Jürgen Müller

Fourieranalysis

Skriptum zur Vorlesung
Wintersemester 2021/22
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Contents

1 Fourier-Transformation auf dem Einheitskreis

Ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar, also $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|c_\nu|<\infty$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu$ nach dem Weierstraß-Kriterium gleichmäßig auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $B:=\{z:|z|\le 1\}$ in $\mathbb{C}$. Die Funktion $f:B\to\mathbb{C}$ mit

$$f(z):=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu \quad (z\in B)$$

ist damit stetig auf B. Außerdem ist f beliebig oft differenzierbar auf der offenen Kreisscheibe $\mathbb{D}:=B^\circ=\{z:|z|<1\}$ und

$$c_k=f^{(k)}(0)/k!$$

der k-te Taylor-Koeffizient von f. Aufgrund der $2\pi i$-Periodizität der Exponentialfunktion ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}\,dt=\begin{cases}-ie^{int}/n\big|_{-\pi}^{\pi}=0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$$

für $n\in\mathbb{Z}$ und damit gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})e^{-ikt}\,dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(\nu-k)t}\,dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\delta_{\nu,k}=c_k \quad (k\in\mathbb{N}_0).$$

Also lassen sich die Taylor-Koeffizienten auch per Integration aus f berechnen.
Wir schreiben

$$\mathbb{S}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$$

für den Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Mit der Multiplikation von $\mathbb{C}$ und der Betragsmetrik wird $\mathbb{S}$ zu einer kompakten abelschen Gruppe, wobei $\overline{z}$ invers zu $z\in\mathbb{S}$ ist. Außerdem setzen wir für $1\le p<\infty$

$$\ell_p(\mathbb{Z}):=\{(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}:\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|c_\nu|^p:=\sup\{\sum_{\nu\in F}|c_\nu|^p:F\subset\mathbb{Z}\text{ endlich}\}<\infty\}.$$

Ist $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell_1(\mathbb{Z})$, so ist mit gleicher Argumentation wie oben

$$f(z):=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu z^\nu:=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}c_\nu z^\nu \qquad (z\in\mathbb{S})$$

stetig auf $\mathbb{S}$ und nun für alle $k\in\mathbb{Z}$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})e^{-ikt}\,dt. \tag{1.1}$$

Mit m bezeichnen wir das normierte **Bogenmaß** auf $\mathbb{S}$, d. h. $2\pi m$ ist das Bildmaß von $\lambda_{[-\pi,\pi]}$ unter der Abbildung $t\mapsto e^{it}$ (siehe Anhang). Für m-integrierbare Funktionen f gilt dann

$$\int f\,dm=\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}f(e^{it})\,d\lambda(t)$$

und im Falle von Regelfunktionen[1] auch

$$\int f\,dm = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,dt\,.$$

Weiter setzen wir $L_p(m) := L_p(\mathbb{S}, \mathscr{B}, m)$ für $p \in [1,\infty)$ (siehe wieder Anhang) und $L(m) := L_1(m)$. Dann sind $(L_p(m), \|\cdot\|_p)$ Banachräume[2] und für $p = 2$ ist die Norm induziert durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int f\overline{g}\,dm \qquad (f, g \in L_2(m)),$$

also $\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \int |f|^2\,dm$ für $f \in L_2(m)$. Durch $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_k(z) := z^k$ für $z \in \mathbb{S}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist ein Orthonormalsystem in $L_2(m)$ gegeben.[3]

Denn: Wegen $\overline{z} = z^{-1}$ für $z \in \mathbb{S}$ gilt für $j, k \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_j, e_k\rangle = \int z^j\overline{z}^k\,dm = \int z^{j-k}\,dm(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}dt = \delta_{j,k}\,.$$

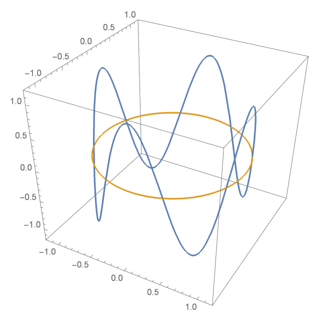

Figure 1: $\mathrm{Re}(z^4) = \cos(4t)$ mit $z = e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

Bemerkung und Definition 1.1 Es sei $f \in L_1(m)$. Dann ist für $k \in \mathbb{Z}$ auch $z \mapsto f(z)\overline{z}^k \in L_1(m)$. Man nennt

$$\widehat{f}(k) := f^\wedge(k) := \int f(z)\overline{z}^k\,dm(z) = \int f e_{-k}\,dm = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(e^{it})e^{-ikt}\,d\lambda(t)$$

den k-ten **Fourier-Koeffizient** von f. Wegen

$$|\widehat{f}(k)| \le \int |f|\,dm = \|f\|_1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

[1] bzw. Riemann-integrierbaren Funktionen

[2] In der Vollständigkeit liegt der ganz wesentliche Vorteil gegenüber der Beschränkung auf Riemann-integrierbare Funktionen!

[3] In Polarkoordinaten $z = e^{it}$ ist $z^k = e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$. Daher spricht man auch vom trigonometrischen System.

ist die Folge $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ beschränkt, also $\widehat{f} \in B(\mathbb{Z})$.[4] Weiter nennt man $\widehat{f}$ die **Fourier-Transformierte** von f und die lineare Abbildung $L_1(m) \ni f \mapsto \widehat{f} \in B(\mathbb{Z})$ **Fourier-Transformation** (auf $L_1(m)$). Dabei ist

$$||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$$

und damit die Fourier-Transformation insbesondere stetig. Ist $f \in L_2(m)$, so ist

$$\widehat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Außerdem folgt dann aus der Bessel-Ungleichung ([Ü])

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\nu)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \int |f|^2 \, dm,$$

also insbesondere $\widehat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z})$.

Beispiel 1.2 Wir setzen $\arg(z) := t$, falls $z = e^{it}$ mit $t \in (-\pi, \pi]$ und betrachten $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(z) := \arg^2(z) \qquad (z \in \mathbb{S}),$$

also $f(e^{it}) = t^2$ für $t \in (-\pi, \pi]$.

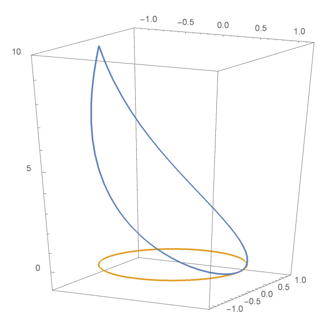

Figure 2: $f(e^{it}) = t^2$ für $t \in (-\pi, \pi]$.

Dann ergibt sich

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \pi^2/3$$

und mit zweimaliger partieller Integration ([Ü])

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt} \, dt = (-1)^k \frac{2}{k^2}$$

für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Insbesondere ist $\widehat{f} \in \ell_1(\mathbb{Z})$.

[4] $B(M)$ bezeichnet den linearen Raum der beschränkten Funktionen auf M, der mit sup-Norm $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty,X}$ ein Banachraum ist.

Bemerkung und Definition 1.3 Aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ ergibt sich die Rotationsinvarianz des Bogenmaßes m, d. h. sind $h \in L_1(m)$ und $\zeta \in \mathbb{S}$, so gilt

$$\int h(z\overline{\zeta})\, dm(z) = \int h(z)\, dm(z).$$

Sind nun $f, g \in L_1(m)$, so folgt

$$\int\int |f(z\overline{\zeta})g(\zeta)|\, dm(z)\, dm(\zeta) = \int\int |f(z)|\, dm(z)\, |g(\zeta)|\, dm(\zeta) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Mithilfe des Satzes von Fubini (siehe Maßtheorie) kann man zeigen, dass das **Faltungsintegral**

$$(f * g)(z) = \int f(z\overline{\zeta})g(\zeta)\, dm(\zeta)$$

für m-fast alle $z \in \mathbb{S}$ existiert. Außerdem gilt $f * g \in L_1(m)$ mit $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Man nennt $f * g$ die **Faltung** von f und g. Durch die Substitution $z\overline{\zeta} =: w$, also $\zeta = z\overline{w}$, ergibt sich

$$f * g = g * f \qquad (f, g \in L_1(m))$$

also die Kommutativität der Faltung.[5] Ist dabei f stetig auf $\mathbb{S}$, so ist überall definiert und $f * g$ stetig ([Ü]) mit $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ und ist f in $L_p(m)$, so ist $f * g \in L_p(m)$ mit $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$[6].

Satz 1.4 *Für $f, g \in L(m)$ ist*

$$(f * g)^\wedge = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{Z}$ folgt aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
(f * g)^\wedge(k) &= \int\int f(z\overline{\zeta})g(\zeta)\, dm(\zeta)\, z^{-k}\, dm(z) \\
&= \int\int f(z\overline{\zeta})(z\overline{\zeta})^{-k}\, dm(z)\, g(\zeta)\zeta^{-k}\, dm(\zeta) \\
&= \int f(z)z^{-k}\, dm(z) \cdot \int g(\zeta)\zeta^{-k}\, dm(\zeta) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung und Definition 1.5 Ist μ ein komplexes Borelmaß auf $\mathbb{S}$ und $|\mu| \geq 0$ die Totalvariation von μ (siehe Anhang, Bemerkung und Definition A.10), so definiert man die **Fourier-Stieltjes Transformierte** $\widehat{\mu}$ von μ durch

$$\widehat{\mu}(k) := \int \overline{z}^k\, d\mu(z) = \int e_{-k}\, d\mu \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

[5]Man kann zeigen, dass die Faltung auch assoziativ ist. Damit wird $(L_1(m), *)$ zu einer kommutativen Banachalgebra.

[6]folgt etwa aus der Youngschen-Ungleichung; siehe etwa https://en.wikipedia.org/wiki/Young's_convolution_inequality

Wegen $|\int g\,d\mu| \le \int |g|\,d|\mu|$ für $g \in C(\mathbb{S})$[7] gilt

$$|\widehat{\mu}(k)| \le \int d|\mu| = |\mu|(\mathbb{S}) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

und damit ist wieder $\widehat{\mu} = (\widehat{\mu}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in B(\mathbb{Z})$. Ist speziell $\mu = fm$, d. h.

$$\mu(A) = \int 1_A f\,dm \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{S})),$$

so gilt $\int g\,d(fm) = \int gf\,dm$ für $g \in C(\mathbb{S})$ und damit insbesondere ist $\widehat{\mu} = \widehat{f}$. In diesem Sinne kann man die Fourier-Stieltjes Transformation als Erweiterung der Fourier-Transformation auffassen. Ist ν ein weiteres komplexes Borelmaß auf $\mathbb{S}$, so definiert man

$$(\nu * \mu)(A) := \int \nu(\overline{\zeta}A)\,d\mu(\zeta) \qquad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{S})).$$

Ist δ_1 das Dirac-Maß an der Stelle 1, so gilt $\nu * \delta_1 = \nu$. Man kann zeigen ([Ü]), dass auch $\nu * \mu$ ein Borelmaß auf $\mathbb{S}$ ist mit

$$\int h(w) d(\nu * \mu)(w) = \int\int h(z\zeta)\,d\nu(z) d\mu(\zeta)$$

für $h \in C(\mathbb{S})$. Durch Anwendung auf $h(w) = \overline{w}^k$ ergibt sich

$$(\nu * \mu)^\wedge = \widehat{\nu} \cdot \widehat{\mu}.$$

Beispiel 1.6 Für das Dirac-Maß δ_ζ an der Stelle $\zeta \in \mathbb{S}$ gilt

$$\widehat{\delta_\zeta}(k) = \overline{\zeta}^k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Insbesondere ist $\widehat{\delta_1}(k) = 1$ für alle k.

Bemerkung und Definition 1.7 Für $d \in \mathbb{N}$ und $\zeta := \zeta_d := e^{2\pi i/d}$ seien

$$S_d := \{z \in \mathbb{C} : z^d = 1\} = \{\zeta^j : j = 0, \dots, d-1\}$$

die Menge der d-ten Einheitswurzeln[8] und $\# := \#_d := \sum_{j=0}^{d-1} \delta_{\zeta^j}$ das Zählmaß bzgl. S_d. Für $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ (bzw. $f : S_d \to \mathbb{C}$) ist

$$\widehat{f\#}(k) = \int \overline{z}^k\,f(z)\,d\#(z) = \sum_{j=0}^{d-1} \overline{\zeta}^{kj} f(\zeta^j) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen $\zeta^d = 1$ ist $\widehat{f\#}(k) = \widehat{f\#}(k+d)$ für $k \in \mathbb{Z}$, also $\widehat{f\#}$ eine d-periodische Folge. Die Abbildung

$$f \mapsto (\widehat{f\#}(0), \dots, \widehat{f\#}(d-1)) \in \mathbb{C}^d = \{(z_0, \dots, z_{d-1}) : z_j \in \mathbb{C}\}$$

[7] Für metrische Räume (X, d) schreiben wir $C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$.

[8] S_d ist eine Untergruppe von $\mathbb{S}$, genannt zyklische Gruppe der Ordnung d.

nennt man **diskrete Fourier-Transformation**.
Identifiziert man f mit dem Tupel $(f(\zeta^0), \ldots, f(\zeta^{d-1})) \in \mathbb{C}^d$, so definiert die diskrete Fourier-Transformation eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^d$ nach $\mathbb{C}^d$, beschrieben bzgl. der kanonischen Basis auf $\mathbb{C}^d$ mit $\eta := \eta_d := \overline{\zeta_d}$ durch die Matrix

$$U := U_d := (\eta^{kj})_{j,k=0,\ldots,d-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \eta & \eta^2 & \cdots & \eta^{d-1} \\ 1 & \eta^2 & \eta^4 & \cdots & \eta^{2(d-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \eta^{d-1} & \eta^{2(d-1)} & \cdots & \eta^{(d-1)(d-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d\times d}.$$

Dabei gilt $U^*U = dE$, wobei $E = E_d$ die $(d \times d)$-Einheitsmatrix bezeichnet ([Ü]). Versieht man dabei $\mathbb{C}^d$ mit dem kanonischen Skalarprodukt

$$\langle (z_0, \ldots, z_{d-1}), (w_0, \ldots, w_{d-1}) \rangle = \sum_{j=0}^{d-1} z_j \overline{w_j}\ ,$$

so ist die mit dem Faktor $1/\sqrt{d}$ passend normierte diskrete Fourier-Transformation also unitär.[9] Man kann nachrechnen ([Ü]), dass die Matrix U_{2d} in der Form

$$U_{2d} = \begin{pmatrix} U_d & D_d U_d \\ U_d & -D_d U_d \end{pmatrix} P_d = \begin{pmatrix} E_d & D_d \\ E_d & -D_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_d & 0 \\ 0 & U_d \end{pmatrix} P_d$$

zerlegbar ist, wobei D_d die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1, \eta_{2d}, \eta_{2d}^2, \ldots, \eta_{2d}^{d-1})$ bezeichnet und P_d die Permuationsmatrix ist, die die Einträge von $(z_0, \ldots, z_{2d-1})$ mit geraden Indizes vor die mit ungeraden setzt. Diese Formel von bildet die Grundlage der **Fast Fourier Transform** (kurz FFT)[10] zur sehr effizienten Berechnung der diskreten Fourier-Transformation sowie der **Quantum Fourier Transform** (kurz QFT)[11].

Da die diskrete Fourier-Transformation bijektiv ist, ist insbesondere f durch $\widehat{f\#}$ eindeutig festgelegt. Die Umkehrtransformation ist im Wesentlichen wieder die diskrete Fourier-Transformation, mit dem kleinen Unterschied, dass die Matrix U durch $d^{-1}U^* = d^{-1}(\zeta^{kj})$ ersetzt wird. Wir wollen nun allgemeiner auf die Frage der Invertierbarkeit von $\widehat{f}$ und der Rekonstruktion von f aus $\widehat{f}$ eingehen.

Bemerkung und Definition 1.8 Ist $f \in L(m)$, so heißen

$$S_n f := \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) e_\nu$$

[9] Das Skalarprodukt entspricht dem Skalarprodukt auf $L^2(\sigma)$.
[10] Siehe etwa https://en.wikipedia.org/wiki/Cooley-Tukey_FFT_algorithm.
[11] Siehe etwa https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform.

n-te **Fourier-Teilsumme** von f und $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die **Fourier-Reihe** von f. Für $c = (c_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ und $z = e^{it} \in \mathbb{S}$ schreiben wir

$$c^\vee(z) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu z^\nu := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu z^\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu t}$$

im Falle der Konvergenz. Damit ist $(\widehat{f})^\vee(z) = \lim_{n\to\infty} S_n f(z)$ im Falle der Konvergenz. Existiert $c^\vee(z)$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{S}$, so ergibt sich $(c^\vee)^\wedge = c$ aus (1.1). Nach dem Weierstraß-Kriterium gilt dies insbesondere wenn $c \in \ell_1(\mathbb{Z})$ ist.

Beispiel 1.9 Wir betrachten wieder $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 1.2, also $f(e^{it}) = t^2$ für $t \in [-\pi, \pi]$. Hier ist für $z = e^{it}$ die n-te Fourier-Teilsumme gegeben durch

$$(S_n f)(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) z^\nu = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \frac{2}{\nu^2}(z^\nu + z^{-\nu}) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \cos(\nu t).$$

Da $\widehat{f} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ gilt, existiert $(\widehat{f})^\vee = \lim\limits_{n\to\infty} S_n f$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{S}$.

Wir wollen nun zeigen, dass die Fourier-Transformation injektiv (jedenfalls) auf $C(\mathbb{S})$ ist und auf die Frage eingehen, wie man f aus $\widehat{f}$ rekonstruieren kann.

Bemerkung und Definition 1.10 Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\mathbb{Z}_n := \{k \in \mathbb{Z} : |k| \le n\}$ und $\mathscr{T}_n := \operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}_n\}$ sowie $\mathscr{T} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_n$. Ist $P = \sum\limits_{\nu=-n}^{n} c_\nu e_\nu \in \mathscr{T}_n$, so nennt man P ein **trigonometrisches Polynom** vom Grad $\le n$. Nach (1.1) gilt $\widehat{P}(k) = c_k$ für $|k| \le n$ und $\widehat{P}(k) = 0$ für $|k| > n$ sowie $(\widehat{P})^\vee = S_n P = P$. Für beliebiges $f \in L_1(m)$ ergibt sich

$$f * P = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu (f * e_\nu) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) c_\nu e_\nu = (\widehat{f}\,\widehat{P})^\vee$$

und insbesondere $f * P \in \mathscr{T}_n$. Speziell gilt $S_n f = f * D_n$, wobei

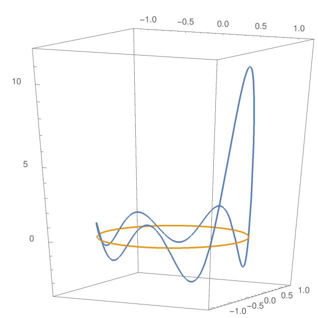

Figure 3: Dirichlet-Kern D_5 (blau)

$$D_n := \sum_{\nu=-n}^{n} e_\nu = (1_{\mathbb{Z}_n})^\vee$$

den n-ten **Dirichlet-Kern** bezeichnet (Abb. 3). Mit $C_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} e_\nu$ ist

$$D_n = C_n + \overline{C_n} - 1 = 2\mathrm{Re}(C_n) - 1$$

und damit insbesondere D_n reellwertig.

Mit $B_\delta := \{\zeta \in \mathbb{S} : |\zeta - 1| < \delta\}$ gilt

Satz 1.11 (Approximative Eins) *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $Q_n \in C(\mathbb{S})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n\|_1 < \infty$ so, dass $\int Q_n \, dm = 1$ und*

$$\max_{\mathbb{S}\setminus B_\delta} |Q_n| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.2}$$

für alle $\delta > 0$. Dann gilt

$$(f * Q_n)(z) \to f(z) \qquad (n \to \infty)$$

für alle m-integrierbaren Funktionen f und alle Stetigkeitspunkte z von f. Ist $f \in C(\mathbb{S})$, so ist die Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.[12]

Beweis. Wir wählen $M > 0$ so, dass $\|Q_n\|_1 = \int |Q_n| \, dm \leq M$ für alle n. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert wegen $|z\overline{\zeta} - z| = |\zeta - 1|$ für alle $\zeta \in \mathbb{S}$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(z\overline{\zeta}) - f(z)| < \varepsilon$$

für alle $\zeta \in B_\delta$. Aus $f(z) \int Q_n(\zeta) \, dm(\zeta) = f(z)$ ergibt sich mit (1.2) für n genügend groß

$$\begin{aligned}
|(f * Q_n)(z) - f(z)| &= \left| \int (f(z\overline{\zeta}) - f(z)) \, Q_n(\zeta) \, dm(\zeta) \right| \\
&\leq \int |f(z\overline{\zeta}) - f(z)| \, |Q_n(\zeta)| \, dm(\zeta) \\
&\leq \int_{B_\delta} \varepsilon |Q_n(\zeta)| \, dm(\zeta) + \max_{\mathbb{S}\setminus B_\delta} |Q_n| \int_{\mathbb{S}\setminus B_\delta} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)| \, dm(\zeta) \\
&\leq M\varepsilon + \|f - f(z)\|_1 \max_{\mathbb{S}\setminus B_\delta} |Q_n| \leq (M+1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Also gilt $(f * Q_n)(z) \to f(z)$ für $n \to \infty$.
Ist f stetig auf der kompakten Menge $\mathbb{S}$, so ist f gleichmäßig stetig. Daher kann man δ so wählen, dass $|f(z\overline{\zeta}) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $\zeta \in B_\delta$ und alle $z \in \mathbb{S}$ gilt. Wie oben ergibt sich dann für genügend große n sogar

$$\|f * Q_n - f\|_\infty \leq M\varepsilon + (\|f\|_1 + \|f\|_\infty) \max_{\mathbb{S}\setminus B_\delta} |Q_n| \leq (M+1)\varepsilon$$

und damit $\|f * Q_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. $\square$

[12] Wegen $f = f * \delta_1$ kann man die Konvergenzaussage als eine Art Konvergenz von Q_n gegen die Eins der Faltung δ_1 interpretieren. Daher der Name approximative Eins.

