein Hilbertraum.

Satz 8.11 (Poincaré-Ungleichung)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Ist $j \in \{1, \dots, d\}$ so, dass $c := \sup_{x \in \Omega} |x_j| < \infty$, so gilt

$$\int_{\Omega} |f|^2 \leq 4c^2 \int_{\Omega} |\partial_j f|^2 \quad (f \in H_0(\Omega)).$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $j = 1$. Mit partieller Integration gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und im Falle $d > 1$ für $u \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$\int (\varphi \bar{\varphi})(t, u) dt = \int_{-c}^c (-t) 2 \operatorname{Re}(\varphi \partial_1 \bar{\varphi})(t, u) dt \leq 2c \int |\varphi \partial_1 \varphi|(t, u) dt.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und dem Satz von Fubini folgt

$$\int |\varphi|^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} (\varphi \cdot \bar{\varphi})(t, u) dt du \leq 2c \int |\varphi \partial_1 \varphi| \leq 2c \left(\int |\varphi|^2 \right)^{1/2} \left(\int |\partial_1 \varphi|^2 \right)^{1/2},$$

also nach Quadrieren und Kürzen $\int |\varphi|^2 \leq 4c^2 \int |\partial_1 \varphi|^2$. Ist $f \in H_0(\Omega)$ beliebig, so existiert eine Folge (φ_n) in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \rightarrow f$ in $H^1(\Omega)$. Wegen der Stetigkeit der (L_2) -Norm gilt $\int |\varphi_n|^2 \rightarrow \int_{\Omega} |f|^2$ und $\int |\partial_1 \varphi_n|^2 \rightarrow \int_{\Omega} |\partial_1 f|^2$ und damit auch $\int_{\Omega} |f|^2 \leq 4c^2 \int_{\Omega} |\partial_1 f|^2$. \square

Bemerkung und Definition 8.12 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wie in Satz 8.11 und $f \in H_0(\Omega)$ mit $\int |\nabla f|^2 = 0$. Dann ist $\int |\partial_j f|^2 = 0$ und damit $f = 0$ nach Satz 8.11. Also ist durch

$$\langle f, g \rangle_{\nabla} := \int_{\Omega} \nabla f \cdot \overline{\nabla g}$$

ebenfalls ein Skalarprodukt auf $H_0(\Omega)$ definiert. Wir schreiben $\|\cdot\|_{\nabla}$ für die induzierte Norm, also $\|f\|_{\nabla} = (\int |\nabla f|^2)^{1/2}$. Nach Satz 8.11 gilt

$$\|f\|_1^2 = \int_{\Omega} |f|^2 + \int_{\Omega} |\nabla f|^2 \leq (4c^2 + 1) \int_{\Omega} |\nabla f|^2 \quad (f \in H_0(\Omega))$$

und damit $\|f\|_{\nabla} \leq \|f\|_1 \leq \sqrt{4c^2 + 1} \|f\|_{\nabla}$. Also sind die Normen $\|\cdot\|_{\nabla}$ und $\|\cdot\|_1$ auf $H_0(\Omega)$ äquivalent. Nach Bemerkung und Definition 8.10 ist damit $(H_0(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla})$ ein Hilbertraum mit dichtem Teilraum $\mathcal{D}(\Omega)$.

Sind $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und ist $X \subset Y$, so sagt man X sei stetig bzw. kompakt eingebettet in Y , falls $j : X \rightarrow Y$ mit $j(x) = x$ stetig bzw. kompakt ist. Da $(H_0(\Omega), \|\cdot\|_1)$ stetig eingebettet in $L_2(\Omega)$ ist, gilt dies in der Situation von Satz 8.11 auch für $(H_0(\Omega), \|\cdot\|_{\nabla})$. Für beschränkte Ω gilt viel schärfer:

Satz 8.13 (Rellich)

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, so ist $(H_0(\Omega), \|\cdot\|_{\nabla})$ kompakt eingebettet in $L_2(\Omega)$.