Bemerkung 1.12 Wir nennen eine Folge (Q_n) wie in Satz 1.11 eine **Folge guter Kerne**. Es stellt sich natürlich die Frage nach der Existenz guter Kerne. Einfach und naheliegend wäre die Folge (D_n) der Dirichlet-Kerne. Man kann zeigen, dass (D_n) *keine* Folge guter Kerne darstellt, da

$$\|D_n\|_1 = \int |Q_n|\, dm \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

gilt ([Ü]). Wir betrachten stattdessen die arithmetischen Mittel der D_n. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} D_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=-k}^{k} e_\nu = \sum_{\nu=-n}^{n} e_\nu \sum_{k=|\nu|}^{n} 1 = \sum_{\nu=-n}^{n} (n+1-|\nu|) e_\nu .$$

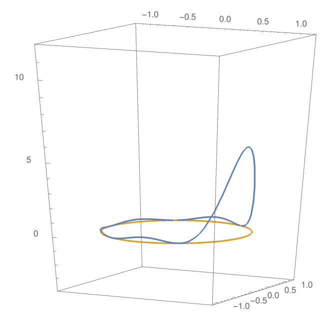

Figure 4: Fejér-Kern F_5 (blau)

Mit

$$F_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) e_\nu \in \mathscr{T}_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ist damit

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (f * D_k) = f * F_n = (\widehat{f}\, \widehat{F_n})^\vee .$$

Das trigonometrische Polynom F_n heißt n-ter **Fejér-Kern**.

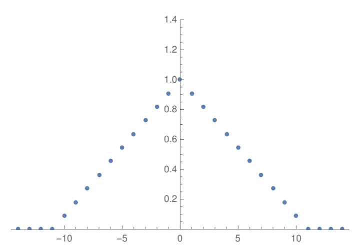

Figure 5: $\widehat{F_{10}}$

Die Folge (F_n) erweist sich tatsächlich als eine Folge guter Kerne: Zunächst ist

$$\int F_n\, dm = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) \int e_\nu\, dm = 1 .$$

Weiter ist für $z \in \mathbb{S}$

$$|C_n(z)|^2 = \Big(\sum_{j=0}^{n} z^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \overline{z}^k\Big) = \sum_{j,k=0}^{n} z^{j-k} = \sum_{\nu=-n}^{n} (n+1-|\nu|)z^\nu = (n+1)F_n(z),$$

also $F_n \geq 0$ und damit auch $\|F_n\|_1 = 1$ für alle n. Schießlich gilt für $z \in \mathbb{S} \setminus B_\delta$

$$F_n(z) = \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 = \frac{1}{n+1}\Big|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\Big|^2 \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{4}{\delta^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit gilt $F_n \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{S} \setminus B_\delta$.

Als wichtige Folgerung erhalten wir die Konvergenz der arithmetischen Mittel der $S_n f$ in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$ gegen f:

Satz 1.13 (Fejér) *Für alle m-integrierbaren f und alle Stetigkeitspunkte z von f gilt*

$$(\widehat{f}\,\widehat{F_n})^\vee(z) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(S_k f)(z) \to f(z) \quad (n \to \infty).$$

Für $f \in C(\mathbb{S})$ ist die Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{S}$. Insbesondere ist $C(\mathbb{S}) \ni f \mapsto \widehat{f}$ injektiv und die Menge der trigonometrischen Polynome dicht in $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis. Die Konvergenzaussagen ergeben sich unmittelbar aus Satz 1.11 und Bemerkung 1.12. Ist f stetig mit $\widehat{f} = 0$, so ist $(\widehat{f}\,\widehat{F_n})^\vee = 0$ für alle n und damit $f = 0$. Dies zeigt die Injektivität von $\widehat{f}$ auf $C(\mathbb{S})$. Schließlich liegen wegen $(\widehat{f}\,\widehat{F_n})^\vee \in \mathscr{T}_n$ die trigonometrischen Polynome dicht in $C(\mathbb{S})$. $\square$

2 Anwendungen des Satzes von Fejér

Eine nicht unwesentliche Folgerung aus dem Satz von Fejér ist

Bemerkung 2.1 Es sei f m-integrierbar. Weiter sei $z \in \mathbb{S}$ ein Stetigkeitspunkt an dem $(\widehat{f})^\vee(z)$ existiert, also die Fourier-Reihe konvergent ist. Dann konvergieren auch die arithmetischen Mittel zum gleichen Grenzwert ([Ü]). Also gilt nach Satz 1.13

$$(\widehat{f})^\vee(z) = f(z)$$

Als Anwendung ergibt sich die Lösung des Basel-Problems[13]:

Bemerkung 2.2 Aus Beispiel 1.9 und Bemerkung 2.1 erhält man

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \cos(\nu t)$$

für alle $t \in [-\pi, \pi]$. Insbesondere ergibt sich damit für $t = \pi$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und für $t = 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Bemerkung 2.3 Ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{S}$, so setzen wir

$$(Df)(z) := izf'(z) \qquad (z \in \mathbb{S}).$$

Ist $h(t) := f(e^{it})$ für $t \in \mathbb{R}$, so ist $h \in C^1(\mathbb{R})$ und 2π-periodisch mit $h'(t) = (Df)(e^{it})$ für $t \in \mathbb{R}$. Sind f, g stetig differenzierbar auf $\mathbb{S}$, so gilt die partielle-Integration-Formel

$$\int (Df)g\,dm = -\int f(Dg)\,dm.$$

Mit $De_k = ik \cdot e_k$ ergibt sich

$$(Df)\widehat{\ }(k) = ik \cdot \widehat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Außerdem folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Bessel-Ungleichung

$$\sum_{0\neq\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)| \le \Big(\sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2\nu^2\Big)^{1/2}\Big(2\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu^2\Big)^{1/2} \le \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|Df\|_2$$

[13] Siehe etwa https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem.

und damit $\widehat{f} \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Nach Bemerkung 2.1 gilt $(\widehat{f})^\vee = f = \lim_{n\to\infty} S_n f$ mit gleichmäßiger Konvergenz.
Man könnte auf den Gedanken kommen, dass dies auch für stetige Funktionen gilt. Man kann jedoch zeigen. dass stetige Funktionen existieren, deren Fourier-Reihe nicht überall punktweise konvergiert.[14]

Wir ziehen weitere Folgerungen aus den Satz von Fejér, jetzt für die Fourier-Transformation auf den Räumen $L_1(m)$ und $L_2(m)$. Dabei verwenden wir, dass die Menge $C(\mathbb{S})$ dicht in $(L_p(m), \|\cdot\|_p)$ ist (siehe Anhang, Bemerkung A.9).

Satz 2.4 *Für $1 \le p < \infty$ ist die Menge $\mathscr{T}$ der trigonometrischen Polynome dicht in $L_p(m)$.*

Beweis. Es seien $f \in L_p(m)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $g \in C(\mathbb{S})$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Wegen $\|h\|_p \le \|h\|_\infty$ für $h \in C(\mathbb{S})$ existiert nach dem Satz von Fejér ein $P \in \mathscr{T}$ mit $\|g - P\|_p < \varepsilon/2$. Damit ist $\|f - P\|_p < \varepsilon$. □

Wir schreiben $c_0(\mathbb{Z})$ für die Menge aller abklingenden Folgen in $\mathbb{Z}$, also aller $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mit $c_k \to 0$ für $k \to \pm\infty$. Als Folgerung aus Satz 2.4 ergibt sich das wichtige **Riemann-Lebesgue-Lemma**:

Satz 2.5 *Für alle $f \in L_1(m)$ ist $\widehat{f}$ in $c_0(\mathbb{Z})$.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 2.4 existiert ein trigonometrisches Polynom P mit $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. Ist $P \in \mathscr{T}_N$, so gilt $\widehat{P}(k) = 0$ für $|k| > N$ und damit

$$|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(k) - \widehat{P}(k)| \le \|f - P\|_1 < \varepsilon$$

für $|k| > N$. □

Bemerkung 2.6 Wir schreiben $\gamma(z) := 1/(1-z)$ für $z \in \mathbb{S} \setminus \{1\}$. Ist für $f \in L_1(m)$ auch $\gamma \cdot f \in L_1(m)$, so gilt $(S_n f)(1) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Denn: Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt mit $g := \gamma \cdot f$

$$\widehat{f}(k) = \int (1-z) g(z) \overline{z}^k \, dm(z) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k-1),$$

also mit Satz 2.5

$$(S_n f)(1) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) = \sum_{\nu=-n}^{n} (\widehat{g}(\nu) - \widehat{g}(\nu - 1)) = \widehat{g}(n) - \widehat{g}(-n-1) \to 0$$

für $n \to \infty$.

[14]Ein vergleichsweise einfacher Beweis ergibt sich aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (siehe etwa `https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Funktionalanalysis/Funktionalanalysis_WS1819.pdf`, Satz 2.6). Wesentlich ist dabei die Tatsache, dass $\int |D_n| \, dm \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt.

Eine Funktion $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ heißt Hölder-stetig an der Stelle $\zeta \in \mathbb{S}$, falls $M, \alpha > 0$ so existieren, dass $|f(z) - f(\zeta)| \le M|z - \zeta|^\alpha$ für alle z aus einer Umgebung von ζ. Der nächste Satz gibt ein relativ einfach zu beweisendes und doch recht schlagkräftiges hinreichendes Kriterium für die punktweise Konvergenz von $(S_n f)$.

Satz 2.7 *Es sei f m-integerierbar und Hölder-stetig an der Stelle $\zeta \in \mathbb{S}$. Dann konvergiert $(S_n f)(\zeta)$ gegen $f(\zeta)$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\zeta = 1$. Dann gilt

$$|\gamma(z)(f(z) - f(1))| \le M|z - 1|^{\alpha - 1}$$

für $z \neq 1$ aus einer Umgebung von 1. Wegen $1-\alpha < 1$ und $|1-e^{it}|^2 = 2-2\cos t = 4\sin^2(t/2)$ ist

$$\int \frac{1}{|z-1|^{1-\alpha}}\, dm(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{|1-e^{it}|^{1-\alpha}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(2|\sin(t/2)|)^{1-\alpha}} < \infty$$

(man beachte, dass $2|\sin(t/2)| \sim |t|$ für $t \to 0$). Nach Bemerkung 2.6 gilt

$$(S_n f)(1) - f(1) = S_n(f - f(1))(1) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

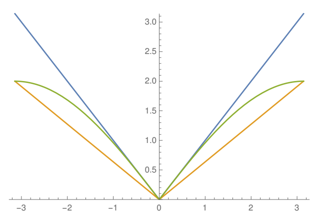

Figure 6: $t \mapsto |t|$, $t \mapsto 2|t|/\pi$ und $t \mapsto 2|\sin(t/2)|$.

Satz 2.7 zeigt, dass Hölder-Stetigkeit in allen Punkten jedenfalls punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe gegen f impliziert. Auch wenn $(S_n f)$ nicht für alle stetigen f konvergiert, so kann man doch zeigen, dass der Fehler der Approximation durch $S_n f$ nicht viel größer ist als der minimale Fehler der Approximation aus $\mathscr{T}_n$ heraus:

Bemerkung und Definition 2.8 Es seien $(X, \|\cdot\| = \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\| = \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Man schreibt $L(X,Y)$ für die Mengen der linearen Abbildungen $T : X \to Y$ mit

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\| \le 1\} < \infty.$$

Dann wird $L(X,Y)$ durch $\|T\| := \|T\|_{X,Y} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \le 1\}$ zu einem normierten Raum. Die Norm $\|\cdot\|_{X,Y}$ heißt **Operatornorm** auf $L(X,Y)$. Dabei gilt $\|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\|$

für alle $x \in X$. Wir betrachten S_n als Operator von $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|)_\infty$ nach $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|)_\infty$. Wegen $S_n f = f * D_n$ gilt

$$|S_n f(z)| \leq \|f\|_\infty \int |D_n|\, dm$$

für alle $f \in C(\mathbb{S})$ und $z \in \mathbb{S}$, also $\|S_n\| \leq \|D_n\|_1$.[15] Außerdem ist ([Ü])

$$\|D_n\|_1 \leq 3 + \ln n.$$

Wegen $S_n P = P$ für alle $P \in \mathscr{T}_n$ folgt (wieder [Ü])

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq (4 + \ln n) \inf_{P \in \mathscr{T}_n} \|f - P\|_\infty.$$

Man beachte, dass $\inf_{P\in\mathscr{T}_n} \|f - P\|_\infty$ wegen der Dichtheit von $\mathscr{T}$ in $C(\mathbb{S})$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Wir widmen uns nun dem besonders schönen Hilbertraum-Fall $L_2(m)$. Da $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(m)$ ist, gilt

$$\|f - S_n f\|_2 = \min_{P\in\mathscr{T}_n} ||f - P||_2 \tag{2.3}$$

für alle $f \in L_2(m)$ ([Ü]), d. h. $S_n f \in \mathscr{T}_n$ ist die beste Approximation aus $\mathscr{T}_n$ an f bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm. Weiter beachte man, dass $\ell_p(\mathbb{Z})$ mit dem Raum $(L_p(\mathbb{Z}), \mathrm{Pot}(\mathbb{Z}), \#)$, wobei $\#$ das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$ bezeichnet, übereinstimmt. Damit wird $\ell_p(\mathbb{Z})$ mit der Norm

$$\|c\|_p = (\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_\nu|^p)^{1/p}$$

zu einem Banachraum.

Satz 2.9 *Für $f \in L_2(m)$ gilt $||f - S_n f||_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ und die* ***Parsevalsche Gleichung***

$$||f||_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Außerdem ist die Fourier-Transformation $L_2(m) \ni f \mapsto \widehat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ ein isometrischer Isomorphismus[16].[17]

Beweis. Nach Satz 2.4 gilt $\inf_{P\in\mathscr{T}_n} \|f - P_n\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$[18], also folgt $\|f - S_n f\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$ aus (2.3). Weiter gilt $S_n f \in \mathscr{T}_n$ und $(f - S_n f) \perp \mathscr{T}_n$. Also ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras

$$||f||_2^2 \;=\; ||f - S_n f||_2^2 + ||S_n f||_2^2\,.$$

[15]Man kann zeigen, dass tatsächlich sogar Gleichheit gilt.

[16]Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist genau dann isometrisch, wenn $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.

[17]Man kann leicht in den Fehler verfallen, die Aussage so zu interpretieren, dass $(\widehat{f})^\vee = f$ fast überall auf $\mathbb{S}$ gilt. Dies ist zwar richtig, aber der Beweis der fast-überall Konvergenz von $(S_n f)$ erweist sich als eine extrem schwierige Angelegenheit. Die Aussage ist der berühmte Satz von Carleson aus dem Jahre 1966.

[18]Dies bedeutet, dass $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormal*basis* in $L_2(m)$ ist.

Wegen $||f - S_n f||_2^2 \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $||S_n f||_2^2 \to ||f||_2^2$ für $n \to \infty$. Außerdem ist, wieder mit dem Satz von Pythagoras,

$$||S_n f||_2^2 \;=\; ||\sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}(\nu) e_\nu||_2^2 \;=\; \sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2 \|e_\nu\|_2^2 = \sum_{\nu=-n}^{n} |\widehat{f}(\nu)|^2 \,.$$

Hieraus ergibt sich die Parsevalsche Gleichung und damit auch die Isometrie der Fourier-Transformation als Abbildung von $L_2(m)$ nach $\ell_2(\mathbb{Z})$ (also insbesondere auch die Injektivität). Die Surjektivität ergibt sich aus der Vollständigkeit von $L_2(m)$ und der Tatsache, dass die Menge der abbrechenden Folgen $\{c = (c_k) : c_k = 0 \text{ für } |k| \text{ genügend groß}\}$ dicht in $\ell_2(\mathbb{Z})$ ist ([Ü]). $\square$

Wir zeigen nun, dass eine L_p-Version des Satzes von Fejér gilt. Damit wird dann auch die Frage nach der Rekonstruierbarkeit von f aus $\widehat{f}$ (positiv) beantwortet. Vorbereitend beweisen wir ein einfaches Ergebnis über Folgen linearer Operatoren.

Satz 2.10 *Es seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und (T_n) eine Folge linearer Abbildungen $T_n : X \to Y$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Konvergiert die Folge $(T_n x)_n$ für alle x aus einer in X dichten Menge D, so konvergiert $(T_n x)_n$ für alle $x \in X$ und durch $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ ist ein lineare Abbildung $T : X \to Y$ definiert mit

$$\|T\| \le \liminf \|T_n\|.$$

Beweis. Es seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $y \in D$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_k y - T_m y\| < \varepsilon$ für $k, m \ge N$. Also gilt für $k, m \ge N$ auch

$$\|T_k x - T_m x\| \le \|T_k(x - y)\| + \|T_k y - T_m y\| + \|T_m(y - x)\| \le (2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| + 1)\varepsilon.$$

Damit ist $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge in Y, also konvergent. Da die Abbildungen T_n linear sind, ist die punkteise Grenzfunktion T ebenfalls linear. Es sei (n_j) so, dass

$$\|T_{n_j}\| \to \liminf \|T_n\| \qquad (j \to \infty).$$

Für $\|x\| \le 1$ gilt dann $\|Tx\| = \lim\limits_{j\to\infty} \|T_{n_j} x\| \le \lim\limits_{j\to\infty} \|T_{n_j}\| = \liminf \|T_n\|$. $\square$

Satz 2.11 (Approximative Eins, L_p-Version) *Es seien $1 \le p < \infty$, (Q_n) eine Folge guter Kerne und $f \in L_p(m)$. Dann gilt*

$$\|f - f * Q_n\|_p \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Beweis. Es sei $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n\|_1$. Wir betrachten die linearen Abbildungen $T_n : L_p(m) \to L_p(m)$ mit

$$T_n f := f * Q_n \quad (f \in L_p(m)).$$

Dann gilt nach Bemerkung 1.3

$$\|T_n f\|_p = \|f * Q_n\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|Q_n\|_1 \leq M\|f\|_p \quad (f \in L_p(m))$$

und damit $\|T_n\| \leq M$. Für $f \in C(\mathbb{S})$ (also auf einer dichten Teilmenge von $L_p(m)$) gilt außerdem $T_n f \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$, also auch $T_n f \to f$ in $L_p(m)$. Aus Satz 2.10 folgt, dass $(T_n f)_n$ für alle $f \in L_p(m)$ konvergiert und dass durch

$$Tf := \lim_{n\to\infty} T_n f = \lim_{n\to\infty} f * Q_n \quad (f \in L_p(m))$$

eine (wegen $\|T\| \leq M$ stetige) lineare Abbildung $T : L_p(m) \to L_p(m)$ definiert ist. Aus $Tf = f$ für $f \in C(\mathbb{S})$ folgt aufgrund der Stetigkeit $Tf = f$ für alle $f \in L_p(m)$. □

Satz 2.12 (Fejér, L_p-Version) *Für $f \in L_p(m)$ gilt*

$$(\widehat{fF_n})^\vee = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f \to f \quad (n \to \infty)$$

in $(L_p(m), \|\cdot\|_p)$. Insbesondere ist die Fourier-Transformation $L_1(m) \ni f \mapsto \widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$ injektiv.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Satz 2.11 und der Tatsache, dass die Fejér-Kerne F_n eine Folge guter Kerne bilden (Bemerkung 1.12). Ist $f \in L_1(m)$ mit $\widehat{f} = 0$, so ist $\widehat{fF_n} = 0$ für alle n und damit $f = 0$. □

Bemerkung 2.13 Insbesondere sieht man mit Satz 2.12: Ist f m-integrierbar und so, dass $(\widehat{f})^\vee$ auf einer Menge von postitivem Maß existiert, so ist $(\widehat{f})^\vee(z) = f(z)$ für m-fast alle z in dieser Menge. Dies folgt aus der Tatsache, dass jede in $L_1(m)$ gegen f konvergente Folge eine m-fast überall konvergente Teilfolge hat, deren Grenzfunktion fast überall mit f übereinstimmt (siehe Maßtheorie).

Als weitere Anwendung der Dichtheit der Menge der trigonometrischen Polynome in $C(\mathbb{S})$ bzw. $L_p(m)$ beweisen wir einen Ergodensatz für irrationale Drehungen auf dem Kreis $\mathbb{S}$ (ohne uns explizit auf den Begriff der Ergodizität zu beziehen).

Satz 2.14 (Ergodensatz) *Ist $\zeta = e^{2\pi i\theta}$ mit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so gilt für $1 \leq p < \infty$ und alle $f \in L_p(m)$*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(\zeta^j \cdot) \to \Big(\int f\,dm\Big)1_{\mathbb{S}} \quad (n \to \infty)$$

in $L_p(m)$. Für $f \in C(\mathbb{S})$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.

Beweis. Es sei φ die Drehung um den Winkel $2\pi\theta$ auf $\mathbb{S}$, also $\varphi(z) = \zeta z$ für $z \in \mathbb{S}$, und φ^j die j-te Iterierte von φ, also $\varphi^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}}$ und $\varphi^j = \varphi \circ \varphi^{j-1}$ für $j \in \mathbb{N}$. Wir betrachten für $1 \leq p < \infty$ die Folge der linearen Operatoren $T_n : L_p(m) \to L_p(m)$, definiert durch

$$T_n f := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f \circ \varphi^j.$$

Für $p = \infty$ betrachten wir T_n als Operator auf $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$. Dann ergibt sich

$$\|f \circ \varphi^j\|_p = \|f\|_p$$

aus der Rotationsinvarianz von m für $p < \infty$ und in offensichtlicher Weise für $p = \infty$. Damit ist $\|T_n f\|_p \leq \|f\|_p$ für $f \in L_p(m)$ bzw. $f \in C(\mathbb{S})$, also stets $\|T_n\| \leq 1$. Wegen der Dichtheit von $\mathscr{T}$ in $L_p(m)$ bzw. $C(\mathbb{S})$ reicht es nach Satz 2.10, die Behauptung für alle trigonometrischen Polynome zu zeigen. Aus Linearitätsgründen reicht es dazu wiederum, die Behauptung für die Monome e_k zu beweisen.
Da θ irrational ist, ist ζ keine Einheitswurzel. Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt damit $\zeta^k \neq 1$, also

$$\sum_{j=0}^{n} (e_k \circ \varphi^j)(z) = \sum_{j=0}^{n} (\zeta^j z)^k = z^k \cdot \frac{1 - \zeta^{k(n+1)}}{1 - \zeta^k} \quad (z \in \mathbb{S})$$

und folglich

$$\|T_n e_k\|_p \leq ||T_n e_k||_\infty \leq \frac{2}{(n+1)|1 - \zeta^k|} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Außerdem ist $T_n e_0 = T_n 1_{\mathbb{S}} = 1_{\mathbb{S}}$. Also gilt $T_n e_k \to \delta_{k,0} 1_{\mathbb{S}} = (\int e_k \, dm) 1_{\mathbb{S}}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Zum Abschluss gehen wir kurz darauf ein, wie man Ergebnisse über trigonometrische Approximation in entsprechende Resultate über Approximation durch algebraische Polynome auf kompakten Intervallen überführen kann. Ohne Einschränkung betrachten wir das Intervall $I := [-1, 1]$.

Bemerkung 2.15 Wir betrachten das Bildmaß μ von m unter der Abbildung $\mathrm{Re} : \mathbb{S} \to I$. Dann gilt für $g \in L_1(\mu)$

$$\int g(x) \, d\mu(x) = \int g(\mathrm{Re}\, z) \, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} g(\cos t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi]} g(\cos t) \, dt.$$

Weiterhin ist mit Substitution $t = \arccos x$ auch

$$\frac{1}{\pi} \int_I g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi]} g(\cos t) \, dt.$$

Also ist μ die (passend skalierte) Arkussinus-Verteilung auf I. Wir setzen $f^*(z) := f(\overline{z})$ und damit

$$L_{p,*}(m) := \{f \in L_p(m) : f = f^*\}$$

sowie

$$C_*(\mathbb{S}) := \{f \in C(\mathbb{S}) : f = f^*\}.$$

Für $x \in I$ existiert genau ein $z \in \mathbb{S}$ mit $\arg z \in [0, \pi]$ und $x = \mathrm{Re}(z)$, nämlich $z = e^{i \arccos x}$. Dann ist $\arg z = \arccos x$ und durch

$$Tf(x) := f(e^{i \arccos x}) \qquad (x \in I)$$

eine lineare Isometrie von $(L_{p,*}(m), \|\cdot\|_p)$ nach $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ und von $(C_*(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$ nach $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ definiert. Ist $g \in L_p(I)$ bzw. $g \in C(I)$ und

$$f(z) := g(\cos \arg z) = g(\cos t) \qquad (z = e^{it} \in \mathbb{S}),$$

so gilt $f \in L_{p,*}(m)$ bzw. $C_*(\mathbb{S})$ und $Tf = g$. Also ist T ein isometrischer Isomorphismus. Insbesondere ergibt sich für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in I$

$$T_k(x) := T\Big(\frac{1}{2}(e_k + e_{-k})\Big)(x) = \frac{1}{2}\big(e^{ik \arccos x} + e^{-ik \arccos x}\big) = \cos(k \arccos x).$$

Es gilt $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ und für $k \in \mathbb{N}$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad (x \in [-1, 1])$$

([Ü]). Damit ist $T_k \in \mathscr{P}_k := \mathrm{span}\{I \ni x \mapsto x^j : j = 0, \dots, k\}$, also ein (algebraisches) Polynom vom Grad k, genannt k-tes **Tschebyschow-Polynom**. Ist $f \in L_{1,*}(m)$, so gilt $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ für $k \in \mathbb{N}$ und damit für $z = e^{it}$

$$S_n f(z) = \widehat{f}(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \widehat{f}(\nu)(e_\nu(z) + e_\nu(z)) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{\nu=1}^{n} \widehat{f}(\nu)\cos(\nu t).$$

Also ist

$$TS_n f = \widehat{f}(0) + 2\sum_{\nu=1}^{n} \widehat{f}(\nu) T_\nu$$

ein algebraisches Polynom vom Grad $\leq n$. Für $g \in L_1(\mu)$ und $f = T^{-1}g$ lassen sich die Fourier-Koeffizienten $\widehat{f}(k)$ direkt aus g und T_k berechnen: mit Substitution $t = \arccos x$ ergibt sich

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(\cos t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x)T_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Reihe $\widehat{f}(0) + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \widehat{f}(\nu)T_\nu$ nennt man die **Tschebyschow-Entwicklung** von g und $\widehat{f}(k)$ den k-ten **Tschebyschow-Koeffizient** von g. Für $1 \leq p \leq \infty$ und $g \in L_p(\mu)$ bzw. $C(I)$ ist

$$\|g - TS_n f\|_p \leq \|T\| \cdot \|f - S_n f\|_p = \|f - S_n f\|_p.$$

Nach Satz 2.9 gilt $TS_n f \to g$ in $L_2(\mu)$ und nach Bemerkung und Definition 2.8

$$\|g - TS_n f\|_\infty \leq (4 + \ln n) \inf_{Q \in \mathscr{P}_n} \|g - Q\|_\infty.$$

3 Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^N$

Wir betrachten nun für $N \in \mathbb{N}$ den euklidschen Raum $\mathbb{R}^N$. Im Weiteren sei

$$B := B_N := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\}$$

die abgeschlossene N-dimensionale Einheitskugel, wobei $|x|$ die euklidsche Länge von x bezeichnet. Ist $\lambda := \lambda_N$ das N-dimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$, so setzen wir $L_p := L_p(\mathbb{R}^N) := L_p(\mathbb{R}^N, \mathscr{B}_N, \lambda_N)$ und schreiben kurz

$$\int f := \int f(x)\,dx := \int f\,d\lambda_N .$$

Sind $f_j \in L_1(\mathbb{R})$ für $j = 1, \ldots, N$ und ist das Tensorprodukt $\bigotimes_{j=1}^N f_j$ definiert durch

$$\bigotimes_{j=1}^N f_j(x) := \prod_{j=1}^N f_j(x_j) \quad (x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N),$$

so gilt nach dem Satz von Fubini $\int \bigotimes_{j=1}^N f_j = \prod\limits_{j=1}^N \int f_j$.

Bemerkung und Definition 3.1 1. Für $z = (z_1, \ldots, z_N),\ w = (w_1, \ldots, w_N) \in \mathbb{C}^N$ schreiben wir kurz

$$z \cdot w := \sum_{j=1}^N z_j w_j \,.$$

Damit definieren wir $e_z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{S}$ für $z \in i\mathbb{R}^N := \{i\omega : \omega \in \mathbb{R}^N\}$ durch

$$e_z(x) := e_{N,z}(x) := e^{z \cdot x} \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Für $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ nennen wir die Funktion $\widehat{f} : i\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\widehat{f}(z) := \int f e_z = \int f(x) e^{z \cdot x}\,dx = \int f(x) e^{i\omega \cdot x}\,dx \quad (z = i\omega \in i\mathbb{R}^N),$$

die **Fourier-Transformierte** von f.[19] Wegen $|\widehat{f}(z)| \leq \int |f| = \|f\|_1$ für $z \in i\mathbb{R}^N$ ist $\widehat{f} \in B(i\mathbb{R}^N)$ mit

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \,.$$

und aufgrund der Stetigkeit des Integrationskerns e_z als Funktion von z und $\int |f e_z| = \int |f|$ ergibt sich mit dem Satz von der dominierten Konvergenz die Stetigkeit von $\widehat{f}$ (Stichwort in dem Zusammenhang: Stetigkeit von Parameterintegralen[20]). Damit ist sogar $\widehat{f} \in CB(i\mathbb{R}^N)$, dem Raum der stetigen beschränkten Funktionen auf $i\mathbb{R}^N$.[21]

[19] Die Sprachgebung ist hier nicht eindeutig. Was wir als Fourier-Transformierte bezeichnen, entspricht üblicherweise eher der inversen Fourier-Transformation. So sollte man auch die Analogie zur Fourier-Transformation auf dem Kreis sehen.

[20] Siehe etwa `https://de.wikipedia.org/wiki/Parameterintegral`.

[21] Man kann zeigen, dass $\widehat{f}$ auch gleichmäßig stetig ist.

Die stetige lineare Abbildung $T : L_1(\mathbb{R}^N) \to CB(i\mathbb{R}^N)$, definiert durch $Tf := \widehat{f}$ für $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, nennt man **Fourier-Transformation** (auf $L_1(\mathbb{R}^N)$). Wegen $e_{N,z} = \bigotimes_{j=1}^N e_{1,z_j}$ gilt für $f_1, \ldots, f_N \in L_1(\mathbb{R})$

$$\Big(\bigotimes_{j=1}^N f_j\Big)^\wedge = \bigotimes_{j=1}^N \widehat{f}_j.$$

2. Im mehrdimensionalen Fall ergibt sich ein zusätzlicher Aspekt aufgrund der Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes: Ist $U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine orthogonale Transformation, also $U(x) = Ax$ mit $A^\top = A^{-1}$, so gilt wegen $|\det A| = 1$ nach der mehrdimensionalen Substitionsregel[22]

$$(f \circ U)^\wedge = \widehat{f} \circ U \quad (f \in L_1).$$

Ist μ_N das Bildmaß von λ_N unter $\omega \mapsto i\omega$, so schreiben wir im Weiteren

$$m := m_N := (2\pi)^{-N} \mu_N.$$

Damit ist

$$\int g(z)\, dm(z) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int g(i\omega)\, d\omega$$

für $g \in L_1(m)$.

Beispiel 3.2 Für $a > 0$ und $f = 1_{[-a,a]}$ gilt

$$\widehat{f}(z) = \int_{-a}^{a} e^{zt}\, dt = \frac{1}{z}(e^{az} - e^{-za}) = 2\frac{\sinh(az)}{z} = 2\frac{\sin(a\omega)}{\omega} \quad (z = i\omega \in i\mathbb{R}).$$

Für $f(t) = e^{-|t|}$ rechnet man nach ([Ü]), dass

$$\widehat{f}(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-z^2} = \frac{2}{1+\omega^2} \quad (z = i\omega \in i\mathbb{R})$$

gilt.[23] Man sieht, dass in beiden Fällen $\widehat{f}$ stetig auf $i\mathbb{R}$ und für $|z| \to \infty$ abklingend ist. Im ersten Fall ist $\widehat{f} \in L_p(m)$ für $p > 1$ aber $\widehat{f} \notin L_1(m)$, im zweiten gilt $\widehat{f} \in L_p(m)$ für alle $p \geq 1$.

Bemerkung und Definition 3.3 Aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^N$ ergibt sich für $h \in L_1$ und $y \in \mathbb{R}^N$

$$\int h(x-y)\, dx = \int h(x)\, dx.$$

Sind $f, g \in L_1$, so existiert nach dem Satz von Fubini wegen

$$\int\int |f(x-y)g(y)|\, dxdy = \int\int |f(x)| \cdot |g(y)|\, dxdy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

[22] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Transformationssatz.

[23] Interpretation in die Stochastik: $f/2$ ist die Lebesgue-Dichte der standardisierten Laplace-Verteilung, also $\omega \mapsto 1/(1+\omega^2)$ die entsprechende charakteristische Funktion.

das Faltungsintegral

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$$

für λ-fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Man nennt wieder $f * g$ die **Faltung** von f und g. Ist allgemeiner $p \in [1, \infty)$ und ist $f \in L_p$[24], so folgt aus der Youngschen Ungleichung[25], dass das Faltungsintegral für λ-fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ existiert und dass $f*g \in L_p$ mit $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$ gilt. Ist $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt, so existiert wegen

$$\int |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx\,dy \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

das Faltungsintegral $(f * g)(x)$ sogar für alle x. Durch die Substitution $x - y =: u$, also $y = x - u$, ergibt sich

$$f * g = g * f,$$

also im Fall $p = 1$ die Kommutativität der Faltung.[26]

Satz 3.4 *Für $f, g \in L_1$ ist*

$$(f * g)^\wedge = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Beweis. Für $z \in i\mathbb{R}^N$ ist

$$\begin{aligned}
(f * g)^\wedge(z) &= \int \int f(x-y)g(y)\,dy\,e^{z \cdot x}\,dx \\
&= \int \int f(x-y)\,e^{z \cdot (x-y)}\,dx\,g(y)e^{z \cdot y}\,dy \\
&= \int f(x)e^{z \cdot x}\,dx \cdot \int g(y)e^{z \cdot y}\,dy = \widehat{f}(z) \cdot \widehat{g}(z).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.5 Es sei $f = 1_{[-1,1]}$. Dann ist

$$(f * f)(t) = \int 1_{[t-1,t+1] \cap [-1,1]}(s)\,ds = \begin{cases} 2 - |t|, & \text{falls } |t| \leq 2 \\ 0, & \text{falls } |t| > 2 \end{cases}.$$

Nach Bemerkung und Definition 3.3 und Beispiel 3.2 gilt

$$(f * f)^\wedge(z) = 4\frac{\sinh^2(z)}{z^2} = 4\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \quad (z = i\omega \in \mathbb{R}).$$

[24] Man beachte dabei: Da λ kein endliches Maß ist, ist L_p für $p > 1$ nicht in L_1 enthalten.

[25] siehe etwa `https://en.wikipedia.org/wiki/Young's_convolution_inequality`

[26] Wieder ist $(L_1, *)$ eine kommutative Banachalgebra.

Bemerkung 3.6 Wir schreiben $e_x(z) := e^{z\cdot x} = e_z(x)$ für $z \in i\mathbb{R}^N$ und $x \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt $\partial_j e_x(z) = x_j e_x(z) = x_j e^{z\cdot x}$ für $j = 1, \ldots, N$. Ist $X \subset \mathbb{C}^N$ und

$$(M_{\xi_j} f)(\xi) := \xi_j f(\xi) \quad (\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in X)$$

für $f : X \to \mathbb{C}$ und $f \in L_1$ so, dass auch $M_{x_j} f \in L_1$, so gilt wegen $|(M_{x_j} f) e_x(z)| \leq |M_{x_j} f|$ für alle z mit Differenziation von Parameterintegralen[27]

$$(\partial_j \widehat{f})(z) = \int f(x) x_j e^{z\cdot x}\, dx = (M_{x_j} f)^\wedge(z) \quad (z \in i\mathbb{R}^N).$$

Ist die Funktion f stetig differenzierbar mit $f, \partial_j f \in L_1$ und so, dass $f(x)$ für $|x_j| \to \infty$ abklingend ist, so ergibt sich mit dem Satz von Fubini und partieller Integration bzgl. der j-ten Variable (man beachte dabei, dass der ausintegrierte Term verschwindet)

$$(\partial_j f)^\wedge(z) = \int \partial_j f(x) e^{z\cdot x}\, dx = -\int f(x) z_j e^{z\cdot x}\, dx = -(M_{z_j} \widehat{f})(z) \quad (z \in i\mathbb{R}^N).$$

Grob lässt sich sagen, dass $\widehat{f}$ um so glatter ist, je stärker f für $|x| \to \infty$ abklingt, und dass $\widehat{f}$ um so stärker für $|z| \to \infty$ abklingt, je mehr integrierbare Ableitungen f hat. Um weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation herzuleiten, betrachten wir zunächst Funktionen, bei denen alle Ableitungen für $|x| \to \infty$ sehr schnell abklingen.

Definition 3.7 Sind $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ und $X \subset \mathbb{C}^N$, so definieren wir den Multiplikationsoperator $M_\alpha : \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X$ durch

$$(M_\alpha f)(x) = x^\alpha f(x) \qquad (x \in X,\ f \in \mathbb{C}^X).$$

Für $N \in \mathbb{N}$ ist der **Schwartz-Raum** $\mathscr{S} = \mathscr{S}_N$ der lineare Raum aller Funktionen $u \in C^\infty := C^\infty(\mathbb{R}^N)$ so, dass für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ die Funktion $M_\beta \partial^\alpha u$ beschränkt ist. Zudem definieren wir den Schwartz-Raum $\mathscr{T} = \mathscr{T}_N$ als die Funktionen in $C^\infty(i\mathbb{R}^N)$ mit entsprechender Abklingeigenschaft der Ableitungen. Wegen $\mathscr{S} \subset L_p$ für alle p ist die Fourier-Transformation insbesondere auf $\mathscr{S}$ definiert.

Beispiel 3.8 Eine wichtige Funktion $u_* \in \mathscr{S}$ ist gegeben durch die (multivariate) **Gauß-Funktion**

$$u_*(x) = u_{N,*}(x) := e^{-|x|^2/2} = e^{-x\cdot x/2} \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Wegen $u_{N,*} = \bigotimes_{j=1}^N u_{1,*}$ und $\int u_{1,*} = \int e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$ gilt $\int u_{N,*} = (\int u_{1,*})^N = \sqrt{2\pi}^N$.

Satz 3.9 *Für $N \in \mathbb{N}$ ist*

$$\widehat{u_*}(z) = \sqrt{2\pi}^N e^{z\cdot z/2} = \sqrt{2\pi}^N u_*(\omega) \quad (z = i\omega \in i\mathbb{R}^N)$$

[27] siehe etwa: https://de.wikipedia.org/wiki/Parameterintegral

Beweis. Nach Bemerkung und Definition 3.1 und Beispiel 3.8 reicht es, die Aussage im Fall $N = 1$ zu beweisen. Für $u(t) := u_{1,*}(t) = e^{-t^2/2}$ gilt

$$u' = -M_t u.$$

Mit Bemerkung 3.6 folgt

$$(\widehat{u})' = (M_t u)^\wedge = -(u')^\wedge = M_z \widehat{u}$$

Damit erfüllt $\widehat{u}$ die lineare Differenzialgleichung $w' = zw$. Jede Lösung ist von der Form $z \mapsto ce^{z^2/2}$ für eine Konstante c. Wegen $u(0) = 1$ und $\widehat{u}(0) = \int u = \sqrt{2\pi}$ ist $c = \sqrt{2\pi}$. □

Bemerkung 3.10 Wie in Bemerkung 3.6 ergeben sich mit Differenziation von Parameterintegralen und mit partieller Integration folgende allgemeinen Ableitungsregeln für die Fourier-Transformierte von Funktionen $u \in \mathscr{S}$ und beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$:

1. $\partial^\alpha \widehat{u} = (M_\alpha u)^\wedge$,
2. $(\partial^\beta u)^\wedge = (-1)^{|\beta|} M_\beta\, \widehat{u}$.

Als Folgerung ergibt sich, dass für alle $u \in \mathscr{S}$ auch $\widehat{u} \in \mathscr{T}$ gilt, mit anderen Worten: Die Fourier-Transformation bildet $\mathscr{S}$ nach $\mathscr{T}$ ab.

> Denn: Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ gilt
>
> $$(\partial^\beta M_\alpha u)^\wedge = (-1)^{|\beta|} M_\beta((M_\alpha u)^\wedge) = (-1)^{|\beta|} M_\beta \partial^\alpha \widehat{u}.$$
>
> Da die linke Seite als Fourier-Transformierte beschränkt auf $i\mathbb{R}^N$ ist, ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung und Definition 3.11 Wie im Falle des Kreises kann man die Fourier-Transformation auf Maße erweitern: Ist $\mu \in$ ein komplexes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, so ist die **Fourier-Transformierte** $\widehat{\mu}$ von μ definiert durch

$$\widehat{\mu}(z) := \int e_z \, d\mu = \int e^{z\cdot x}\, d\mu(x) = \int e^{i\omega\cdot x}\, d\mu(x) \quad (z = i\omega \in i\mathbb{R}^N).$$

Für das Dirac-Maß δ_a am Punkt $a \in \mathbb{R}^N$ ist $\widehat{\delta_a}(z) = e^{z\cdot a}$. Wieder gilt

$$|\widehat{\mu}(z)| \leq \int d|\mu| = |\mu|(\mathbb{R}^N)$$

für $z \in i\mathbb{R}^N$ und damit ist $\widehat{\mu} \in CB(i\mathbb{R}^N)$ mit gleicher Argumentation wie in Bemerkung und Definition 3.1. Ist speziell $\mu = f\lambda$ mit $f \in L_1$, so ergibt sich $\widehat{\mu} = \widehat{f}$. In diesem Sinne kann man die Fourier-Transformation auf den komplexen Maßen wieder als Erweiterung der Fourier-Transformation auf L_1 auffassen.[28]

[28] In der Stochastik betrachtet man üblicherweise Fourier-Transformierte speziell für Wahrscheinlichkeitsmaße μ und nennt diese dann charakteristische Funktionen.

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathscr{S}$ für alle $p \in [1, \infty)$ dicht in $L_p(\mathbb{R}^N)$ ist. Genauer zeigen wir dies sogar für einen Teilraum von $\mathscr{S}$. Vorbereitend befassen wir uns mit einer weiteren Variante einer Approximativen Eins.

Bemerkung und Definition 3.12 Es sei X ein lokalkompakter metrischer Raum [29]. Für $g : X \to \mathbb{C}$ heißt der Abschluss von $g^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ in X der **Träger**[30] von g, geschrieben $\operatorname{supp}(g)$. Wir setzen

$$C_c(X) := \{g \in C(X) : \operatorname{supp}(g) \text{ kompakt}\}$$

und $C_c := C_c(\mathbb{R}^N)$. Ist $\varphi_\rho \in C_c$ für $\rho > 0$ definiert durch

$$\varphi_\rho(x) := \max\{0, 1 - \operatorname{dist}(x, \rho B)\} \quad (x \in \mathbb{R}^N),$$

und ist $g \in C(\mathbb{R}^N)$, so gilt $\operatorname{supp}(g\varphi_\rho) \subset (\rho+1)B$ und $g\varphi_\rho|_{\rho B} = g|_{\rho B}$. Da $C(\mathbb{R}^N)$ dicht in $L_p((\lambda_N)_{(\rho+1)B})$ ist, sieht man damit, dass C_c dicht in L_p ist ([Ü]).

Ist $(X, +)$ eine abelsche Gruppe und ist $h \in X$, so definieren wir den Shift-Operator $\tau_h : \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X$ durch $\tau_h f := f(\cdot - h)$, also $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ für $x \in X$.

Satz 3.13 *Sind $1 \leq p < \infty$ und $f \in L_p$, so gilt $\|f - \tau_h f\|_p \to 0$ für $h \to 0$.*

Beweis. Ist $g \in C_c$, so ist g gleichmäßig stetig. Also gilt $\|g - \tau_h g\|_\infty \to 0$ für $h \to 0$. Ist $h \in B$, so ist $\operatorname{supp}(\tau_h g) \subset \operatorname{supp}(g) + B$. Damit gilt auch

$$\|g - \tau_h g\|_p \leq \|g - \tau_h g\|_\infty \lambda(\operatorname{supp}(g) + B)^{1/p} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so ergibt sich aus Bemerkung 3.12 die Existenz einer Funktion $g \in C_c$ mit $\|g - f\|_p < \varepsilon$. Wegen $\|\tau_h(g-f)\|_p = \|g - f\|_p$ folgt

$$\|f - \tau_h f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - \tau_h g\|_p + \|\tau_h(g-f)|_p \leq \|g - \tau_h g\|_p + 2\varepsilon,$$

also $\|f - \tau_h f\|_p < 3\varepsilon$ für $|h|$ genügend klein. □

Satz 3.14 (Approximative Eins, II) *Es sei $g \in L_1$ mit $\int g = 1$ und $g_r := r^{-N} g(r^{-1}\,\cdot)$ für $r > 0$.*

1. *Ist $f \in L_p$, so gilt $\|f * g_r - f\|_p \to 0$ für $r \to 0$.*
2. *Ist $f \in B(\mathbb{R}^N)$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^N$, so gilt $f * g_r \to f$ für $r \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$.*

[29] Einen metrischen Raum nennt man lokalkompakt, falls jede Umgebung eines Punktes eine kompakte Umgebung enthält. Insbesondere sind $\mathbb{R}^N$ und $i\mathbb{R}^N$ lokalkompakt.