Beweis. Wir setzen $S := \overline{\Omega}$. Dann ist S kompakt. Weiter sei $g \in C(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger. Dann ist g beschränkt auf \mathbb{R}^d und gleichmäßig stetig. Insbesondere existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_{\varepsilon} > 0$ mit $|g(x-y) - g(x'-y)| < \varepsilon$ für $|x-x'| < \delta_{\varepsilon}$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Mit der gleichen Argumentation wie in Beispiel 3.12 sieht man damit, dass durch

$$(Kf)(x) := \int_{\Omega} g(x-y)f(y) dy \quad (x \in S, f \in L_1(\Omega))$$

ein kompakter Operator $K : (L_1(\Omega), \|\cdot\|_1) \rightarrow (C(S), \|\cdot\|_{\infty})$ definiert ist, und mit der gleichen Argumentation wie in Beispiel 6.11 ist daher K auch ein kompakter Operator von $L_2(\Omega)$ nach $CB(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Da die Einbettung $j : (H_0(\Omega), \|\cdot\|_{\nabla}) \rightarrow L_2(\Omega)$ stetig ist, ist schließlich $T_g := Kj$ ein kompakter Operator von $(H_0(\Omega), \|\cdot\|_{\nabla})$ nach $L_2(\Omega)$.

Es sei nun ρ wie in Bemerkung und Definition 8.1 und $\psi := (\int \rho)^{-1} \rho$. Mit $\psi_r := r^{-d} \psi(r^{-1} \cdot)$ betrachten wir

$$K_r := T_{\psi_r} \in K(H_0(\Omega), L_2(\Omega)) \quad (r > 0).$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt wegen $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$ sowie $\text{supp}(\psi) \subset B$ nach Bemerkung A.6

$$(K_r \varphi)(x) = \frac{1}{r^d} \int \psi\left(\frac{x-u}{r}\right) \varphi(u) du = \int_B \psi(y) \varphi(x-ry) dy \quad (x \in \Omega).$$

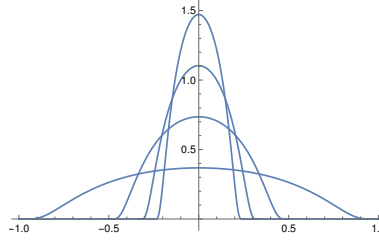


Abbildung 11: $s\rho(s \cdot)$ für $s = 1, 2, 3, 4$.

Wegen $\int_B \psi = 1$ ist $\int_B \varphi(x) \psi(y) dy = \varphi(x)$, also mit $V := \int_B 1$ und Cauchy-Schwarzscher Ungleichung

$$\begin{aligned} \|(j - K_r)\varphi\|_2^2 &= \|\varphi - K_r \varphi\|_2^2 = \int_{\Omega} \left| \int_B \psi(y) (\varphi(x) - \varphi(x-ry)) dy \right|^2 dx \\ &\leq V \int_{\Omega} \int_B \psi^2(y) |\varphi(x) - \varphi(x-ry)|^2 dy dx. \end{aligned}$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wieder mit Cauchy-Schwarzscher Ungleichung gilt für $x \in \mathbb{R}^d$ und $y \in B$

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x-ry)| &= r \left| \int_0^1 \nabla \varphi(x - try) \cdot y dt \right| \leq r \int_0^1 |\nabla \varphi(x - try)| dt \\ &\leq r \left(\int_0^1 |\nabla \varphi(x - try)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Wegen $\text{dist}(\text{supp}(\varphi), \partial\Omega) > 0$ ist $\text{supp}(\varphi(\cdot - try)) \subset \Omega$ für $t \in [0, 1]$ und r genügend klein, also $\int_{\Omega} |\nabla \varphi(x - try)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2$ nach Bemerkung A.6. Mit dem Satz von Fubini ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(j - K_r)\varphi\|_2^2 &\leq V r^2 \int_{\Omega} \int_B \psi^2(y) \left(\int_0^1 |\nabla \varphi(x - try)|^2 dt \right) dy dx \\ &= V r^2 \int_B \psi^2(y) \int_0^1 \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi(x - try)|^2 dx \right) dt dy \\ &= V r^2 \int_B \psi^2(y) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dy = V r^2 \|\psi\|_2^2 \|\varphi\|_{\nabla}^2 \end{aligned}$$

und damit $\|(j - K_r)|_{\mathcal{D}(\Omega)}\| \leq \sqrt{V}\|\psi\|_2 \cdot r$. Da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $(H_0(\Omega), \|\cdot\|_{\nabla})$ ist, folgt

$$\|j - K_r\| = \|(j - K_r)|_{\mathcal{D}(\Omega)}\| \leq \sqrt{V}\|\psi\|_2 \cdot r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0^+).$$