[30] Englisch Support

Beweis. Aus der mehrdimensionalen Substitutionsregel[31] ergibt sich

$$\int g(x)\,dx = \int g_r(rx)r^N dx = \int g_r(y)\,dy$$

und damit $f(x) = \int f(x)g_r$ für alle $r > 0$. Wieder mit mehrdimensionaler Substitutionsregel erhält man für fast alle $x \in \mathbb{R}^N$

$$(f * g_r)(x) - f(x) = \int (\tau_u f - f)(x) g_r(u)\,du = \int (\tau_{ry} f - f)(x) g(y)\,dy.$$

1. Aus der Jensen-Ungleichung[32], angewandt auf das Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu := c|g|\lambda$ mit $c := 1/\|g\|_1$ folgt für fast alle x

$$c^p |f * g_r - f|^p(x) \leq \int |\tau_{ry} f - f|^p(x)\,d\nu(y).$$

Integrieren bezüglich x und Anwendung des Satzes von Fubini ergibt

$$c^p \|f * g_r - f\|_p^p \leq \int \|\tau_{ry} f - f\|_p^p\,d\nu(y) = \int \varphi_r\,d\nu$$

mit $\varphi_r(y) = \|\tau_{ry} f - f\|_p^p$. Für $y \in \mathbb{R}^N$ gilt $|\varphi_r(y)| \leq 2\|f\|_p^p$ und $\varphi_r(y) \to 0$ für $r \to 0$ mit Satz 3.13. Der Satz von der dominierten Konvergenz zeigt, dass die rechte Seite in der letzten Ungleichung gegen 0 konvergiert für $r \to 0$. Damit folgt die erste Behauptung.
2. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\rho > 0$ mit $\int_{\mathbb{R}^N \setminus \rho B} |g| < \varepsilon$. Mit $\int = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \rho B} + \int_{\rho B}$ folgt für $x \in \mathbb{R}^N$

$$|(f * g_r - f)(x)| \leq \int |\tau_{ry} f - f|(x)\,|g(y)|\,dy \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon + \sup_{y \in \rho B} \|\tau_{ry} f - f\|_\infty \, \|g\|_1.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gilt

$$\sup_{y \in \rho B} \|\tau_{ry} f - f\|_\infty \to 0 \quad (r \to 0)$$

und damit ist $\|f * g_r - f\|_\infty \leq (2\|f\|_\infty + 1)\varepsilon$ für r genügend klein. □

Bemerkung 3.15 (vgl. Satz 1.11) Es sei $g \in C_c$ mit $\int g = 1$. Ist f integrierbar auf $\mathbb{R}^N$ und stetig an der Stelle x, so sieht man ähnlich wie im Beweis zu Satz 3.14 ([Ü]), dass

$$(f * g_r)(x) \to f(x) \quad (r \to 0)$$

gilt.

Definition 3.16 Wir setzen

$$\mathscr{D} := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \operatorname{supp}(u) \text{ kompakt}\}.$$

Funktionen aus $\mathscr{D}$ nennt man auch **Testfunktionen**. Es gilt $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$.

[31] siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Transformationssatz
[32] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Jensensche_Ungleichung.

Beispiel 3.17 Ist $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) := \begin{cases} \exp(1/(|x|^2 - 1)), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

so ist $\operatorname{supp}(u) = B$. Man kann zeigen, dass $u \in C^\infty$ und damit eine Testfunktion ist. Insbesondere ist $v := (\int u)^{-1} u$ wie in Satz 3.14 und Bemerkung 3.15 mit $\operatorname{supp} v_r = rB$.

Satz 3.18 *Sind $f \in L_p$ und $u \in \mathscr{D}$, so ist $f * u \in C^\infty$ mit $\partial^\alpha (f * u) = f * \partial^\alpha u$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.*

Beweis. Ist $\rho > 0$, so definiert $g(y) := \max_{x \in \rho B} |\partial^\alpha u(x - y)|$ eine beschränkte Funktion mit $\operatorname{supp}(g) \subset (\rho + r)B$, falls $\operatorname{supp}(u) \subset rB$. Nach der Hölder-Ungleichung ist

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_\infty \lambda((\rho + r)B)^{1/q},$$

also $|fg|$ eine integrierbare Majorante für die Familie $(f\partial^\alpha u(x - \cdot))_{x \in \rho B}$. Aus dem Satz über die Differenziation von Parameterintegralen (induktiv angewandt) ergibt sich damit die Behauptung. □

Bemerkung und Definition 3.19 Ist X ein lokalkompakter metrischer Raum, und ist $g : X \to \mathbb{C}$, so sagen wir, dass g **abklingend** (an ∞) ist, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset X$ existiert mit

$$\sup_{x \in X \setminus K} |g(x)| < \varepsilon.$$

Wir setzen

$$C_0(X) := \{g \in C(X) : g \text{ abklingend}\} \supset C_c(X).$$

und $C_0 := C_0(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt $\mathscr{S} \subset C_0$ und $\mathscr{T} \subset C_0(i\mathbb{R}^N)$. Man kann zeigen ([Ü]), dass $C_0(X)$ ein abgeschlossener Teilraum von $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ und damit selbst ein Banachraum ist. Außerdem sieht man leicht, dass Funktionen in $C_0(X)$ gleichmäßig stetig sind ([Ü]).

Satz 3.20 *$\mathscr{D}$ ist dicht in $(L_p, \|\cdot\|_p)$ für alle $p \in [1, \infty)$ und in $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$.*

Beweis. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt $f 1_{\rho B} \to f$ $(\rho \to \infty)$ in L_p für alle für alle p-integrierbaren f. Ist $f \in C_0$ und sind φ_ρ wie in Bemerkung 3.12, so gilt $f\varphi_\rho \in C_c$ und $f\varphi_\rho \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$ für $\rho \to \infty$. Daher reicht es jeweils, die Behauptung für den Fall zu zeigen, dass $\operatorname{supp} f$ kompakt ist.
Es seien v wie in wie in Beispiel 3.17. Wegen Satz 3.18 ist $f * v_r \in C^\infty$ und nach Definition der Faltung gilt $\operatorname{supp}(f * v_r) \subset \operatorname{supp}(f) + rB$, also $f * v_r \in \mathscr{D}$. Nach Satz 3.14 gilt $f * v_r \to f$ in L_p beziehungsweise in C_0 für $r \to 0$. □

Als unmittelbare Konsequenz ergibt sich wieder

Satz 3.21 (Riemann-Lebesgue) *Für alle* $f \in L_1$ *ist* $\widehat{f} \in C_0(i\mathbb{R}^N)$.

Beweis. Da $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$ nach Satz 3.20 dicht in L_1 ist, existiert eine Folge (u_n) in $\mathscr{S}$ mit $u_n \to f$ in L_1. Wegen $\|\widehat{f} - \widehat{u_n}\|_\infty \leq \|f - u_n\|_1$ gilt $C_0(i\mathbb{R}^N) \supset \mathscr{T} \ni \widehat{u_n} \to \widehat{f}$ gleichmäßig auf $i\mathbb{R}^N$. Da $(C_0(i\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist, gilt $\widehat{f} \in C_0(i\mathbb{R}^N)$. □

Wir wenden uns jetzt der Frage nach der Inversion der Fourier-Transformation zu.

Bemerkung und Definition 3.22 Für $h \in L_1(m)$ setzen wir

$$h^\vee(x) := \int h(z) e^{-z\cdot x}\, dm(z) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int h(i\omega) e^{-i\omega\cdot x}\, d\omega \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Dies zeigt, dass $h^\vee$ bis auf Skalierung auch die Fourier-Transformierte von $\omega \mapsto h(i\omega)$ and der Stelle $-ix$ ist. Genauer gilt mit $\sigma_1 g(\omega) := g(i\omega)$ für $g : i\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ [33] und $\sigma_i f(z) := f(iz)$ für $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$

$$(2\pi)^N \sigma_i h^\vee = (\sigma_1 h)^\wedge.$$

Außerdem folgt aus dem Satz von Fubini für $h \in L_1(m)$ und $f \in L_1$

$$\int \widehat{f}\, \overline{h}\, dm = \int f\, \overline{h^\vee}\,. \tag{3.1}$$

Satz 3.23 *Ist* $f \in L_1$ *mit* $\widehat{f} \in L_1(m)$, *so gilt*

$$(\widehat{f})^\vee = f \quad \lambda\text{-fast überall.}$$

Insbesondere ist die Fourier-Transformation $L_1 \ni f \mapsto \widehat{f} \in C_0(i\mathbb{R}^N)$ *injektiv.*

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}^N$. Für $r > 0$ setzen wir

$$\varphi(x, r, z) := e^{z\cdot x} u_*(rz) = e^{z\cdot x} e^{r^2 z\cdot z/2} = e^{i\omega\cdot x} e^{-r^2|\omega|^2/2} \quad (z = i\omega \in i\mathbb{R}^N).$$

Ist $h \in L_1(m)$, so, folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\int h(z)\overline{\varphi}(x, r, z)\, dm(z) \to \int h(z) e^{-z\cdot x}\, dm(z) = h^\vee(x) \quad (r \to 0). \tag{3.2}$$

Weiter gilt nach Satz 3.9 gilt für $y \in \mathbb{R}^N$ mit $g := (2\pi)^{-N/2} u_*$

$$\begin{aligned} g(x-y) &= (2\pi)^{-N/2} u_*(x-y) = (2\pi)^{-N}\, \widehat{u_*}(i(x-y)) \\ &= (2\pi)^{-N} \int e^{i\cdot(x-y)\cdot\omega} e^{-|\omega|^2/2}\, d\omega = \varphi(x, 1, \cdot)^\vee(y). \end{aligned}$$

Für beliebiges $r > 0$ ist damit $\varphi(x, r, \cdot)^\vee(y) = g_r(x-y)$ ([Ü]).

[33] also g am um den Winkel $\pi/2$ gedrehten Argument

Es sei nun $f \in L_1$ mit $\widehat{f} \in L_1(m)$. Da g reellwertig ist, ergibt sich mit (3.1) und Satz 3.14

$$\int \widehat{f}(z)\,\overline{\varphi}(\cdot\,,r,z)\,dm(z) = \int f(y)g_r(\cdot\, - y)\,dy = f * g_r \to f \quad (r \to 0)$$

in L_1. Nach (3.2), angewandt auf $h = \widehat{f}$, ist $(\widehat{f})^\vee = f$ in L_1. $\square$

Beispiel 3.24 Es sei $f(t) = e^{-|t|}$ für $t \in \mathbb{R}$. Nach Beispiel 3.2 gilt

$$\widehat{f}(z) = 2/(1-z^2) = 2/(1+\omega^2) \quad (z = i\omega \in i\mathbb{R}).$$

Da $\widehat{f} \in L_1$ ist, gilt $f = (\widehat{f})^\vee$ mit Satz 3.25. Also ist $t \mapsto e^{-|t|}$ die inverse Fourier-Transformierte von $z \mapsto 2/(1-z^2)$.

Satz 3.25 (Plancherel für $\mathscr{S}$)
Die Fourier-Transformation $T : (\mathscr{S}, \|\cdot\|_2) \to (\mathscr{T}, \|\cdot\|_2)$ ist ein isometrischer Isomorphismus mit $T^{-1}h = h^\vee$ für $h \in \mathscr{T}$.

Beweis.
1. Es sei $u \in \mathscr{S}$. Dann ist $\widehat{u} \in \mathscr{T} \subset L_1(m)$. Nach Satz 3.23 gilt $(\widehat{u})^\vee = u$, aus Stetigkleitsgründen auch überall. Mit (3.1) ergibt sich

$$\int |\widehat{u}|^2\,dm = \int \widehat{u}\,\overline{\widehat{u}}\,dm = \int u\,\overline{(\widehat{u})^\vee} = \int u\,\overline{u} = \int |u|^2.$$

2. Wir schreiben $Sh := h^\vee$ für $h \in \mathscr{T}$. Nach 1. ist $ST = \mathrm{id}_{\mathscr{S}}$. Wegen $T\sigma_1 = (2\pi)^N \sigma_i S$ und $\sigma_1\sigma_i = \sigma$ sowie $\sigma_i\sigma_1 = \tau$, wobei $\sigma u(\omega) := u(-\omega)$ für $u \in \mathscr{S}$ und $\tau h(z) := h(-z)$ für $h \in \mathscr{T}$, ergibt sich

$$TS\tau = T\sigma S = T\sigma_1\sigma_i S = \sigma_i ST\sigma_1 = \tau,$$

also $TS = \tau\tau^{-1} = \mathrm{id}_{\mathscr{T}}$. Damit ist T eine Bijektion von $\mathscr{S}$ auf $\mathscr{T}$ und $T^{-1} = S$. $\square$

Bemerkung 3.26 Aus Satz 3.25 folgt: Sind $u, v \in \mathscr{S}$, so ist auch $u * v \in \mathscr{S}$.

> Denn: Aus der Definition von $\mathscr{S}$ bzw. $\mathscr{T}$ und der Produktregel ergibt sich per Induktion, dass das Produkt zweier Funktionen in $\mathscr{S}$ bzw. $\mathscr{T}$ ebenfalls in $\mathscr{S}$ bzw. $\mathscr{T}$ liegt. Damit ist $(u*v)^\wedge = \widehat{u}\cdot\widehat{v} \in \mathscr{T}$ und folglich $u*v = ((u*v)^\wedge)^\vee \in \mathscr{S}$.

Als weitere Folgerungen erhält man zentrale Aussagen über die Fourier-Transformation auf dem Hilbertraum L_2 (vgl. Satz 2.9) und auf den Borelmaßen.

Satz 3.27 (Plancherel)
Die Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}$ hat genau eine Fortsetzung zu einer stetigen linearen Abbildung $T : (L_2, \|\cdot\|_2) \to (L_2(m), \|\cdot\|_2)$. Außerdem ist T ein isometrischer Isomorphismus[34] *und für $f \in L_2$ gilt*

$$\|Tf - (f1_{\rho B})^{\wedge}\|_2 \to 0 \text{ und } \|f - ((Tf)1_{i\rho B})^{\vee}\|_2 \to 0 \quad (\rho \to \infty),$$

also, in L_2 bzw. $L_2(m)$,

$$\int_{\rho B} f(x)e^{\cdot\, x}dx \to Tf \text{ und } \int_{i\rho B}(Tf)(z)e^{z\,\cdot}dm(z) \to f \quad (\rho \to \infty).$$

Beweis. 1. Nach Satz 3.20 ist $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$ dicht in L_2. Da stetige lineare Abbildungen gleichmäßig stetig sind und $L_2(m)$ ein Banachraum ist, existiert genau eine stetige Fortsetzung $T : L_2 \to L_2(m)$ und diese ist auch linear. Außerdem folgt aus der Stetigkeit der Norm und $\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_2$ für $u \in \mathscr{S}$ dann auch $\|f\|_2 = \|Tf\|_2$ für alle $f \in L_2$. Damit ist T eine Isometrie. Da $T\mathscr{S} = \mathscr{T}$ dicht in $L_2(m)$ ist, ergibt sich damit wieder die Surgektivität von T (siehe [Ü]).
2. Ist $g \in L_1 \cap L_2$, so gilt $Tg = \widehat{g}$, da $\mathscr{S}$ auch dicht in L_1 ist. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt $\|f - f1_{\rho B}\|_2 \to 0$ für $\rho \to \infty$. Wegen $L_2((\lambda_N)_{\rho B}) \subset L_1((\lambda_N)_{\rho B})$ ist $f1_{\rho B} \in L_1 \cap L_2$. Also gilt

$$\|Tf - (f1_{\rho B})^{\wedge}\|_2 = \|Tf - T(f1_{\rho B})\|_2 = \|f - f1_{\rho B}\|_2 \to 0 \quad (\rho \to \infty).$$

Die zweite Aussage ergibt sich mit analoger Argumentation. □

Bemerkung 3.28 Wir schreiben $M(\mathbb{R}^N)$ für die Menge der komplexen Borelmaße auf $\mathbb{R}^N$. Ist $\mu \in M(\mathbb{R}^N)$, so ist durch

$$CB := CB(\mathbb{R}^N) \ni g \mapsto \int g\, d\mu \in \mathbb{C}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $(CB, \|\cdot\|_\infty)$ gegeben. Man kann zeigen, dass μ eindeutig durch sein Wirken auf C_0 festgelegt ist, d. h. ist $\nu \in M(\mathbb{R}^N)$ mit $\int g\, d\nu = \int g\, d\mu$ für alle $g \in C_0$, so ist $\nu = \mu$ ([Ü]).[35] Man identifiziert dann auch μ und das entsprechende Funktional. Damit sieht man auch wieder: Ist $\nu \in M(\mathbb{R}^N)$, so gilt

$$(\nu * \mu)^{\wedge} = \widehat{\nu}\,\widehat{\mu}$$

für die Faltung von μ und ν, definiert durch $(\nu * \mu)(g) := \int\int g(x + y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$ für $g \in CB$.

[34] Man schreibt auch wieder $\widehat{f}$ statt Tf, allerdings ist $\widehat{f}$ jetzt nicht mehr punktweise fast überall als Integral definiert.

[35] Dies ist die Eindeutigkeitsaussage des Rieszschen Darstellungssatzes, der besagt, dass jedes stetige lineare Funktional auf C_0 von dieser Form für genau $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ ist (vgl. Bemerkung und Definition A.10).

Satz 3.29 (Eindeutigkeitzssatz)
Die Fourier-Transformation $M(\mathbb{R}^N) \ni \mu \mapsto \widehat{\mu} \in CB(i\mathbb{R}^N)$ *ist injektiv.*

Beweis. Es sei μ so, dass $\widehat{\mu} = 0$. Dann gilt für $h \in \mathscr{T}$ nach dem Satz von Fubini

$$\int h^\vee \, d\mu = \int \int h(z) e^{-z \cdot x} \, dm(z) \, d\mu(x) = \int h(z) \widehat{\mu}(-z) \, dm(z) = 0. \tag{3.3}$$

Ist $u \in \mathscr{S}$, so ist $u = h^\vee$ für $h = \widehat{u} \in \mathscr{T}$, also $\int u \, d\mu = 0$. Da μ ein stetiges Funktional auf C_0 ist und $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$ nach Satz 3.20 dicht in C_0 ist, ist $\int g \, d\mu = 0$ für alle $g \in C_0$. Nach Bemerkung 3.28 ist $\mu = 0$. □

Wir wollen nun die Frage nach der Rekonstruktion von f aus $\widehat{f}$ im skalaren Fall $N = 1$ genauer untersuchen. In Abschnitt 1 hatten wir gesehen, dass für $f \in L_1(\mathbb{S}, m)$

$$S_n f = f * D_n = (\widehat{f}\widehat{D_n})^\vee = (\widehat{f} 1_{\{-n,\ldots,n\}})^\vee$$

gilt. Mit $I := iB_1 = \{i\omega : |\omega| \leq 1\}$ entspricht $(\widehat{f} 1_{nI})^\vee$ gewissermaßen der n-ten Fourier-Teilsumme. Ist $f \in L_2$ und $\widehat{f} := Tf$, so zeigt der Satz von Plancherel, dass $(\widehat{f} 1_{\rho I})^\vee \to f$ für $\rho \to \infty$ in L_2 gilt. Wir zielen nun wieder auf punktweise Aussagen. Wir schreiben $\gamma(t) := 1/t$ für $t \neq 0$.

Bemerkung 3.30 (vgl. Bemerkung 2.6) Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$ mit $\gamma f \in L_1(\mathbb{R})$, so gilt

$$(\widehat{f} 1_{\rho I})^\vee(0) = \int_{\rho I} \widehat{f} \, dm \to 0 \quad (\rho \to \infty).$$

Denn: Ist $g := \gamma f$, so ist $g \in L_1$ und $(\widehat{g})' = (M_t g)^\wedge = \widehat{f}$ nach Bemerkung 3.6. Mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und dem Riemann-Lebesgue-Lemma ergibt sich

$$2\pi \int_{\rho I} \widehat{f} \, dm = \int_{-\rho}^{\rho} \widehat{f}(i\omega) \, d\omega = i(\widehat{g}(i\rho) - \widehat{g}(-i\rho)) \to 0 \quad (\rho \to \infty).$$

Satz 3.31 *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *integrierbar. Existieren* $c_\pm \in \mathbb{C}$ *so, dass die Funktionen* $\gamma(f - c_\pm) 1_{\mathbb{R}_\pm}$ *lokal integrierbar an* 0 *sind* [36], *so gilt*

$$\int_{\rho I} \widehat{f} \, dm \to \frac{1}{2}(c_+ + c_-) \quad (\rho \to \infty).$$

Beweis. Wie in Beispiel 3.2 gilt

$$\int_{\rho I} e^{zt} \, dm(z) = \frac{\sin(\rho t)}{\pi t} =: u_\rho(t),$$

[36] g heißt lokal integrierbar an 0, falls $\int_{[-\delta,\delta]} |g| < \infty$ für ein $\delta > 0$ ist.

also mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\rho I} \widehat{f}\, dm = \int_{\rho I} \int f(t) e^{zt}\, dt\, dm(z) = \int u_\rho(t) f(t)\, dt.$$

Während u_ρ nicht absolut integrierbar ist (also $u_\rho \notin L_1$), ist u_ρ uneigentlich integrierbar auf $[0, \infty)$ und $(-\infty, 0]$ [37] und es gilt ([Ü])

$$\int_{-\infty}^{0} u_\rho = \int_{0}^{\infty} u_\rho = \int_{0}^{\infty} u_1 = \frac{1}{2}\,.$$

Also folgt

$$\int_{\rho I} \widehat{f}\, dm - \frac{1}{2}(c_+ + c_-) = \int_0^\infty u_\rho(t)\big(f(t) - c_+\big)\, dt + \int_{-\infty}^{0} u_\rho(t)\big(f(t) - c_-\big)\, dt.$$

Es reicht also zu zeigen, dass die beiden Integrale auf der rechten Seite für $\rho \to \infty$ abklingend sind. Aus Symmetriegründen reicht es wiederum, dies für das erste zu zeigen.
Für $R \geq 1$ gilt

$$\sup_{\rho \geq 1} \Big| \int_R^\infty u_\rho f \Big| \leq \frac{1}{\pi} \int_R^\infty |f| \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Weiter ist $\int_R^\infty u_\rho = \int_{\rho R}^\infty u_1$, also

$$\sup_{\rho \geq 1} \Big| \int_R^\infty u_\rho \Big| \leq \sup_{S \geq R} \Big| \int_S^\infty u_1 \Big| \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert also ein $R = R_\varepsilon \geq 1$ mit

$$\sup_{\rho \geq 1} \Big| \int_R^\infty u_\rho (f - c_+) \Big| < \varepsilon.$$

Wie oben ist für $f_R := (f - c_+) 1_{[0,R]}$

$$\int_0^R u_\rho(t)(f(t) - c_+)\, dt = \int_{\rho I} \widehat{f_R}\, dm.$$

Nach Bemerkung 3.30, angewandt auf f_R, konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $\rho \to \infty$.
Also ist

$$\Big| \int_0^\infty u_\rho (f - c_+) \Big| < 2\varepsilon$$

für ρ genügend groß. $\square$

Bemerkung 3.32 Ähnlich wie in Satz 2.7 sieht man: Ist f integrierbar und Hölder-stetig an der Stelle s, so ist $\gamma(\tau_{-s} f - f(s))$ lokal integrierbar an 0. Wegen

$$(\tau_{-s} f)^\wedge(z) = e^{-zs} \widehat{f}(z) \quad (z \in i\mathbb{R})$$

[37] $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt uneigentlich integrierbar auf $[0, \infty)$, falls $\int_0^\infty h := \lim_{R \to \infty} \int_0^R h$ existiert. Entsprechend heißt h uneigentlich integrierbar auf $(-\infty, 0]$, falls $\int_{-\infty}^0 h := \lim_{R \to -\infty} \int_R^0 h$ existiert.

gilt nach Satz 3.31, angewandt auf $\tau_{-s}f$,

$$(\widehat{f}1_{\rho I})^\vee(s) = \int_{\rho I} \widehat{f}(z)e^{-zs}\, dm(z) \to f(s) \quad (\rho \to \infty).$$

Hat f an t eine Hölder-Sprungstelle, so gilt

$$(\widehat{f}1_{\rho I})^\vee(s) = \int_{\rho I} \widehat{f}(z)e^{-zs}\, dm(z) \to \frac{1}{2}(f(s_+) + f(s_-)) \quad (\rho \to \infty).$$

Bemerkung 3.33 Die Fourier-Transformation lässt sich weiter ausdehnen auf den Raum der temperierten Distributionen $\mathscr{S}'$:[38] Ist $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ linear, so nennt man φ eine **temperierte Distribution**, falls für alle Folgen (u_n) in $\mathscr{S}$ mit $u_n \to u$ in dem Sinne, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$\|M_\beta \partial^\alpha (u_n - u)\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$$

gilt, die Folge $\langle u_n, \varphi\rangle$ gegen $\langle u, \varphi\rangle$ konvergiert.[39] Entsprechend definiert man $\mathscr{T}'$. Man kann zeigen, dass $u_n \to u$ genau dann gilt, wenn $\widehat{u_n} \to \widehat{u}$ gilt. Für $\varphi \in \mathscr{S}'$ ist das lineare Funktional $\widehat{\varphi} : \mathscr{T} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\langle h, \widehat{\varphi}\rangle := \langle h^\vee, \varphi\rangle \qquad (h \in \mathscr{T}),$$

also ebenfalls eine temperierte Distribution. Die dadurch auf $\mathscr{S}'$ definierte Fourier-Transformation ist somit eine Abbildung von $\mathscr{S}'$ nach $\mathscr{T}'$. Man sich überlegen, dass (im Wesentlichen wegen (3.1) und (3.3)) die Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}'$ sowohl als eine Erweiterung der Fourier-Transformation auf $M(\mathbb{R}^N)$ als auch der auf L_2 angesehen werden kann.

Wie eben angedeutet, kann die Fourier-Transformation auf den Raum $\mathscr{S}'$ ausgedehnt werden. Dies kann auch genutzt werden, um Sobolev-Räume beliebiger reeller Ordnung s zu definieren.

Bemerkung 3.34 Es seien $s \in \mathbb{R}$ und $\gamma_s(z) := (1 + |z|^2)^s$ für $z \in i\mathbb{R}^N$. Ist g mit $\sqrt{\gamma_s}\, g \in L_2(m)$, so ist $h \cdot g$ integrierbar für alle $h \in \mathscr{T}$ und durch $\psi_g(h) := \int hg\, dm$ eine temperierte Distribution $\psi_g \in \mathscr{T}$ gegeben. Damit definiert man den **Sobolev-Raum** H^s der Ordnung s als den Raum aller $\varphi \in \mathscr{S}'$ so, dass $\widehat{\varphi} = \psi_g$ für eine Funktion g wie oben gilt. Außerdem ist durch

$$\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle := \int \widehat{\varphi_1}\, \overline{\widehat{\varphi_2}}\, \gamma_s\, dm$$

für $\varphi_j \in H^s$ ein Skalarprodukt auf H^s (wohl-)definiert, mit dem H^s zu einem Hilbertraum wird. Dabei gilt $H^0 = L_2$ und $H^s \subset H^{s'}$ für $s > s'$.

[38] Wir werden dies nur kurz skizzieren und im Weiteren auch nicht verwenden. Sehr viel Genaueres dazu findet man etwa in W. Rudin, Functional Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.

[39] Man schreibt bei Funktionalen meist $\langle u, \varphi\rangle$ statt $\varphi(u)$.

4 Anwendungen und Folgerungen

Wir gehen in diesem Abschnitt auf verschiedene Anwendungen der Fourier-Transformation ein. Los geht es mit partiellen Differenzialgleichungen.

Definition 4.1 1. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, so heißt $u \in C^2(\Omega)$ **harmonisch** (in Ω), falls

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2 u = \sum_{j=1}^{N} \partial^{2e_j} u = 0$$

gilt.
2. Wir schreiben im Weiteren Punkte in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ in der Form (t, x) mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Ist I ein offenes Intervall und $u \in C(I \times \mathbb{R}^N)$ so, dass $\partial^\alpha u$ für $|\alpha| \leq 2$ existiert, so setzen wir $(\Delta_x u)(t, x) := (\Delta u(t, \cdot))(x)$. Damit heißen die partielle Differenzialgleichung

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \quad (t > 0)$$

(homogene) **Wärmeleitungsgleichung** auf $D := (0, \infty) \times \mathbb{R}^N$, die Gleichung

$$\partial_t^2 u + \Delta_x u = 0 \quad (t > 0)$$

(homogene) **Laplace-Gleichung** auf D [40] und die Gleichung

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

(homogene) **Wellengleichung** auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Wie kann man Fourier-Analysis nutzen, um solche Gleichungen bzw. entsprechende Anfangswertprobleme zu lösen? Für $e_z(x) := e^{-z \cdot x}$ ist

$$\Delta e_z(x) = (z \cdot z) e_z(x) \tag{4.1}$$

Ist $g \in L_1(m)$ mit $M_\alpha g \in L_1$ für $|\alpha| \leq 2$, so gilt mit Differenziation von Paramenterintegralen (vgl. Bemerkung 3.6)

$$\Delta(g^\vee) = \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2 (g^\vee) = \sum_{j=1}^{N} (M_{z_j}^2 g)^\vee = ((z \cdot z) g)^\vee.$$

Es sei nun $h \in C(I \times i\mathbb{R}^N)$ und $h_t := h(t, \cdot)$ so, dass

$$\partial_t h_t(z) = (z \cdot z) h_t(z) \quad (t > 0,\, z \in i\mathbb{R}^N).$$

Ist $f \in L_1$ und ist $M_\alpha(\widehat{f} h_t)$ für $|\alpha| \leq 2$ lokal gleichmäßig in t dominiert durch eine integrierbare Funktion, so ergibt sich für $u(t, \cdot) := (\widehat{f} h_t)^\vee$ mit Differenziation von Paramenterinegralen

$$\partial_t u(t, \cdot) = (\widehat{f} \partial_t h_t)^\vee = ((z \cdot z)\, \widehat{f}\, h_t)^\vee = \Delta((\widehat{f} h_t)^\vee) = \Delta_x u(t, \cdot). \tag{4.2}$$

[40] Man beachte, dass u genau dann harmonisch in D ist, wenn $u \in C^2(D)$ die Laplace-Gleichung auf D erfüllt.

Im Fall
$$\partial_t^2 h_t(z) = \pm(z\cdot z)h_t(z)$$
ist unter entsprechenden Integrierbarkeitsvoraussetungen
$$\partial_t^2 u(t,\cdot) = (\widehat{f}\partial_t^2 h_t)^\vee = (\pm(z\cdot z)\widehat{f}h_t)^\vee = \pm\Delta((\widehat{f}h_t)^\vee) = \pm\Delta_x u(t,\cdot). \tag{4.3}$$
Wir untersuchen zunächst die Wärmeleitungsgleichung und dabei das Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung f, wobei $f \in C(\mathbb{R}^N)$ eine vorgegebene Wärmeverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt. Gesucht ist eine Funktion $u \in C(\overline{D})$ mit
$$u(0,\cdot) = f,$$
die auf D die Wärmeleitungsbleichung erfüllt. Wir zeigen, dass eine Lösung per approximativer Eins basierend auf der Gauß-Funktion u_* bestimmt werden kann.

Bemerkung 4.2 Ist
$$h_t(z) := e^{tz\cdot z} = e^{-t|z|^2} \qquad (t>0,\ z\in i\mathbb{R}^N),$$
so gilt $\partial_t h_t(z) = (z\cdot z)h_t(z)$. Für
$$H_t(x) := (4\pi t)^{-N/2}u_*(x/\sqrt{2t}) = (4\pi t)^{-N/2}e^{-|x|^2/(4t)} \quad (x\in\mathbb{R}^N).$$
ergibt sich $\int H_t = 1$ für $t>0$ sowie $\widehat{H_t}(z) = e^{tz\cdot z} = h_t(z)$ mit Satz 3.9 und Substitution $y = x/\sqrt{2t}$.[41]

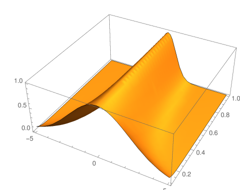

Figure 7: Kerne $h_t(i\omega)$ für $\omega \in [-5,5]$, $t \in [1/10, 1]$

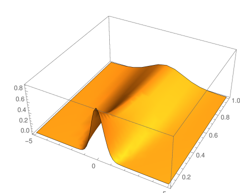

Figure 8: Kerne $H_t(x)$ für $x \in [-5,5]$, $t \in [1/10, 1]$

[41] H_t stellt auch eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung dar; siehe etwa Folland G.B., Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995.

Satz 4.3 *Es sei $f \in L_1$. Dann ist durch*

$$u(t,x) := (f * H_t)(x) = (\widehat{f}\,h_t)^\vee(x) = \int \widehat{f}(z)e^{tz\cdot z}e^{-z\cdot x}\,dm(z)$$

eine Funktion $u \in C^\infty(D)$ definiert, die die Wärmeleitungsgleichung auf D löst. Ist zusätzlich $f \in B(\mathbb{R}^N)$ und gleichmäßig stetig, so ist durch $u(0,x) := f(x)$ eine stetige Fortsetzung von u auf den Abschluss $\overline{D}$ von D gegeben.[42]

Beweis. Wegen $f \in L_1$ und $H_t \in \mathscr{S} \subset L_1$ ist $f * H_t \in L_1$. Außerdem gilt

$$(f * H_t)^\wedge(z) = \widehat{f}(z)\widehat{H_t}(z) = \widehat{f}(z)h_t(z) \quad (z \in i\mathbb{R}^N).$$

Da $h_t \in \mathscr{T} \subset L_1(m)$ gilt und $\widehat{f}$ beschränkt ist, ergibt sich $\widehat{f}h_t \in L_1(m)$, also mit Satz 3.23 (Fourier-Inversion)

$$(f * H_t)(x) = ((f * H_t)^\wedge)^\vee(x) = (\widehat{f}h_t)^\vee(x) = \int \widehat{f}(z)e^{tz\cdot z}e^{-z\cdot x}\,dm(z).$$

Wegen der Abklingeigenschaften des Gauß-Kerns ist ergibt sich $u \in C^\infty(D)$ mit Differenziation von Parameterintegralen. Außerdem impliziert (4.2)

$$\partial_t u(t,x) = \int \widehat{f}(z)e^{tz\cdot z}(z\cdot z)e^{-z\cdot x}\,dm(z) = \Delta_x u(t,x).$$

Ist nun zusätzlich $f \in B(\mathbb{R}^N)$ und gleichmäßig stetig, so folgt $f * H_t \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$ für $t \to 0$ aus Satz 3.14, angewandt auf $g_r = H_{r^2}$. Damit ist die Fortsetzung stetig. □

Wir wenden uns nun der Laplace-Gleichung zu. Wir betrachten das **Dirichtlet-Problem** für den Halbraum D: Ist $f \in C(\mathbb{R}^N)$, so suchen wir Funktionen $u \in C(\overline{D})$ mit $\Delta u = 0$ auf D und so, dass $u(0,\cdot) = f$. Ist

$$p(z) := e^{-|z|} \quad (z \in i\mathbb{R}^N)$$

und $p_t(z) := p(tz) = e^{-t|z|}$ für $t > 0$ und $z \in i\mathbb{R}^N$, so gilt

$$\partial_t^2 p_t(z) = |z|^2 p_t(z) = -(z\cdot z)p_t(z).$$

Wegen des exponentiellen Abklingens von p_t erfüllt

$$u(t,\cdot) := (\widehat{f}\,p_t)^\vee$$

nach (4.3) für $f \in L_1$ die Laplace-Gleichung. Wieder wollen wir mit approximativer Eins nachweisen, dass sich unter geeigneten Voraussetzungen die Randwerte $f(x)$ für $t \to 0$ ergeben. Dazu benötigen wir eine mehrdimensionale Version des Beispiels 3.24.

[42] Also haben wir eine Lösung des Anfangswertproblems mit Wärmeverteilung f zum Zeitpunkt $t = 0$.

Bemerkung und Definition 4.4 Der **Poisson-Kern** $P = P_N$ ist definiert durch

$$P(x) := \frac{c_N}{\sqrt{1+|x|^2}^{N+1}} \qquad (x \in \mathbb{R}^N),$$

mit c_N so, dass $\int P = 1$. Unter Verwendung des Oberflächenmaßes der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^N$ kann man $c_N = \Gamma((N+1)/2)/\sqrt{\pi}^{N+1}$ zeigen.[43]

Satz 4.5 *Es gilt* $P = p^\vee$.

Beweis. Man kann zeigen ([Ü]): Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$, so gilt

$$\int f = \int f(x - 1/x)\, dx.$$

Mit $f(x) = e^{-tx^2}$ und Substitution $tx^2 = y$ erhält man

$$\int f = 2e^{2t} \int_0^\infty e^{-tx^2 - t/x^2} dx = \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-y-t^2/y} \frac{dy}{\sqrt{y}}\,.$$

Andererseits ist $\int f = \int u_*(\sqrt{2t}\, x)\, dx = \sqrt{2\pi}/\sqrt{2t} = \sqrt{\pi/t}$, also

$$\sqrt{\pi} e^{-2t} = \int_0^\infty e^{-y-t^2/y} \frac{dy}{\sqrt{y}}\,.$$

Nun wenden wir diese Gleichung mit $t = |z|/2$ an. Dann ergibt sich mit dem Satz von Fubini und wegen $(u_*(\cdot\,/\sqrt{2y}))^\vee(x) = (\sqrt{y/\pi})^N u_*(\sqrt{2y}\, x) = (\sqrt{y/\pi})^N e^{-y|x|^2}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} p^\vee(x) &= \int_0^\infty \int e^{-|z|^2/(4y)} e^{-z\cdot x}\, dm(z)\, e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\
&= \int_0^\infty (u_*(\cdot\,/\sqrt{2y}))^\vee(x) e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}^N} \int_0^\infty e^{-y(1+|x|^2)} \sqrt{y}^{N-1}\, dy\,.
\end{aligned}$$

Mit Substitution $u = (y(1+|x|^2))^{(N+1)/2}$ ist

$$\int_0^\infty e^{-y(1+|x|^2)} \sqrt{y}^{N-1}\, dy = \frac{1}{(1+|x|^2)^{(N+1)/2}} \frac{2}{N+1} \int_0^\infty e^{-u^{2/(N+1)}}\, du\,.$$

Schließlich erhält man mit Substitution $v = u^{2/(N+1)}$ noch

$$\int_0^\infty e^{-u^{2/(N+1)}}\, du = \frac{N+1}{2} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)$$

und damit

$$\sqrt{\pi}^{N+1} p^\vee(x) = \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \frac{1}{(1+|x|^2)^{(N+1)/2}}$$

$\square$

[43] Γ bezeichnet die Eulersche Gamma-Funktion.

Bemerkung 4.6 Wir setzen $P_t := t^{-N}P(t^{-1}\,\cdot)$ (vgl. Satz 3.14). Dann ist $P_t \in L_1 \cap C_0$ und damit insbesondere auch in L_q für alle $1 \leq q < \infty$. Aus Satz 4.5 folgt mit der Substitutionsregel $P_t = (p_t)^\vee$ für $t > 0$. Mit Fourier-Inversion ist $\widehat{P}_t = ((p_t)^\vee)^\wedge = p_t$.

Satz 4.7 *Ist $f \in L_1$, so ist durch*

$$u(t,x) := (f * P_t)(x) = (\widehat{f}\,p_t)^\vee(x) = \int \widehat{f}(z) e^{-t|z|} e^{-z\cdot x}\, dm(z)$$

eine auf D harmonische Funktion definiert. Ist zusätzlich $f \in B(\mathbb{R}^N)$ und gleichmäßig stetig, so ist durch $u(0,x) := f(x)$ eine stetige Fortsetzung von u auf den Abschluss $\overline{D}$ von D gegeben.[44]

Beweis. Wegen $f \in L_1$ und $P_t \in L_1$ ist $f * P_t \in L_1$. Nach Bemerkung 4.6 gilt

$$(f * P_t)^\wedge(z) = \widehat{f}(z)\widehat{P}_t(z) = \widehat{f}(z)\, p_t(z) \quad (z \in i\mathbb{R}^N).$$

Da $p_t \in L_1(m)$ gilt und $\widehat{f}$ beschränkt ist, ergibt sich auch $\widehat{f}p_t \in L_1(m)$, also mit Satz 3.23 (Fourier-Inversion)

$$(f * P_t)(x) = ((f * P_t)^\wedge)^\vee(x) = (\widehat{f}\,p_t)^\vee(x) = \int \widehat{f}(z) e^{-t|z|} e^{-z\cdot x}\, dm(z).$$

Wie bereits oben erwähnt, erfüllt u nach (4.3) die Laplace-Gleichung, ist also wegen $u \in C^2(D)$ auch harmonisch in D. Ist zusätzlich $f \in B(\mathbb{R}^N)$ und gleichmäßig stetig, so folgt wieder $f * P_t \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^N$ für $t \to 0$ aus Satz 3.14. Damit ist die Fortsetzung stetig. □

In ähnlicher Weise kann man eine Lösung der Wellengleichung zu den Anfangsbedingungen

$$u(0,\cdot) = f \quad \text{und} \quad \partial_t u(0,\cdot) = g$$

für geeignete f, g finden. Man nennt das entsprechende Anfangsproblem das **Cauchy-Problem** für die Wellengleichung. Hier können wir beliebige $t \in \mathbb{R}$ betrachten, da wir mit trigonometrischen Kernen

$$h(t,z) := \cos(|z|t) \qquad \text{und} \qquad k(t,z) := \sin(|z|t)/|z|$$

arbeiten, die auf $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}^N$ beschränkt sind. Hier gilt

$$\partial_t^2 h_t(z) = (z\cdot z)h_t(z) \quad \text{und} \quad \partial_t^2 k_t(z) = (z\cdot z)k_t(z)\,. \tag{4.4}$$

Andererseits müssen wir nun stärkere Bedingungen an das Abklingen von f, g stellen um genügende Differenzierbarkeit der Parameterintegrale zu garantieren.

[44] Also haben wir eine Lösung des Dirichlet-Problems für den Halbraum.

Satz 4.8 *Es seien $f, g \in \mathscr{S}$. Dann ist durch*

$$u(t,x) := (\widehat{f}\, h_t + \widehat{g}\, k_t)^\vee(x) = \int \big(\widehat{f}(z)\cos(|z|t) + \widehat{g}(z)\sin(|z|t)/|z|\big)\, e^{-z\cdot x}\, dm(z)$$

eine Lösung des Cauchy-Problems für die Wellengleichung gegeben.

Beweis. Da $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathscr{T}$ schneller als jede Potenz abklingend sind, können wir das Parameterintegral u sowohl nach t als auch nach x beliebig oft differenzieren. Mit (4.4) und (4.3) und ergibt sich

$$\partial_t^2 u(t,x) = \Delta_x u(t,x).$$

Fourier-Inversion zeigt

$$u(0,\cdot) = (\widehat{f})^\vee = f$$

und einmaliges Differenzieren nach t sowie Fourier-Inversion ergibt

$$\partial_t u(0,\cdot) = (\widehat{g})^\vee = g.$$

□

Wir gehen nun kurz auf eine vor allem für die Quantenphysik fundamentale Aussage ein.

Bemerkung und Definition 4.9 Ist $0 \neq f \in L_2$, so ist die Dispersion $\delta_a f$ an der Stelle $a \in \mathbb{R}^N$ definiert durch

$$\delta_a f := \|f\|_2^{-2} \int |x-a|^2 |f(x)|^2\, dx \in (0,\infty].$$

Der Wert $\delta_a f$ misst in gewisser Weise, wie sehr f sich in der Nähe von a konzentriert.[45] Entsprechend definiert man

$$\delta_b h := \|h\|_2^{-2} \int |z-b|^2 |h(z)|^2\, dm(z)$$

für $h \in L_2(m)$ und $b \in i\mathbb{R}^N$. Ist $f \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ mit $\partial^\alpha f \in L_1 \cap L_2$ für $|\alpha| \leq 1$, so gilt nach dem Satz von Plancherel (Satz 3.27) und Bemerkung 3.6

$$\int |\nabla f|^2 = \sum_{j=1}^N \int |\partial_j f|^2 = \sum_{j=1}^N \int |(\partial_j f)^\wedge|^2\, dm = \sum_{j=1}^N \int |M_{z_j} \widehat{f}|^2\, dm = \int |z|^2 |\widehat{f}(z)|^2\, dm(z) \tag{4.5}$$

und damit $\int |\nabla f|^2 = (\delta_0 \widehat{f}) \|\widehat{f}\|_2^2 < \infty$.