Da K_r kompakt ist, ist nach Satz 3.7.2 auch j kompakt. \square

In Bemerkung 5.2 hatten wir gesehen, wie Lösbarkeit der Wärmeleitungs- und der Wellengleichung über Trennung der Variablen mit der Existenz von Eigenfunktionen des Laplace-Operators zusammenhängt. Wir kehren zu diesem Fragenkreis zurück.

Genügt eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ der Segment-Eigenschaft, d. h. existieren zu jedem $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung U von x und ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ so, dass für alle $y \in U \cap \overline{\Omega}$ die Strecke $y + (0, 1)\mathbf{v}$ in Ω liegt, so gilt⁶³

$$H_0(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)\}. \quad (8.5)$$

In einem gewissen Sinne verschwinden also Funktionen in $H_0(\Omega)$ am Rand von Ω (vgl. [Ü]).

Bemerkung 8.14 Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und wie in Satz 8.11, so ist, wie bereits oben bemerkt, die Einbettung $j : (H_0(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla}) \rightarrow L_2(\Omega)$ stetig und damit auch die Adjungierte j^* . Mit $D_k^2 := D^{2e_k}$ betrachten wir den (distributionellen) Laplace-Operator

$$\Delta := \sum_{k=1}^d D_k^2 : H_0(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sind $g \in H_0(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0(\Omega)$, so gilt

$$\langle g, \varphi \rangle_{\nabla} = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} (\partial_k g) \partial_k \bar{\varphi} = - \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} (D_k^2 g) \bar{\varphi} = (-\Delta g) \bar{\varphi}$$

und damit für $f \in L_2(\Omega)$

$$T_f \bar{\varphi} = \int f \bar{\varphi} = \langle f, j\varphi \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle j^* f, \varphi \rangle_{\nabla} = (-\Delta j^* f) \bar{\varphi}.$$

Also ist $f = T_f = -\Delta j^* f$, d. h. $-\Delta$ ist linksinvers zu j^* . Existiert eine symmetrische Wurzel W aus $j^* j$, so ist nach Bemerkung und Definition 7.6 mit j auch W injektiv. Also ist 0 kein Eigenwert von W . Ist $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert und $g \in H_0(\Omega)$ ein entsprechender Eigenvektor, so gilt

$$g = jg = -\Delta j^* jg = -\Delta W^2 g = -\Delta(\mu^2 g) = -\mu^2 \Delta g.$$

Also ist g auch ein Eigenvektor von Δ , jetzt zum Eigenwert $-1/\mu^2 < 0$.

Man kann sich überlegen ([Ü]), dass die Orthonormalbasen aus den Beispielen 5.4 und 5.5 nach geeigneter Normierung auch Orthonormalbasen des Hilbertraums $(H_0(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla})$ sind. Allgemein gilt

⁶³siehe etwa R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, 2nd ed., Academic Press, Amsterdam, 2003, Thm. 3.22 und Thm. 5.29.

Satz 8.15 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann existieren eine Orthonormalbasis $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $(H_0(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla)$ und eine Folge (λ_n) mit $0 > \lambda_n \rightarrow -\infty$ und*

$$\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Da nach dem Satz von Rellich die Einbettung $j : (H_0(\Omega), \|\cdot\|_\nabla) \rightarrow L_2(\Omega)$ kompakt ist, existiert

$$|j| \in K(H_0(\Omega))_+$$

nach Bemerkung und Definition 7.9. Da mit j auch $|j|$ injektiv ist, existieren nach dem Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren (Satz 7.1) eine Orthonormalbasis M von $H_0(\Omega)$ und eine abklingende Familie $(\mu_e)_{e \in M}$ positiver Zahlen mit $|j|e = \mu_e P_e$ für $e \in M$.⁶⁴ Wegen $\mu_e \neq 0$ ist dabei M abzählbar. Wir schreiben $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ und setzen $\lambda_n := -1/\mu_{e_n}^2 < 0$. Nach Bemerkung 8.14 gilt dann $\Delta e_n = \lambda_n e_n$ und da (μ_e) abklingend ist, gilt zudem $\lambda_n \rightarrow -\infty$ für $n \rightarrow \infty$. \square