Die Heisenbergsche Ungleichung besagt grob, dass f und $\widehat{f}$ nicht beide sehr stark konzentriert sein können. Ist die Dispersion von f klein, so ist die von $\widehat{f}$ groß und umgekehrt:

[45] Aus Sicht der Stochastik: Ist $\int |f|^2 = 1$ und X eine $|f|^2\lambda$-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $EX = a$, so ist $\delta_a f = \mathrm{Var}(X)$.

Satz 4.10 (Heisenbergsche Ungleichung) *Es seien $a \in \mathbb{R}^N$ und $b \in i\mathbb{R}^N$. Dann gilt* [46]

$$(\delta_a f)(\delta_b \widehat{f}) \geq N^2/4 \qquad (f \in \mathscr{S}_N).$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass nach den Greenschen Formeln[47] für $g \in C^2(\mathbb{R}^N)$ so, dass $\nabla g/|\cdot|^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ beschränkt ist und $v \in \mathscr{S}$

$$\int_{\rho B} v\Delta g + \int_{\rho B} \nabla v \cdot \nabla g = \int_{\rho\mathbb{S}} v\, \partial_{\mathbf{n}} g \, d\sigma_\rho \qquad (\rho > 0)$$

gilt. Für $\rho \to \infty$ ergibt sich die partielle Integrationsformel

$$\int v\Delta g = -\int \nabla v \cdot \nabla g = 0 \tag{4.6}$$

Beim Beweis der Heisenbergschen Ungleichung können wir uns auf den Fall $a = b = 0$ beschränken. Den allgemeinen Fall kann man durch Betrachtung von $f_0(x) = e^{-b\cdot x} f(x+a)$ wegen $\delta_a f = \delta_0 f_0$ und $\delta_b \widehat{f} = \delta_0 \widehat{f_0}$ darauf zurückführen. Also:
Nach (4.6), angewandt auf $v := |f|^2 = f\overline{f} \in \mathscr{S}$ und $g(x) := |x|^2/2 = x \cdot x/2$, folgt wegen $\nabla g(x) = x$ und $\Delta g(x) = N$

$$\begin{aligned} N \int |f|^2 &= \int |f|^2 \Delta g = -\int \nabla g \cdot \nabla |f|^2 = -\int x \cdot \nabla(f\overline{f})(x)\, dx \\ &= -\int x \cdot (\overline{f}\nabla f + f\nabla\overline{f})(x)\, dx = -2\int x \cdot \mathrm{Re}(\overline{f}\nabla f)(x)\, dx \end{aligned}$$

und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung daher

$$N\int |f|^2 \leq 2\int |x| \cdot |f(x)| \cdot |\nabla f|(x)\, dx \leq 2\Big(\int |x|^2 |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int |\nabla f|^2\Big)^{1/2}.$$

Nach dem Satz von Plancherel (Satz 3.25) ist $\int |f|^2 = \int |\widehat{f}|^2\, dm$ und nach (4.5) zudem

$$\int |\nabla f|^2 = \int |z|^2 |\widehat{f}(z)|^2\, dm(z).$$

Damit ergibt sich

$$N^2 \Big(\int |f|^2\Big)\Big(\int |\widehat{f}|^2\, dm\Big) \leq 4\Big(\int |x|^2|f(x)|^2\, dx\Big)\Big(\int |z|^2 |\widehat{f}(z)|^2 dm(z)\Big).$$

□

[46] Die Ungleichung gilt auch unter der Voraussetzung $f \in L_2$. Dies erfordert allerdings weitergehende Techniken. Eine sehr schöne Übersichtsarbeit zum Thema: G.B. Folland und A. Sitaram, The Uncertainty Principle, J. Fourier Anal. Appl., 3 (1997), 207-238.

[47] Siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Diffgleichungen/DGL-2018.pdf, Satz 7.7. Wir schreiben hier und im Weiteren $\mathbb{S} := \mathbb{S}^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ für die $(N-1)$-dimensionale Einheitssphäre und $\sigma_\rho := \sigma_{\rho,N-1}$ für das Oberflächenmaß von $\rho\mathbb{S}$. Außerdem bezeichnet $\mathbf{n}$ das äußere Normaleneinheitsfeld.

Bemerkung 4.11 Ist $f(x) := u_*(x) = e^{-|x|^2/2}$ die Gauß-Funktion, so gilt

$$\nabla f(x) = -f(x)x$$

Wie im Beweis zu Satz 4.10 ist damit

$$N \int |f|^2 = -2 \int x \cdot (f \nabla f)(x)\, dx = 2 \int |x|^2 |f(x)|^2\, dx\,,$$

also $\delta_0 f = N/2$. Wegen $\widehat{f}(z) = (\sqrt{2\pi})^N f(i\omega)$ für $z = i\omega$ ist auch $\delta_0 \widehat{f} = 1/2$. Also gilt für die Gauß-Funktion Gleichheit in der Heisenbergschen Ungleichung. Man kann zeigen, dass im Falle $N = 1$ und $a = b = 0$ Gleichheit *genau* für die Familie der Gauß-Funktionen $f(x) = Ae^{-Bx^2}$ mit $A \neq 0$ und $B > 0$ vorliegt ([Ü]).
Die Abbildungen 7 und 8 deuten an, dass die Dispersion der in Bemerkung 4.2 definierten Gauss-Kerne h_t mit wachsendem t kleiner wird und die von H_t im Gegenzug größer. Aufgrund der Heisenberg-Ungleichung ist dies zwingend der Fall.

Eine weitere Anwendung findet die Fourier-Transformation im Zusammenhang mit der Rekonstruktion N-dimensionaler Funktionen per Integration über affine Hyperebenen. Die resultierende Methode findet Anwendung unter anderem in der Computertomographie.[48]

Bemerkung 4.12 Es seien $N \geq 2$ und $\zeta \in \mathbb{S}^{N-1}$ eine Richtung in $\mathbb{R}^N$. Dann ist für $t \in \mathbb{R}$ die (affine) Hyperebene $E(t,\zeta)$ senkrecht zu ζ durch den Punkt $t\zeta$ gegeben durch

$$E(t,\zeta) = \{x \in \mathbb{R}^N : \zeta \cdot x = t\}.$$

Dabei ist $t = \operatorname{dist}(0, E(t,\zeta))$. Ergänzt man ζ zu einer Orthonormalbasis

$$(\zeta, W) = (\zeta, w_1, \ldots, w_{N-1})$$

des $\mathbb{R}^N$ (etwa per Gram-Schmidt-Verfahren), so ist durch $\varphi_{t,\zeta} : \mathbb{R}^{N-1} \to E(t,\zeta)$ mit

$$\varphi_{t,\zeta}(u) := t\zeta + Wu = t\zeta + \sum_{j=1}^{N-1} u_j w_j \quad (u = (u_1, \ldots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1})$$

eine Parametrisierung von $E(t,\zeta)$ gegeben mit $J\varphi_{t,\zeta}(u) = W$. Da $(w_1, \ldots, w_{N-1})$ ein Orthonormalsystem ist, ergibt sich $W^\top W = I_{N-1}$. Für $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ mit $f \circ \varphi_{t,\zeta} \in L_1(\mathbb{R}^{N-1})$ ist das Hyperebenenintegral von f auf $E(t,\zeta)$ damit gegeben durch

$$\int_{E(t,\zeta)} f = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(\varphi_{t,\zeta}(u))(\det W^\top W)^{1/2}\, du = \int f(t\zeta + Wu)\, du.$$

Es sei $U = U_\zeta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ die lineare Abbildung, die die kanonischen Einheitsvektoren in das Orthonormalsystem $(\zeta, w_1, \ldots, w_{N-1})$ überführt, also $U(x) = Ax$ mit $A = (\zeta, W)$. Dann ist $|\det A| = 1$ und daher gilt nach der Substitutionsregel für $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ und für beliebiges $\zeta \in \mathbb{S}^{N-1}$

$$\int f = \int f \circ U_\zeta = \int \int f(U_\zeta(t,u))\, du\, dt = \int \int f(t\zeta + Wu)\, du\, dt = \int \Big(\int_{E(t,\zeta)} f \Big)\, dt.$$

[48] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Radon-Transformation.

Bemerkung und Definition 4.13 Für $f \in \mathscr{S}_N$ heißt die Funktion $Rf : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(Rf)(t,\zeta) := \int_{E(t,\zeta)} f \; = \int f(t\zeta + Wu)\, du \qquad ((t,\zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1}),$$

die **Radon-Transformierte** von f. Wir schreiben $\mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1})$ für die Menge aller $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1})$ mit $g(\cdot\,,\zeta) \in C^\infty(\mathbb{R})$ und so, dass

$$\sup_{(t,\zeta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{N-1}} |t^k \partial_t^m g(t,\zeta)| < \infty$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt $Rf \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1})$.

> Denn: (Skizze) Wegen $f \in \mathscr{S}_N$ und $|t\zeta + Wu| = |U_\zeta(t,u)| = |(t,u)|$ existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $A_k > 0$ mit
>
> $$(1+|t|)^k (1+|u|)^k |f(t\zeta + Wu)| \le A_k \quad (t \in \mathbb{R},\; u \in \mathbb{R}^{N-1}).$$
>
> Also ist für $k \ge N$
>
> $$(1+|t|)^k |(Rf)(t,\zeta)| \le A_k \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{du}{(1+|u|)^k} < \infty.$$
>
> Eine entsprechende Argumentation gilt für die Ableitungen wegen
>
> $$\partial_t^m (Rf)(t\zeta + Wu) = \int (\partial_\zeta^m f)(t\zeta + Wu)\, du$$
>
> und $\partial_\zeta^m f = m! \sum_{|\alpha|=m} \zeta^\alpha \partial^\alpha f / \alpha!$.[49]

Die Abbildung $R : \mathscr{S}_N \to \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{N-1})$ heißt (N-dimensionale) **Radon-Transformation**.

Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage, ob f durch Rf eindeutig bestimmt ist, also R injektiv ist, und, wenn ja, wie sich f gegebenenfalls aus Rf rekonstruieren lässt. Die erste Frage beantwortet

Satz 4.14 *Es sei $f \in \mathscr{S}_N$. Dann gilt*

1. *Für alle $\zeta \in \mathbb{S}^{N-1}$ ist $(Rf(\cdot,\zeta))^\wedge = \widehat{f}(\cdot\,\zeta)$.*
2. *Aus $Rf = 0$ folgt $f = 0$.*

Beweis. 1. Wegen $\zeta \perp E(0,\zeta)$ und $\zeta \cdot \zeta = 1$ gilt

$$t = \zeta \cdot (t\zeta + \sum_{j=1}^{N-1} u_j w_j) = \zeta \cdot (t\zeta + Wu) = \zeta \cdot U_\zeta(t,u)$$

[49] siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 4.6

für $u \in \mathbb{R}^{N-1}$. Also folgt wegen der Bewegungsinvarainz des Lebesgue-Maßes für $z \in i\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(Rf(\cdot,\zeta))^{\wedge}(z) &= \int \Big(\int_{E(t,\zeta)} f\Big) e^{zt}\,dt \\ &= \int\int f(t\zeta + Wu)\,du\,e^{zt}\,dt \\ &= \int f(U_\zeta(t,u))e^{z\zeta\cdot U_\zeta(t,u)}\,d(t,u) \\ &= \int f(t,u))e^{z\zeta\cdot(t,u)}\,d(t,u) = \widehat{f}(z\,\zeta)\end{aligned}$$

2. Ist $Rf = 0$ so ist auch $0 = (Rf(\cdot,\zeta))^{\wedge} = \widehat{f}(\cdot\,\zeta)$ für alle $\zeta \in \mathbb{S}^{N-1}$. Damit ist $\widehat{f} = 0$, also nach Satz 3.23 auch $f = 0$. □

Bemerkung 4.15 Ist $f \in \mathscr{S}_N$, so gilt $\widehat{f} \in \mathscr{T}_N$ und damit auch $\widehat{f}(\cdot\,\zeta) \in \mathscr{T}_1$ für alle ζ. Nach Satz 4.14.1 und Satz 3.25 ist

$$Rf(\cdot,\zeta) = (\widehat{f}(\cdot\zeta))^{\vee}.$$

Dies zeigt, dass $\widehat{f}$ genau dann auf der Gerade $i\mathbb{R}\zeta$ verschwindet, wenn $Rf(\cdot\,,\zeta)$ verschwindet, d. h. $\int_{E(t,\zeta)} f = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Ist $N = 2$ und hat f kompakten Träger, so kann man zeigen, dass $\widehat{f}$ (und damit f) schon dann verschwindet, wenn $\widehat{f}$ auf einer unendlichen Menge von Geraden der Form $i\mathbb{R}\zeta$ verschwindet.[50]

Wir wollen die Frage untersuchen, wie man f aus Rf rekonstruieren kann. Wir verwenden dabei:[51] Für $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\int f\,d\lambda_N = \int\int_{\mathbb{R}_+} f(r\zeta)\,r^{N-1}\,dr\,d\sigma_{N-1}(\zeta)\,. \tag{4.7}$$

In m_N statt λ_N liest sich die Formel für $g \in L_1(m_N)$ als

$$(2\pi)^{N-1}\int g\,dm_N = \int\int_{i\mathbb{R}_+} g(z\zeta)\,|z|^{N-1}\,dm_1(z)\,d\sigma_{N-1}(\zeta)\,. \tag{4.8}$$

[50] Dieses und weitere Ergebnisse in dem Zusammenhang findet man etwa im Artikel *Uniqueness and Nonuniqueness for the Radon Transform* von P.D. Lax und L. Zalcman in ihren Buch *Complex Proofs of Real Theorems*, American Mathematical Society, Providence, 2012.

[51] Im Weiteren schreiben wir kurz $\sigma := \sigma_{N-1} := \sigma_{1,N-1}$ für das Oberflächenmaß der Sphäre $\mathbb{S}^{N-1}$. Für den uns besonders interessierenden Fall $N = 3$ ergibt sich die Formel unter Verwendung sphärischer Polarkoordinaten, der Substitutionsregel und des Satzes von Fubini. Für den allgemeinen Fall siehe etwa Folland, G.B., Real Analysis, Wiley, New York, 1984 oder Rudin, W., Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987, Chapter 8, Exercise 6.

Definition 4.16 Die **duale Radon-Transformierte** $R^* : \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1}) \to \mathscr{S}_N$ ist für $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1})$ definiert durch

$$(R^*h)(x) := \int h(x \cdot \zeta, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Im Fall ungerader $N \geq 3$ lässt sich damit die Frage nach der Rekonstruktion von f aus Rf in eleganter Weise beantworten.

Satz 4.17 *Für ungerades $N \geq 3$ und $f \in \mathscr{S}_N$ gilt*

$$(-\Delta)^{(N-1)/2} R^* Rf = 2^N \pi^{N-1} f.$$

Beweis. Nach Bemerkung 4.15 ist $(Rf)(t, \zeta) = \int \widehat{f}(z\zeta) e^{-zt}\, dm_1(z)$. Wegen

$$E(-t, -\zeta) = E(t, \zeta)$$

gilt $Rf(-t, -\zeta) = Rf(t, \zeta)$. Also erhält man für $x \in \mathbb{R}^N$ durch Aufteilung des Integrals über $\mathbb{S}$ in die beiden Hemisphären $\{\zeta\mathbb{S} : \pm\zeta_1 \geq 0\}$

$$(R^*Rf)(x) = \int \int \widehat{f}(z\zeta) e^{-zx\cdot\zeta}\, dm_1(z)\, d\sigma(\zeta) = 2 \int \int_{i\mathbb{R}_+} \widehat{f}(z\zeta) e^{-zx\cdot\zeta}\, dm_1(z)\, d\sigma(\zeta).$$

Wegen $(\zeta \cdot \zeta)^{(N-1)/2} = 1$ für $\zeta \in \mathbb{S}$ und $(z^2)^{(N-1)/2} = (-1)^{(N-1)/2} |z|^{N-1}$ für $z \in i\mathbb{R}$ folgt mit Differenziation von Parameterintegralen, mit (4.8) und wieder mit dem Satz von Plancherel (Satz 3.25)

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{(N-1)/2} (R^*Rf)(x) &= 2 \int \int_{i\mathbb{R}_+} \widehat{f}(z\zeta)\, |z|^{N-1}\, e^{-zx\cdot\zeta}\, dm_1(z)\, d\sigma(\zeta) \\
&= 2(2\pi)^{N-1} \int \widehat{f}(w) e^{-w\cdot x}\, dm_N(w) \\
&= 2^N \pi^{N-1} \,(\widehat{f})^\vee(x) = 2^N \pi^{N-1}\, f(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 4.18 Der Fall gerader N erweist sich als diffiziler. Hier spielt die Hilbert-Transformation eine wichtige Rolle. Die Umkehrung der Radon-Transformation über die duale Transformation ist damit auch in diesem Fall realisierbar.[52]

[52] Genaueres findet man in Folland, G.B., Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1995, Chapter 5, Section F.

5 Harmonische Funktionen und Poisson-Integrale

In Satz 4.7 hatten wir gesehen, dass $f * P_t$ für $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ harmonisch im Halbraum $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}^N$ ist. Wir befassen uns nun systematischer mit harmonischen Funktionen auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^N$, wobei stets $N \geq 2$ vorausgesetzt ist.[53]

Bemerkung 5.1 1. Es seien $\rho > 0$ und wieder $\sigma_\rho = \sigma_{\rho,N-1}$ das Oberflächenmaß von $\rho\mathbb{S}$. Dann ist σ_ρ das Bildmaß von $\rho^{N-1}\sigma$ unter $x \mapsto \rho x$. Also gilt für Funktionen $u \in L_1(\sigma_\rho)$

$$\int_{\rho\mathbb{S}} u \, d\sigma_\rho = \rho^{N-1} \int u(\rho\zeta) \, d\sigma(\zeta). \tag{5.1}$$

2. Ist u zweimal stetig differenzierbar auf einer offenen Obermenge von ρB, so ergibt sich aus der ersten Greenschen Formel[54]

$$\int_{\rho\mathbb{S}} \partial_{\mathbf{n}} u \, d\sigma_\rho = \int_{\rho B} \Delta u$$

Ist u harmonisch, so ist damit

$$\int_{\rho\mathbb{S}} \partial_{\mathbf{n}} u \, d\sigma_\rho = 0. \tag{5.2}$$

Wir zeigen zunächst

Satz 5.2 *Es seien $a \in \mathbb{R}^N$ und $\rho > 0$. Ist u harmonisch auf einer offenen Obermenge von $B_\rho(a)$, so ist*

$$(0, \rho] \ni r \mapsto \int u(a + r\zeta) \, d\sigma(\zeta)$$

konstant.

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir $a = 0$ und $\rho = 1$ an (sonst $x \mapsto u(a + \rho x)$ statt u betrachten).
1. Fall: $N > 2$. Dann ist $v : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $v(x) := |x|^{2-N}$ harmonisch mit

$$\nabla v(x) = (2 - N)|x|^{-N} \cdot x \qquad (x \neq 0)$$

([Ü]). Es sei nun $0 < r < 1$. Wir betrachten $A_r := B \setminus U_r(0)$. Dann ist A_r kompakt mit $\partial A_r = \mathbb{S} \cup r\mathbb{S}$. Weiter ist $\mathbf{n}(x) = x$ für $x \in \mathbb{S}$ und $\mathbf{n}(x) = -x/r$ für $x \in r\mathbb{S}$,[55] also

$$\partial_{\mathbf{n}} v(x) = \nabla v(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \begin{cases} (2 - N)x \cdot x = 2 - N, & \text{falls } x \in \mathbb{S} \\ -(2 - N)r^{-N-1} x \cdot x = -(2 - N)r^{1-N}, & \text{falls } x \in r\mathbb{S}^{N-1} \end{cases}.$$

[53] Im skalaren Fall $N = 1$ sind harmonische Funktionen affin-linear.

[54] siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Diffgleichungen/DGL-2018.pdf, Satz 7.7. Dabei ist eine Funktion konstant 1 gewählt.

[55] Siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Diffgleichungen/DGL-2018.pdf, Satz 6.14.

Mit $\Delta u = \Delta v = 0$ ergibt sich nach der zweiten Greenschen Formel

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{A_r} u\Delta v - v\Delta u = \int_{\mathbb{S}} (u\partial_{\mathbf{n}} v - v\partial_{\mathbf{n}} u)\, d\sigma + \int_{r\mathbb{S}} (u\partial_{\mathbf{n}} v - v\partial_{\mathbf{n}} u)\, d\sigma_r \\ &= (2-N)\int_{\mathbb{S}} u\, d\sigma - (2-N) r^{1-N} \int_{r\mathbb{S}} u\, d\sigma_r - \int_{\mathbb{S}} \partial_{\mathbf{n}} u\, d\sigma - r^{2-N} \int_{r\mathbb{S}} \partial_{\mathbf{n}} u\, d\sigma_r\, . \end{aligned}$$

Nach (5.2), angewandt auf B und rB, sind die beiden letzten Summanden 0, also mit (5.1)

$$\int_{\mathbb{S}} u\, d\sigma = r^{1-N} \int_{r\mathbb{S}} u\, d\sigma_r = \int u(r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, .$$

2. Fall: $N = 2$. Hier ergibt sich der Beweis wie im 1. Fall, jetzt mit $v(x) = \ln|x|$. □

Eine wichtige Folgerung ist

Satz 5.3 (Mittelwertformel)
Es seien $a \in \mathbb{R}^N$ und $\rho > 0$. Ist u harmonisch auf einer offenen Obermenge von $B_\rho(a)$, so gilt [56] *für $0 < r \le \rho$*

$$u(a) = \frac{1}{\omega_{N-1}} \int u(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\ .$$

Beweis. Da u stetig an a ist, gilt $u(a + r\,\cdot) \to u(a)$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$ für $r \to 0$. Damit konvergieren die Integrale in der Mitte gegen $u(a)\omega_{N-1}$ für $r \to 0$. Nach Satz 5.2 sind die Integrale unabhängig von r. Also ist

$$u(a)\omega_{N-1} = \int u(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta) \quad (0 < r \le \rho)\, .$$

□

Ist u stetig auf $B_\rho(a)$ und gilt die Mittelwertformel wie in Satz 5.3, so ergibt sich mit (4.7) durch Aufintegrieren auch die **Volumen-Mittelwertformel**[57]

$$u(a) = \frac{1}{\lambda(B)} \int u(a + rx)\, dx \qquad (0 < r \le \rho).$$

Bemerkenswerterweise folgt aus der Gültigkeit der Mittelwertformel auch schon Harmonizität:

Satz 5.4 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $u \in C(\Omega)$. Existiert zu jedem $x \in \Omega$ ein $\rho > 0$ mit*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{N-1}} \int u(x + r\zeta)\, d\sigma(\zeta) \quad (0 < r \le \rho),$$

so ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

---

[56] $\omega_{N-1} := \sigma(\mathbb{S}^{N-1})$ bezeichnet die Oberfläche von $\mathbb{S}^{N-1}$.
[57] Es gilt $\lambda(B) = \sigma(\mathbb{S}^{N-1})/N = \omega_{N-1}/N$.