Insbesondere haben wir für beschränkte Ω die Existenz einer Orthonormalbasis M von $H_0(\Omega)$ aus schwachen Eigenfunktionen des Laplace-Operators nachgewiesen. Nach Bemerkung 5.2 kann jede Eigenfunktion $w = e_n$ durch Multiplikation mit den jeweils passenden v zu einer (schwachen) Lösung der Wärmeleitungs- bzw. der Wellengleichung ergänzt werden.

⁶⁴Die μ_e sind die Singulärwerte von j .

A Maße und Integrale

Definition A.1 Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge.

1. Ist $\Sigma \subset \text{Pot}(\Omega)$, so heißt Σ eine σ -**Algebra** (in Ω), falls gilt

(σ 1) $\emptyset \in \Sigma$.

(σ 2) Mit $A \in \Sigma$ ist auch $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

(σ 3) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n \in N}$ eine Familie in Σ , so ist $\bigcup_{n \in N} A_n \in \Sigma$.

Das Paar (Ω, Σ) nennt man einen **Messraum**.

2. Ist Σ eine σ -Algebra, so heißt eine Abbildung $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ **Maß** (auf Σ), falls

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n \in N}$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen in Σ , so ist mit $\infty + x = \infty$ für $x \in [0, \infty]$

$$\mu\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) = \sum_{n \in N} \mu(A_n) \quad \left(:= \sup\left\{\sum_{n \in F} \mu(A_n) : F \subset N \text{ endlich}\right\}\right).$$

In diesem Fall nennt man (Ω, Σ, μ) einen **Maßraum**. Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so heißt μ **endlich** und im Falle $\mu(\Omega) = 1$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.

Beispiel A.2 1. Ist $\Omega \neq \emptyset$ und ist $\#(A)$ die Mächtigkeit von $A \subset \Omega$, so ist $\#$ ein Maß auf $\text{Pot}(\Omega)$. Man nennt $\#$ das **Zählmaß** auf Ω . Dabei ist $\#$ endlich genau dann, wenn Ω endlich ist. In diesem Falle ist $P := \#(\Omega)^{-1} \#$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (genannt **Laplace-Verteilung** auf Ω).

2. Ist (S, d) ein metrischer Raum, so heißt die kleinste σ -Algebra, die die offenen Mengen enthält, die **Borel- σ -Algebra** bezüglich (S, d) . Wir schreiben dafür $\mathcal{B}(S)$. Ist speziell $(S, d) = (\mathbb{R}^m, |\cdot|)$, so existiert genau ein Maß $\lambda = \lambda_m$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\lambda([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$$

für alle Rechtecke $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$. Man nennt λ_m das m -dimensionale **Lebesgue-Maß**. Für $\rho > 0$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt dabei

$$\lambda_m(\rho A + b) = \rho^m \lambda_m(A) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)). \quad (\text{A.6})$$

Bemerkung und Definition A.3 Ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, so heißt $A \in \Sigma$ eine μ -**Nullmenge**, falls $\mu(A) = 0$ ist. Gilt eine Eigenschaft für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Nullmenge, so sagt man, die Eigenschaft gilt **μ -fast überall**. Im Fall des Lebesgue-Maßes λ ist jede einpunktige Menge und damit nach (M2) jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge. Die Indikatorfunktion 1_A stimmt für abzählbare A also λ -fast überall mit der Nullfunktion überein.

Bemerkung und Definition A.4 Es sei (Ω, Σ) ein Messraum. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, so heißt f **messbar**, falls $f^{-1}(U) \in \Sigma$ für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ gilt.⁶⁵ Weiter heißt f **einfach** (bzw. **Elementarfunktion**), falls f messbar und $f(\Omega)$ endlich ist.