Beweis. Es sei $a \in \Omega$ und $0 < \delta < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$. Dann ist $\Omega_\delta := \{y : B_\delta(y) \subset \Omega\}$ offen mit $a \in \Omega_\delta$. Weiter sei $v \in \mathscr{D}$ die Funktion aus Beispiel 3.17 und $v_r := r^{-N} v(r^{-1}\,\cdot)$ für $r > 0$. Dann ist $u * v_r \in C^\infty$ nach Satz 3.18 und $\operatorname{supp}(y \mapsto v_r(x-y)) \subset \Omega$ für $x \in \Omega_\delta$ sowie $0 < r < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega) - \delta$.
Nun sei $x \in \Omega_\delta$. Nach Voraussetzung existiert ein $\rho = \rho_x \leq \operatorname{dist}(a, \partial\Omega) - \delta$ so, dass

$$(-\rho, \rho) \ni t \mapsto \int u(x - t\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int \tau_{t\zeta} u(x)\, d\sigma(\zeta)$$

konstant ist. Mit $w(r) := v(r\zeta)$ ergibt sich wie im Beweis zu Satz 3.14 für $0 < r < \rho$ unter Verwendung von (4.7) und wegen $\operatorname{supp}(v) = B$

$$\begin{aligned} (u * v_r)(x) - u(x) &= \int_B (\tau_{ry} u - u)(x) v(y)\, dy \\ &= \int_0^1 w(s)\, s^{N-1} \int (\tau_{rs\zeta} u - u)(x)\, d\sigma(\zeta)\, ds = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $u \in C^\infty(\Omega_\delta)$. Da $a \in \Omega$ beliebig war, ist auch $u \in C^\infty(\Omega)$.
Wir haben noch zu zeigen, dass $\Delta u(a) = 0$ ist. Mit (5.1) und der Greenschen Formel (siehe Bemerkung 5.1) gilt für $0 < r < \rho_a$ wegen $\mathbf{n}(\xi) = r^{-1}\xi$ für $\xi \in r\mathbb{S}$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dr} \int u(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int \zeta \cdot \nabla u(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= r^{1-N} \int_{r\mathbb{S}} r^{-1}\xi \cdot \nabla u(a + \xi)\, d\sigma_r(\xi) = r^{1-N} \int_{r\mathbb{S}} \partial_{\mathbf{n}} u(a + \xi)\, d\sigma_r(\xi) \\ &= r^{1-N} \int_{rB} \Delta u(a + \,\cdot\,) = r^{1-N} \int_{B_r(a)} \Delta u. \end{aligned}$$

Wir können annehmen, dass u reellwertig ist (sonst betrachte man $\operatorname{Re} u$ und $\operatorname{Im} u$). Wäre $\Delta u(a) \neq 0$, so wäre Δu positiv auf einer Umgebung von a oder negativ und damit $\int_{B_r(a)} \Delta u$ positiv oder negativ für kleine r. Widerspruch. $\square$

Bemerkung 5.5 Als unmittelbare Konsequenz aus Satz 5.4 und Satz 5.3 ergibt sich: Ist u harmonisch in Ω, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$.[58]

Wir ziehen weitere wichtige Folgerungen

Satz 5.6 (Maximumprinzip) *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen sowie u harmonisch in Ω und reellwertig. Ist a eine Extremstelle von u, so ist u konstant auf einer Umgebung von a. Ist Ω zusammenhängend und wird u maximal oder minimal, so ist u konstant.*

[58]Tatsächlich sind harmonische Funktionen sogar reell-analytisch, eine wesentlich stärkere Bedingung; siehe etwa Axler, S., Bourdon, P., Ramey, W., Harmonic Funktion Theory, Springer, New York, 2001.

Beweis. 1. Ohne Einschränkung sei a eine Maximalstelle und $\delta > 0$ so, dass $u(x) \le u(a)$ für $x \in U_\delta(a)$. Angenommen, es existiert ein $x \in U_\delta(a)$ mit $u(x) < u(a)$. Ist $r = |x-a|$, so gilt $x \in a + r\mathbb{S}$ und $u < u(a)$ auf einer Umgebung von x wegen der Stetigkeit von u. Nach der Mittelwertformel ist dann

$$\omega_{N-1} u(a) = \int u(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta) < \int u(a)\, d\sigma(\zeta) = \omega_{N-1} u(a).$$

Widerspruch! Also gilt $u(x) = u(a)$ für $x \in U_\delta(a)$.
2. Wird u maximal an der Stelle a, gilt also $u(a) = \max_\Omega u$, so ist $A := u^{-1}(\{u(a)\})$ nichtleer und in Ω abgeschlossen. Nach 1. ist A auch offen in Ω. Da Ω zusammenhängend ist, ist dann schon $A = \Omega$. □

Satz 5.7 (Liouville) *Ist u harmonisch in $\mathbb{R}^N$ und beschränkt, so ist u konstant.*

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}^N$. Ist $E_\rho := (B_\rho(x) \setminus \rho B) \cup (\rho B \setminus B_\rho(x))$ für $\rho > |x|$ die symmetrische Differenz von $B_\rho(x)$ und ρB, so folgt aus der Volumen-Mittelwertformel und der Substitutionsregel

$$u(x) - u(0) = \frac{1}{\rho^N \lambda(B)} \Big(\int_{B_\rho(x)} u(y)\, dy - \int_{\rho B} u(y)\, dy \Big) = \frac{1}{\rho^N \lambda(B)} \int_{E_\rho} u\,.$$

Ist $|y| \le \rho - |x|$, so ist $y \in \rho B$ und nach der Dreiecksungleichung auch $y \in B_\rho(x)$. Also ist $E_\rho \subset A_\rho := B_{\rho+|x|}(0) \setminus U_{\rho-|x|}(0)$. Wegen

$$\lambda(A_\rho)/\lambda(B) = (\rho + |x|)^N - (\rho - |x|)^N = \sum_{\nu=1}^{N} \binom{N}{\nu} (1 - (-1)^\nu) |x|^\nu \rho^{N-\nu}$$

ergibt sich

$$|u(x) - u(0)| \le \frac{1}{\rho^N \lambda(B)} \|u\|_\infty \lambda(A_\rho) = \|u\|_\infty \sum_{\nu=1}^{N} \binom{N}{\nu} (1 - (-1)^\nu) |x|^\nu / \rho^\nu \to 0$$

für $\rho \to \infty$. Damit ist $u(x) = u(0)$, also u konstant. □

Wir betrachten nun den Fall $N = 2$. Hier kann man eine enge Beziehung zwischen harmonischen und komplex differenzierbaren Funktionen herstellen.

Satz 5.8 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist u zweimal stetig komplex differenzierbar auf Ω, so ist u harmonisch.*

Beweis. Ist f komplex differenzierbar, so ergibt sich $\partial_1 f = f'$ durch Betrachtung der Differenzenquotienten $(f(a+h) - f(a))/h$ für reelle h und $\partial_2 f = if'$ für rein imaginäre h. Also folgt für zweimal komplex differenzierbare u

$$\partial_2^2 u = \partial_2(\partial_2 u) = \partial_2(iu') = i\partial_2 u' = ii(u')' = -\partial_1^2 u.$$

Ist u'' stetig, so sind dabei auch alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig. $\square$

Bemerkung 5.9 Ist u an $a \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe entwickelbar, also

$$u(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu$$

für $z \in U_\delta(a)$, so ist u beliebig oft komplex differenzierbar auf $U_\delta(a)$ und damit harmonisch. Insbesondere ist jede in $\Omega \subset \mathbb{C}$ analytische Funktion beliebig oft komplex differenzierbar, also auch harmonisch.

Wir untersuchen nun das **Dirichlet-Problem** (Ω, f)

$$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \quad \text{ und } \quad u|_{\partial\Omega} = f$$

für Funktionen $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$, die nicht notwendig stetig sind. Dabei stellt sich etwa die Frage, ob für integrierbare f Konvergenz von $u(x)$ gegen $f(\zeta)$ $(x \to \zeta)$ für fast alle $\zeta \in \partial\Omega$ gilt. Für den Fall des Halbraumes $\Omega = D$ folgt aus Satz 3.14 und der Definition der Poisson-Kerne P_t in Bemerkung 4.6, dass für beliebige $p \in [1, \infty)$ und $f \in L_p$ Konvergenz der Poisson-Integrale $f * P_t$ gegen f für $t \to 0$ in L_p gilt. Dies impliziert allerdings leider noch keine Konvergenz fast überall.

Wir gehen zurück zu den Anfängen und betrachten Poisson-Integrale auf der Kreisscheibe $\Omega = \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ und $\partial\mathbb{D} = \mathbb{S} = \mathbb{S}^1$.[59]

Bemerkung und Definition 5.10 Für $\mathbb{D}$ ist der **Poisson-Kern** $P : \mathbb{D} \times \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$P(z, w) := \mathrm{Re}\Big(\frac{w+z}{w-z}\Big) = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} \,.$$

Wir schreiben auch $P_z := P(z, \cdot)$. Ist $f \in L_1(m)$[60], so definiert man damit das **Poisson-Integral** von f durch

$$(Pf)(z) := \int f P_z \, dm = \int f(w) \, \mathrm{Re}\Big(\frac{w+z}{w-z}\Big) \, dm(w) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Dabei ist für $\zeta \in \mathbb{S}$ und $0 < r < 1$

$$(Pf)(r\zeta) = \int f(w) \, \mathrm{Re}\left(\frac{1 + r\zeta\overline{w}}{1 - r\zeta\overline{w}}\right) \, dm(w) = (f * P(r \,\cdot, 1))(\zeta).$$

[59] Entsprechende Ergebnisse für für die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^N$ und für den Halbraum D findet man etwa in Axler, S., Bourdon, P., Ramey, W., Harmonic Funktion Theory, Springer, New York, 2001. Die Techniken sind ähnlich.

[60] Man beachte, dass m auch das normierte Oberflächenmaß auf $\mathbb{S}^1$ ist, also $m = (2\pi)^{-1}\sigma_1 = \omega_1^{-1}\sigma_1$.

Weiter definieren wir $P_{\mathbb{C}}f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ durch

$$(P_{\mathbb{C}}f)(z) := \int f(w)\frac{w+z}{w-z}\,dm(w) \quad (z \in \mathbb{D})$$

und das **Cauchy-Integral** $Cf : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ von f durch

$$(Cf)(z) = \int f(w)\frac{w}{w-z}\,dm(w) \quad (z \in \mathbb{D})\,.$$

Satz 5.11 *Es sei $f \in L_1(m)$. Dann gilt $P_{\mathbb{C}}f = 2Cf - \widehat{f}(0)$ und*

$$Cf(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}(\nu) z^\nu = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (\widehat{f}\,1_{\mathbb{N}_0})(\nu) z^\nu \quad (z \in \mathbb{D})$$

Beweis. Wegen

$$\frac{w+z}{w-z} = \frac{2w}{w-z} - 1$$

ist $P_{\mathbb{C}}f(z) = 2(Cf)(z) - \int f(w)\,dm(w)$. Weiter ist

$$\frac{w}{w-z} = \frac{1}{1-z\overline{w}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z\overline{w})^\nu \quad (w \in \mathbb{S},\ z \in \mathbb{D})$$

mit gleichmäßiger Konvergenz in $w \in \mathbb{S}$, also $(Cf)(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \int f(w)\overline{w}^\nu\,dm(w)$. □

Bemerkung 5.12 1. Als Potenzreihe ist $h := P_{\mathbb{C}}f$ beliebig oft komplex differenzierbar, also nach Bemerkung 5.9 auch harmonisch. Damit ist auch $\overline{h}$ harmonisch. Ist f reellwertig, so gilt

$$Pf = \mathrm{Re}(h) = (h + \overline{h})/2.$$

Also ist auch Pf harmonisch. Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil sieht man, dass Pf auch für komplexwertige f harmonisch ist.
2. Aus Satz 5.11 folgt ([Ü])

$$Pf(r\zeta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) r^{|\nu|}\zeta^\nu \qquad (\zeta \in \mathbb{S},\ 0 \le r < 1).$$

Mit $f = 1$ ergibt sich insbesondere $\int P_z\,dm = 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Außerdem ist $(P(r_n\,\cdot, 1))_n$ für beliebige Folgen $1 > r_n \to 1$ eine Folge guter Kerne ([Ü]). Ist $f \in C(\mathbb{S})$, so gilt damit $Pf(r\,\cdot) = f * P(r\,\cdot, 1) \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$ für $r \to 1^-$ nach Satz 1.11. Insbesondere ist durch $Pf(\zeta) := f(\zeta)$ eine stetige Fortsetzung von f auf $\overline{\mathbb{D}}$ und damit eine Lösung des Dirichlet-Problems gegeben. Darüber hinaus gilt nach Satz 2.11 für $f \in L_p(m)$ auch $Pf(r\,\cdot) \to f$ in $L_p(m)$. Zudem ergibt sich aus der Jensen-Ungleichung ([Ü])

$$\|Pf(r\,\cdot)\|_p \le \|f\|_p \qquad (0 \le r < 1). \tag{5.3}$$

Wir wollen nun zeigen, dass für beliebige integrierbare $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$

$$Pf(r\,\cdot) \to f \quad m\text{-fast überall}$$

gilt. Genauer zeigen wir, dass das Poisson-Integral Pf an fast allen $\zeta \in \mathbb{S}$ nichttangentiale Grenzwerte hat. Dazu betrachten wir zunächst die Hardy-Littlewood-**Maximalfunktion** Mf, definiert für $f \in L_1(m)$ durch

$$(Mf)(\zeta) := \sup\left\{\frac{1}{m(B)}\int_B |f|\,dm : B \subset \mathbb{S} \text{ Bogen mit } \zeta \in B\right\}.$$

Ist $f \in L_1(m)$, so besagt die Tschebyschow-Ungleichung, dass

$$\lambda\, m(|f| > \lambda) \le \|f\|_1 \quad (\lambda > 0)$$

gilt. Funktionen g, für die $\lambda \mapsto \lambda\, m(|g| > \lambda)$ beschränkt ist, nennt man auch schwach L_1. Wir zeigen, dass dies für die Maximalfunktion der Fall ist:

Satz 5.13 *Für $f \in L_1(m)$ ist*

$$\lambda\, m(Mf > \lambda) \le 3\|f\|_1 \qquad (\lambda > 0).$$

Beweis. 1. Wir zeigen folgende Aussage über endliche Familien offener Kreisbögen: Ist $(B_1, \ldots, B_n)$ eine Familie offener Bögen, so existiert ein $J \subset \{1, \ldots, n\}$ so, dass $(B_j)_{j\in J}$ eine disjunkte Familie ist mit

$$\sum_{j\in J} m(B_j) \ge \frac{1}{3} m\Big(\bigcup_{j=1}^n B_j\Big)$$

Wir können annehmen, dass $n > 1$, dass kein Bogen B_j in der Vereinigung der restlichen enthalten ist und dass B_j von der Form $\{\zeta : a_j < \arg(\zeta) < b_j\}$ mit $-\pi \le a_j < a_{j+1} < \pi$ für $j = 1, \ldots, n-1$ ist. Dann ist $b_j < b_{j+1}$ (sonst wäre $B_{j+1} \subset B_j$) und $b_{j-1} < a_{j+1}$ (sonst wäre $B_j \subset B_{j-1} \cup B_{j+1}$). Weiter ist $b_n < b_1 + 2\pi$ und $b_{n-1} < a_1 + 2\pi$. Damit ist die Familie $(B_{2k})_{2k\le n}$ disjunkt und $(B_{2k-1})_{2k-1\le n}$ ebenfalls bis auf höchstens den ersten und den letzten Bogen. Ist

$$\sum_k m(B_{2k}) \ge \frac{1}{3} m\Big(\bigcup_{j=1}^n B_j\Big),$$

so ist $(B_{2k})_{2k\le n}$ passend. Andernfalls ist

$$m(B_1) + \sum_k m(B_{2k+1}) = \sum_k m(B_{2k-1}) \ge \frac{2}{3} m\Big(\bigcup_{j=1}^n B_j\Big)$$

und damit (B_1) oder $(B_{2k+1})_{2k+1\le n}$ passend.
2. Es sei $K \subset E_\lambda := \{\zeta : Mf(\zeta) > \lambda\}$ kompakt. Dann existiert zu jedem $\zeta \in K$ ein offener Bogen B_ζ mit $\zeta \in B_\zeta$ und so, dass

$$\frac{1}{m(B_\zeta)}\int_{B_\zeta} |f|\,dm > \lambda.$$

Da K kompakt ist, existieren $B_1 := B_{\zeta_1}, \dots, B_n := B_{\zeta_n}$, die K überdecken. Ist J wie in 1., so folgt

$$m(K) \le m\Big(\bigcup_{j=1}^n B_j\Big) \le 3 \sum_{j \in J} m(B_j) \le \frac{3}{\lambda} \sum_{j \in J} \int_{B_j} |f| \, dm \le \frac{3}{\lambda} \|f\|_1.$$

Wegen der Regularität vom m gilt die Abschätzung auch für E_λ statt K. □

Definition 5.14 Für $\zeta \in \mathbb{S}$ und $\alpha > 1$ betrachten wir den Kegel

$$\Gamma_\alpha(\zeta) := \{z \in \mathbb{D} : |z - \zeta| < \min\{1, \alpha(1 - |z|)\}\}.$$

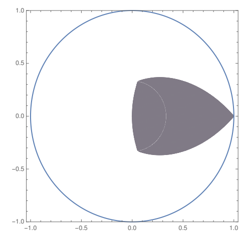

Figure 9: $\mathbb{S}$ und Kegel $\Gamma_{3/2}(1)$

Man sagt, dass $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ an ζ den **nichttangentialen Grenzwert** $u^*(\zeta)$ hat, falls

$$u^*(\zeta) := \lim_{\Gamma_\alpha(\zeta) \ni z \to \zeta} u(z)$$

für alle $\alpha > 1$ existiert. Weiterhin definieren wir die **nichttangentiale Maximalfunktion** u_α durch

$$u_\alpha(\zeta) := \sup_{z \in \Gamma_\alpha(\zeta)} |u(z)|.$$

Ist u stetig und existiert $u^*(\zeta)$, so ist $u_\alpha(\zeta) < \infty$ für alle $\alpha > 1$.

Satz 5.15 *Es seien $\alpha > 1$ und $f \in L_1(m)$. Dann ist*

$$(Pf)_\alpha(\zeta) \le (1 + \alpha) Mf(\zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{S}).$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $\zeta = 1$ und $f \ge 0$ voraussetzen ($Mf = M|f|$). Ungleichung bezieht sich nur auf $|f|$). Für $w \in \mathbb{S}$ sei $B_w := \{w' : |\arg w'| \le |\arg(w)|\}$. Ist $z \in \Gamma_\alpha(1)$, so gilt

$$Q_z(w) := \sup\{P_z(w') : w' \in \mathbb{S} \setminus B_w\} = \begin{cases} = P_z\Big(\dfrac{z}{|z|}\Big) = \dfrac{1 + |z|}{1 - |z|}, & w \in B_{z/|z|} \\ \max\{P_z(w), P_z(\overline{w})\}, & w \in \mathbb{S} \setminus B_{z/|z|} \end{cases}.$$

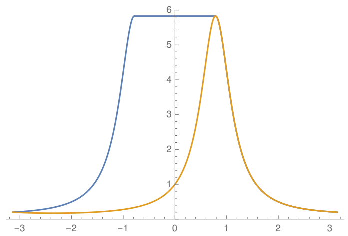

Figure 10: $P_z(e^{it})$ und $Q_z(e^{it})$ für $z = (1+i)/2$.