Wichtig für die Einführung von Integralen bezüglich Maßen ist die Tatsache, dass zu jeder messbaren Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge (φ_n) einfacher Funktionen mit $\varphi_n \rightarrow f$ punktweise auf Ω und $|\varphi_n| \leq |f|$ existiert.

Bemerkung und Definition A.5 Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

1. Ist φ einfach mit $\varphi \geq 0$ oder $\mu(\varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) < \infty$, so setzen wir mit $0 \cdot \infty := 0$ und $x \cdot \infty := \infty$ für $x > 0$

$$\int \varphi d\mu := \sum_{\alpha \in \varphi(\Omega)} \alpha \cdot \mu(\varphi^{-1}(\{\alpha\})) \in \mathbb{C} \cup [0, \infty].$$

Insbesondere ist also $\int 1_A d\mu = \mu(A)$ für $A \in \Sigma$.

2. Ist g messbar und $g \geq 0$, so setzen wir

$$\int g d\mu := \int g(\omega) d\mu(\omega) := \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ einfach}, 0 \leq \varphi \leq g \right\} \in [0, \infty].$$

3. Ist f messbar, so heißt f **(μ) -integrierbar**, falls $\int |f| d\mu < \infty$ gilt. Wir setzen

$$\mathcal{L}(\mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ integrierbar}\}.$$

Damit ist durch

$$T_\mu f := \int f d\mu := \int f(\omega) d\mu(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n d\mu \in \mathbb{C},$$

wobei (φ_n) eine beliebige Folge wie in Bemerkung und Definition A.4 ist, eine lineare Abbildung $T_\mu : \mathcal{L}(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ (wohl-)definiert mit

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Mann nennt $\int f d\mu$ das **(μ) -Integral** von f .

Bemerkung A.6 Sind $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, so schreiben wir f_0 für die durch 0 auf \mathbb{R}^m fortgesetzte Funktion f . Für $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und Regelfunktionen f auf $[a, b]$ gilt dann

$$\int_a^b f = \int f_0 d\lambda.$$

Allgemeiner schreiben wir für $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_0 \in \mathcal{L}(\lambda)$

$$\int f := \int_M f := \int_M f(x) dx := \int f_0 d\lambda.$$

⁶⁵Alternativ kann man fordern, dass die Urbilder abgeschlossener Mengen in Σ liegen.

In Fall $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ schreibt man auch $\int_a^b f$ statt $\int_{[a,b]} f$. Schließlich setzen wir noch $\mathcal{L}(M) := \{f : f_0 \in \mathcal{L}(\lambda)\}$. Aus (A.6) ergibt sich für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ und $\rho > 0, b \in \mathbb{R}^m$

$$\int_{\rho A + b} f = \rho^m \int_A f(\rho x + b) dx \quad (f \in \mathcal{L}(\rho A + b)).$$

Bemerkung A.7 Es seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Wir setzen

$$\mathcal{L}_p(\mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar, } \int |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Ist $p > 1$ und $q > 1$ mit $p + q = pq$, so gilt für $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ die **Hölder-Ungleichung**

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1/q}$$

und damit die (auch für $p = 1$ gültige) **Minkowski-Ungleichung**

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f, g \in \mathcal{L}_p(\mu)).$$

Also ist durch

$$\|f\|_p := \|f\|_{p,\mu} := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}_p(\mu)$ gegeben. Im Falle des Zählmaßes $\mu = \#$ auf der Potenzmenge von \mathbb{N} erhält man die (in diesem Fall normierten) Räume $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$. Außerdem ist dadurch der Raum $\mathcal{L}_p(M) := \{f : f_0 \in \mathcal{L}_p(\lambda)\}$ halbnormiert.

B Zornsches Lemma

Bemerkung und Definition B.1 Es sei \mathcal{A} eine nichtleere Menge. Eine Relation \leq auf \mathcal{A} heißt **Halbordnung** auf \mathcal{A} , falls für $a, b, c \in \mathcal{A}$ gilt

- (i) (**Reflexivität**) $a \leq a$.
- (ii) (**Transitivität**) Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.
- (iii) (**Antisymmetrie**) Aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$.

Ein Element $m \in \mathcal{A}$ heißt **maximal**, falls aus $m \leq a$ schon $m = a$ folgt. Ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, so heißt $s \in \mathcal{A}$ **obere Schranke** von \mathcal{B} , falls $a \leq s$ für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt. Schließlich heißt \mathcal{B} **Kette** oder **total geordnet**, falls $a \leq b$ oder $b \leq a$ für alle $a, b \in \mathcal{B}$ gilt.

Mithilfe des Auswahlaxioms kann man das **Lemma von Zorn** beweisen:⁶⁶

Besitzt jede Kette eine obere Schranke, so besitzt \mathcal{A} ein maximales Element.

⁶⁶sieh etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Lemma_von_Zorn

Index

- G_δ -Menge, 14
- σ -Algebra, 60
- abgeschlossen, 20
- Abschluss, 11
- Abstand, 8
- Adjungierte, 40
- algebraisches Dual, 5
- analytisch, 37
- Antisymmetrie, 63
- Banachraum, 3
- beschränkt, 3, 5
- Besselsche Ungleichung, 11
- Borel- σ -Algebra, 60
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 7
- Definitheit, 3
- dicht, 10
- dicht definiert, 40
- Dirichlet-Kern, 16
- Dirichlet-Randbedingung, 34
- Distribution, 52
- Distributionsableitung, 54
- Dreiecksungleichung, 3
- Dual, 7
- Dualraum, 7
- Durchmesser, 14
- einfach, 61
- Einheitskugel, 3
- Elementarfunktion, 61
- endlich, 60
- fast überall, 60
- folgenkompakt, 22
- Fourier-Entwicklung, 12
- Fourier-Koeffizienten, 10
- Fourier-Reihe, 12
- Fredholm-Gleichung erster Art, 48
- Fredholm-Gleichung zweiter Art, 48
- Funktional, 5
- gleichgradig stetig, 25
- Hölder-Ungleichung, 62
- Halbnorm, 3
- halbnormierter Raum, 3
- Halbordnung, 63
- Hilbertraum, 7
- Homogenität, 3
- Innere, 11
- Integral, 61
- integrierbar, 61
- isometrisch, 27
- isometrisch eingebettet, 27
- Kette, 63
- kompakt, 22, 24
- Laplace-Operator, 33
- Laplace-Verteilung, 60
- Lebesgue-Maß, 60
- Lemma von Zorn, 63
- lokal integrierbar, 52
- mager, 19
- maximal, 63
- Maß, 60
- Maßraum, 60
- messbar, 61
- Messraum, 60
- Minkowski-Funktional, 31
- Minkowski-Ungleichung, 62
- Neumannsche Reihe, 37
- Norm, 3
- normerhaltend, 27
- normierter Raum, 3
- Nullmenge, 60
- Nullumgebung, 18
- obere Schranke, 63
- offen, 18
- Operator, 5

orthogonal, 7
Orthogonalprojektion, 9
Orthonormalbasis, 10
Orthonormalsystem, 10

Parallelogrammgleichung, 8
Parsevalsche Gleichung, 11
partielle Isometrie, 49
Prähilbertraum, 7
präkompakt, 22
Punktspektrum, 33

Rand, 11
Reflexivität, 63
relativ kompakt, 22
residual, 14
Resolvente, 36
Resolventenmenge, 36

Satz des Pythagoras, 8
Schauder-Lemma, 18
schwache Ableitung, 54
selbstadjungiert, 41
Singuärwerte, 51
Singularwertzerlegung, 51
Skalarprodukt, 7
Sobolev-Raum, 54
Spektralradius, 37
Spektralzerlegung, 49
Spektrum, 36
sublinear, 28
summierbar, 11
symmetrisch, 41

Testfunktionen, 52
total beschränkt, 22
total geordnet, 63
Träger, 52
Transitivität, 63

unitärer Raum, 7

Volterra-Operator, 36
von erster Kategorie, 19
von zweiter Kategorie, 19

Wärmeleitungsgleichung, 33
Wahrscheinlichkeitsmaß, 60
Wellengleichung, 33
Wurzel, 49

Zählmaß, 60