Damit ist einerseits $P_z(w) \le Q_z(w)$, also

$$Pf(z) = \int f P_z \, dm \le \int f Q_z \, dm \,,$$

und andererseits

$$\int_{\mathbb{S}\setminus B_{z/|z|}} Q_z \, dm \le \int P_z \, dm = 1.$$

Außerdem ist $Q_z(w) = Q_z(\overline{w})$ (also Q_z gerade) und $t \mapsto Q_z(e^{it})$ fallend auf $[0,\pi]$. Daher existiert eine gegen Q_z aufsteigende Folge von Treppenfunktionen T_n der Form

$$T_n := \sum_j c_{n,j} \frac{1}{m(B_{n,j})} 1_{B_{n,j}}$$

mit Bögen $B_{n,j} \supset B_{z/|z|} \ni 1$ und $c_{n,j} \ge 0$ sowie $\sum\limits_j c_{n,j} \le \|Q_z\|_1$. Damit ergibt sich

$$\int f Q_z \, dm \le \|Q_z\|_1 Mf(1)$$

Also reicht es zu zeigen, dass $\|Q_z\|_1 \le 1+\alpha$ gilt. Wir setzen $\theta := \arg(z/|z|) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dann gilt $|\sin\theta| \ge 2|\theta|/\pi$ und aus dem Sinussatz[61] folgt $|\sin\theta|/|1-z| \le 1$. Damit ist

$$\frac{|\theta|}{1-|z|} \le \alpha \frac{|\theta|}{|1-z|} \le \frac{\alpha\pi}{2} \frac{|\sin\theta|}{|1-z|} \le \frac{\alpha\pi}{2} \,,$$

also

$$\|Q_z\|_1 = \int_{\mathbb{S}\setminus B_{z/|z|}} Q_z \, dm + m(B_{z/|z|}) \frac{1+|z|}{1-|z|} \le 1 + \frac{1}{\pi}|\theta| \frac{1+|z|}{1-|z|} \le 1+\alpha.$$

□

Nach den Sätzen 5.13 und 5.15 ist

$$\lambda\, m((Pf)_\alpha > \lambda) \le 3(1+\alpha)\|f\|_1 \quad (\lambda > 0). \tag{5.4}$$

Damit beweisen wir folgenden zentralen Satz über das Randverhalten von Poisson-Integralen:

[61] siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Sinussatz

Satz 5.16 (Fatou) *Ist $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ m-integrierbar, so existiert $(Pf)^*$ fast überall mit $(Pf)^* = f$ fast überall.*[62]

Beweis. Für $h \in L_1(m)$ setzen wir

$$\delta_{h,\alpha}(\zeta) := \limsup_{\Gamma_\alpha(\zeta) \ni z \to \zeta} |(Ph)(z) - h(\zeta)|.$$

Dann gilt $\delta_{h,\alpha}(\zeta) \leq (Ph)_\alpha(\zeta) + |h(\zeta)|$ und nach der Tschebyschow-Ungleichung sowie (5.4)

$$m(\delta_{h,\alpha} > \lambda) \leq m((Ph)_\alpha > \lambda/2) + m(|h| > \lambda/2) \leq (8 + 6\alpha)\|h\|_1/\lambda. \tag{5.5}$$

Es reicht zu zeigen, dass $\delta_{f,\alpha} = 0$ für m-fast alle ζ erfüllt ist, denn dann gilt mit $\alpha_n \to \infty$ die Behauptung auch für m-fast alle ζ mit beliebigem $\alpha > 1$.
Es sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $C(\mathbb{S})$ dicht in $L_1(m)$ ist, existiert eine Funktion $g \in C(\mathbb{S})$ mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon^2$. Nach Bemerkung 5.12 gilt $Pg(z) \to g(\zeta)$ für $\mathbb{D} \ni z \to \zeta$. Damit erhält man

$$\delta_{f-g,\alpha} = \delta_{f,\alpha}.$$

Also ist nach (5.5), angewandt mit $h := f - g$,

$$m(\delta_{f,\alpha} > \varepsilon) = m(\delta_{h,\alpha} > \varepsilon) \leq (8 + 6\alpha)\|h\|_1/\varepsilon \leq (8 + 6\alpha)\varepsilon.$$

Wegen $m(\delta_{f,\alpha} > \varepsilon) \to m(\delta_{f,\alpha} > 0)$ für $\varepsilon \to 0$ ist $\delta_{f,\alpha} = 0$ fast überall. □

Wir schreiben P_r für den Operator $L_p(m) \ni f \mapsto Pf(r\,\cdot) \in L_p(m)$ und $P_{\mathbb{C},r}$ für den Operator $L_p(m) \ni f \mapsto P_{\mathbb{C}}f(r\,\cdot) \in L_p(m)$. Außerdem seien $\|P_r\|_p$ und $\|P_{\mathbb{C},r}\|_p$ die entsprechenden Normen. Die Ungleichung (5.3) besagt, dass

$$\|P_r\|_p \leq 1$$

für beliebige $p \in [1, \infty)$ und $0 < r < 1$ gilt. Delikater ist die Frage, ob die Familie der Normen $(\|P_{\mathbb{C},r}\|_p)_{0<r<1}$ beschränkt ist. Wir zeigen, dass dies für $p > 1$ der Fall ist.[63]

Satz 5.17 (M. Riesz) *Es sei $p \in (1, \infty)$. Dann existiert eine Konstante c_p so, dass*

$$\|P_{\mathbb{C},r}\|_p \leq c_p \quad (0 < r < 1).$$

Beweis. 1. Es sei $1 < p \leq 2$. Wir schreiben kurz

$$h := P_{\mathbb{C}}f \quad \text{und} \quad u := Pf.$$

[62] Genauer kann man zeigen, dass $(Pf)^*(\zeta)$ für alle Lebesgue-Punkte von f existiert und dass fast alle $\zeta \in \mathbb{S}$ Lebesgue-Punkte sind; siehe etwa W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987. Theorem 11.23 und Theorem 7.7.

[63] Die entsprechende Aussage ist für $p = 1$ tatsächlich nicht mehr wahr, wie wir später sehen werden.

Nach Bemerkung 5.12 ist h beliebig oft komplex differenzierbar in $\mathbb{D}$ und u harmonisch in $\mathbb{D}$. Zunächst gilt mit $\delta := \delta_p := \pi/(1+p)$, $\alpha := \alpha_p := 1/\cos\delta$ [64] und $\beta := \beta_p := \alpha^p(1+\alpha)$

$$1 \leq \beta(\cos\theta)^p - \alpha\cos(p\theta) \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2), \tag{5.6}$$

denn für $|\theta| \leq \delta$ ist die rechte Seite $\geq \beta(\cos\delta)^p - \alpha = 1$ und für $|\theta| > \delta$ ist wegen $p/(1+p) = 1 - 1/(1+p)$ die rechte Seite $\geq -\alpha\cos(p\theta) \geq -\alpha\cos(p\delta) = \alpha\cos\delta = 1$.
Es sei nun $0 \neq f \in L_p(m)$ und $f \geq 0$. Dann ist $u = \operatorname{Re} h$ und $u(z) > 0$ für alle z (wäre $u(z) = 0$ für ein z, so wäre $fP_z = 0$ fast überall und damit wegen $P_z > 0$ auch $f = 0$ fast überall). Also ist h nullstellenfrei mit $h(0) = \int f > 0$. Mit Differenziation von Parameterintegralen und partieller Integration sieht man, dass durch

$$\log h(z) := \ln h(0) + z\int_0^1 (h'/h)(zt)\,dt \quad (z \in \mathbb{D})$$

eine (jedenfalls) zweimal stetig komplex differenzierbare Stammfunktion zu h'/h auf $\mathbb{D}$ gegeben ist ([Ü]). Dabei gilt $(he^{-\log h})' = 0$. Also ist $he^{-\log h} = h(0)e^{-\log h}(0) = 1$ und folglich

$$e^{\log h} = h.$$

Die Funktion $h^p := e^{p\log h}$ ist ebenfalls zweimal stetig komplex differenzierbar und daher harmonisch. Damit ist auch $\operatorname{Re} h^p$ harmonisch. Ist $\varphi := \operatorname{Im}\log h$, so gilt

$$0 < u = \operatorname{Re} e^{\log h} = e^{\operatorname{Re}\,\log h}\cos\varphi = |h|\cos\varphi$$

und damit wegen $\varphi(0) = 0$ und der Stetigkeit von φ insbesondere $\varphi(\mathbb{D}) \subset (-\pi/2, \pi/2)$. Zudem ist

$$\operatorname{Re} h^p = e^{p\,\operatorname{Re}\,\log h}\cos(p\varphi) = |e^{\log h}|^p\cos(p\varphi) = |h|^p\cos(p\varphi)\,.$$

Nach der Mittelwertformel ist daher

$$0 < h^p(0) = \operatorname{Re} h^p(0) = \operatorname{Re} h^p(r\,\cdot)(0) = \int |h(r\,\cdot)|^p\cos(p\varphi(r\,\cdot))\,dm\,.$$

Aus (5.6) und (5.3) folgt wegen $u^p = |h|^p(\cos\varphi)^p$

$$\int |h(r\,\cdot)|^p\,dm \leq \beta\int u(r\,\cdot)^p\,dm - \alpha\operatorname{Re} h^p(0) \leq \beta\int u(r\,\cdot)^p\,dm \leq \beta\int f^p\,dm\,,$$

also

$$\|P_{\mathbb{C},r}f\|_p \leq \beta^{1/p}\|f\|_p\,.$$

Ist f komplexwertig, so folgt die entsprechende Ungleichung durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil sowie Positiv- und Negativteil. Nach der Minkowski-Ungleichung ist dann die letzte Abschätzung mit $c_p := 4\beta^{1/p}$ erfüllt.
2. Ist $p > 2$, so ergibt sich die Behauptung aus 1. durch Übergang zum konjugierten Exponenten q ([Ü]). Man verwendet dabei im Wesentlichen, dass der Dualraum von $L_p(m)$ isometrisch isomorph zu $L_q(m)$ ist.[65] $\square$

---

[64] hier braucht man $\delta < \pi/2$ und damit $p > 1$.

[65] Genaueres findet man in W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987. Theorem 17.26

Bemerkung 5.18 1. Wir schreiben C_r für den Operator $L_p(m) \ni f \mapsto Cf(r\,\cdot) \in L_p(m)$ und $\|C_r\|_p$ für die entsprechende Norm. Für trigonometrische Polynome P gilt nach Satz 5.11

$$(C_r P)(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\deg P} \widehat{P}(\nu) r^\nu \zeta^\nu \to \sum_{\nu=0}^{\deg P} \widehat{P}(\nu)\zeta^\nu \qquad (r \to 1^-)$$

gleichmäßig auf $\mathbb{S}$ und damit insbesondere in $L_p(m)$. Gilt nun

$$\sup_{r<1} \|C_r\|_p < \infty\,, \tag{5.7}$$

so konvergiert nach Satz 2.10 wegen der Dichtheit der Menge der trigonometrischen Polynome in $L_p(m)$ die Folge der Operatoren C_{r_n} für $1 > r_n \to 1$ gegen einen Operator $C_1 \in L(L_p(m))$. Wegen $(C_r f)^\wedge(k) = (\widehat{f}\,1_{\mathbb{N}_0})(k) r^k$, wieder nach Satz 5.11, ergibt sich

$$(C_1 f)^\wedge = \widehat{f}\,1_{\mathbb{N}_0}\,.$$

In diesem Kontext nennt man $C_1 : L_p(m) \to H_p := \{g \in L_p(m) : \widehat{g}(k) = 0 \text{ für } k \le 0\}$ auch die **Riesz-Projektion** auf $L_p(m)$ und den Raum H_p den **Hardy-Raum** der Ordnung p.[66] Dabei ist $C = P \circ C_1$ und damit $(Cf)^* = C_1 f$ fast überall nach dem Satz von Fatou.
2. Mit Satz 5.11 ist (5.7) äquivalent zu $\sup_{r<1} \|P_{\mathbb{C},r}\|_p < \infty$. Nach dem Satz von M. Riesz (Satz 5.17) ist also (5.7) erfüllt für $p > 1$.

Zum Abschluss wollen wir uns mit der L_p-Konvergenz der Fourier-Teilsummen $S_n f$ befassen. Wir haben in Satz 2.9 bereits gesehen, dass in L_2 Konvergenz vorliegt. Dabei bezeichne $\|S_n\|_p$ die Norm von $L_p(m) \ni f \mapsto S_n f \in L_p(m)$ und $\|C_1\|_p$ die von C_1.

Satz 5.19 *Es sei $1 \le p < \infty$. Ist (5.7) erfüllt, so gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\|_p \le 2\|C_1\|_p$$

und für alle $f \in L_p(m)$

$$\|f - S_n f\|_p \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. 1. Es $f \in L_p(m)$. Für $f_n(w) := w^n f(w)$ ist $\widehat{f_n}(k) = \widehat{f}(k-n)$, also

$$\overline{\zeta}^n \sum_{\mu=0}^{2n} \widehat{f_n}(\mu)\zeta^\mu = \sum_{\mu=0}^{2n} \widehat{f}(\mu - n)\zeta^{\mu-n} = S_n f(\zeta).$$

Mit

$$S_n^+ g(\zeta) := \sum_{\mu=0}^{2n} \widehat{g}(\mu) z^\mu \quad (\zeta \in \mathbb{S},\, g \in L_p(m))$$

ist $\|S_n f\|_p = \|S_n^+ f_n\|_p$ und wegen $\|f_n\|_p = \|f\|_p$ folglich $\|S_n\|_p = \|S_n^+\|_p$. Also ist es hinreichend (und notwendig), $\sup_n \|S_n^+\|_p \le 2\|C_1\|_p$ zu zeigen.

[66] Man beachte, dass $C_1 f = f$ für alle $f \in H_p$ gilt, also $C_1|_{H^p} = \mathrm{id}_{H^p}$.

Ist f stetig differenzierbar mit $\|f\|_p \le 1$, so ist $\widehat{f} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ nach Bemerkung 2.3. Also gilt

$$\begin{aligned} S_n^+ f(\zeta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}(\nu)\,\zeta^\nu - \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \widehat{f}(\nu)\,\zeta^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}(\nu)\,\zeta^\nu - \zeta^{2n+1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \widehat{f}(\mu+2n+1)\,\zeta^\mu \\ &= C_1 f(\zeta) - \zeta^{2n+1} C_1 f_{-2n-1}(\zeta). \end{aligned}$$

und damit $\|S_n^+ f\|_p \le 2\|C_1\|_p$. Da die Menge der trigonometrischen Polynome und damit die auch die der stetig differenzierbaren f nach Satz 2.12 dicht in $L_p(m)$ ist, gilt

$$\|S_n^+\|_p \le 2\|C_1\|_p \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Da $S_n P = P$ für alle trigonometrischen Polynome P und $n \ge \deg P$ gilt, ergibt sich insbesondere $S_n P \to P$ in $L_p(m)$ für alle P, also auf einer dichten Teilmenge von $L_p(m)$. Nach Satz 2.10 konvergiert $S_n f$ gegen f in $L_p(m)$ für alle f. □

Bemerkung 5.20 Nach Bemerkung 5.18 und Satz 5.19 konvergiert für alle $p > 1$ und $f \in L_p(m)$ die Fourier-Reihe in $L_p(m)$ gegen f. Man kann zeigen, dass $\|S_n\|_1 = \|D_n\|_1$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt ([Ü]). Wegen $\|D_n\|_1 \to \infty$ für $n \to \infty$ ([Ü]) ist die Folge $(\|S_n\|_1)_n$ nicht beschränkt. Nach Bemerkung 5.18 und Satz 5.19 ist damit insbesondere die Aussage des Satzes von M. Riesz nicht mehr gültig für $p = 1$.

Bemerkung 5.21 Schärfer als Satz 2.10 gilt der Satz von Banach-Steinhaus: Sind X, Y Banachräume und ist (T_n) eine Folge in $L(X,Y)$, so sind äquivalent:

a) Es existiert ein Operator $T \in L(X,Y)$ mit $T_n x \to Tx$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in X$.

b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ und es existiert eine dichte Teilmenge D von X so, dass $(T_n x)_n$ für alle $x \in D$ konvergiert.

Die Aussage, dass b) schon a) impliziert, folgt aus Satz 2.10. Die umgekehrte Aussage ergibt sich aus den Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.[67] Sind nun $X = Y = L_p(m)$ und $T_n = S_n$, so ist die L_p-Konvergenz von $S_n f$ gegen f für alle f äquivalent zur Beschränktheit der Folge $(\|S_n\|_p)_n$. Also existieren nach Bemerkung 5.20 Funktionen $f \in L_1(m)$, deren Fourier-Reihe nicht in L_1 gegen f konvergiert. Entsprechend kann man für $\zeta \in \mathbb{S}$ zeigen, dass $\|T_n\| = \|D_n\|_1$ für alle n gilt, wobei $T_n f = S_n f(\zeta)$ ist und $\|T_n\|$ die Operatornorm von T_n auf $(C(\mathbb{S}), \|\cdot\|_\infty)$ bezeichnet (vgl. Bemerkungen 2.3 und 2.8). Damit existieren auch Funktionen in $C(\mathbb{S})$, für die die Fourier-Reihe an ζ divergiert.

[67] siehe etwa `https://www.math.uni-trier.de//~mueller/Funktionalanalysis/Funktionalanalysis_WS1819.pdf`. Satz 2.4

A Maße und Integrale

Definition A.1 Es sei $\Omega \neq \varnothing$ eine Menge.
1. Ist $\Sigma \subset \mathrm{Pot}(\Omega)$, so heißt Σ eine **σ-Algebra** (in Ω), falls gilt

(σ1) $\varnothing \in \Sigma$.

(σ2) Mit $A \in \Sigma$ ist auch $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

(σ3) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n\in N}$ eine Familie in Σ, so ist $\bigcup_{n\in N} A_n \in \Sigma$.

Das Paar (Ω, Σ) nennt man einen **Messraum**.
2. Ist Σ eine σ-Algebra, so heißt eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ **Maß** (auf Σ), falls

(M1) $\mu(\varnothing) = 0$.

(M2) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n\in N}$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen in Σ, so ist mit $\infty + x = \infty$ für $x \in [0, \infty]$

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in N} A_n\Big) = \sum_{n\in N} \mu(A_n) \quad \Big(:= \sup_{F\subset N \text{ endlich}} \sum_{n\in F} \mu(A_n)\Big).$$

In diesem Fall nennt man (Ω, Σ, μ) einen **Maßraum**. Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so heißt μ **endlich** und im Falle $\mu(\Omega) = 1$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.
3. Ist μ ein Maß auf Σ, so heißt $A \in \Sigma$ eine (μ-)**Nullmenge**, falls $\mu(A) = 0$ ist. Gilt eine Eigenschaft für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Nullmenge, so sagt man, die Eigenschaft gilt (μ-)**fast überall**.

Beispiel A.2 1. Ist $\Omega \neq \varnothing$, so definiert

$$\sigma(A) := \#A \qquad \big(A \in \mathrm{Pot}(\Omega)\big)$$

ein Maß auf $\mathrm{Pot}(\Omega)$. Man nennt σ das **Zählmaß** auf Ω. Dabei ist σ endlich genau dann, wenn Ω endlich ist.
2. Ist (S, d) ein metrischer Raum, so heißt die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält, die **Borel-σ-Algebra** bezüglich (S, d). Wir schreiben dafür $\mathscr{B}(S, d)$ (oder $\mathscr{B}(d)$ oder $\mathscr{B}(S)$). Ist speziell $(S, d) = (\mathbb{R}^m, |\cdot|)$, so existiert genau ein Maß $\lambda = \lambda_m$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\lambda\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]\big) = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$$

für alle Rechtecke $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$. Man nennt λ_m das m-dimensionale **Lebesgue-Maß**.

Definition A.3 Es sei (Ω, Σ) ein Messraum. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so heißt f **messbar**, falls $f^{-1}(U) \in \Sigma$ für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ gilt. Weiter heißt f **einfach** (bzw. **Elementarfunktion**), falls f messbar und $f(\Omega)$ endlich ist.

Satz A.4 *Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, so existiert eine Folge (φ_n) einfacher Funktionen mit $\varphi_n \to f$ punktweise auf Ω und $|\varphi_n| \leq |f|$.*

Bemerkung und Definition A.5 Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.
1. Ist φ einfach mit $\varphi \geq 0$ oder $\mu(\varphi \neq 0) < \infty$, so setzen wir mit $0 \cdot \infty := 0$

$$\int \varphi \, d\mu := \int \varphi(\omega) \, d\mu(\omega) := \sum_{\alpha \in \varphi(\Omega)} \alpha \cdot \mu(\varphi = \alpha) \begin{cases} \in [0, \infty], & \text{falls } \varphi \geq 0 \\ \in \mathbb{C}, & \text{falls } \mu(\varphi \neq 0) < \infty \end{cases} .$$

2. Ist g messbar und $g \geq 0$, so setzen wir

$$\int g \, d\mu := \sup \Big\{ \int \varphi \, d\mu : \varphi \text{ einfach}, 0 \leq \varphi \leq f \Big\} \in [0, \infty] \, .$$

Durch

$$(g\mu)(A) := \int g 1_A \, d\mu \quad (A \in \Sigma)$$

ein Maß $g\mu$ auf Σ definiert. Die Funktion g heißt dann (μ-)**Dichte** des Maßes $g\mu$.
3. Ist f messbar, so heißt f (μ-)**integrierbar**, falls $\int |f| \, d\mu < \infty$ gilt. Wir setzen

$$\mathscr{L}(\mu) := \mathscr{L}_1(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ integrierbar}\}.$$

Damit ist durch

$$\langle f, \mu \rangle := \int f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, d\mu \in \mathbb{C} \, ,$$

wobei (φ_n) eine beliebige Folge wie in S. A.4 ist, eine lineare Abbildung $\langle \cdot, \mu \rangle : \mathscr{L}(\mu) \to \mathbb{C}$ (wohl-)definiert mit

$$\Big| \int f \, d\mu \Big| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Weiter heißt $\int f \, d\mu$ das (μ)-**Integral** von f. Ist $g \geq 0$ messbar, so gilt für $f \in \mathscr{L}(g\mu)$

$$\int f \, d(g\mu) = \int fg \, d\mu.$$

4. Ist $M \in \Sigma$, so ist mit f auch $1_M f \in \mathscr{L}(\mu)$. Man schreibt dann auch

$$\int_M f \, d\mu := \int f \, d(1_M \mu) = \int f 1_M \, d\mu \, .$$

Die Schreibweise verwendet man auch im Fall messbarer Funktionen $f \geq 0$.

Bemerkung A.6 Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.
1. Ist $M \in \Sigma$, so sind durch

$$\Sigma \cap M := \{A \cap M : A \in \Sigma\} = \{B \in \Sigma : B \subset M\}$$

eine σ-Algebra in M und durch $\mu_M := \mu|_{\Sigma\cap M}$ ein Maß μ_M auf $\Sigma \cap M$ definiert. Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und Regelfunktionen f auf $[a,b]$ gilt damit

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f_0 \, d\lambda = \int f_0 \, d(1_{[a,b]}\lambda) = \int f \, d\lambda_{[a,b]},$$

wobei f_0 die durch 0 auf $\mathbb{R}$ erweiterte Funktion bezeichnet.
2. Sind $S \in \mathscr{B}(\mathbb{C})$ und $\varphi : \Omega \to S$ messbar, so ist durch

$$(\varphi_*\mu)(B) := \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \qquad \big(B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}) \cap S\big)$$

ein Maß $\varphi_*\mu$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{C}) \cap S$ definiert (andere Schreibweisen: μ^φ oder $\varphi(\mu)$). Das Maß $\varphi_*\mu$ heißt **Bildmaß** von μ unter φ. Es gilt damit: Ist $f : S \to \mathbb{C}$ messbar, so ist f genau dann $\varphi_*\mu$-integrierbar, wenn $f \circ \varphi$ μ-integrierbar ist und in diesem Fall ist

$$\int f \, d(\varphi_*\mu) = \int (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

Bemerkung A.7 Es seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Wir setzen

$$\mathscr{L}_p(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \ \text{ messbar}, \ \int |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

Ist $p > 1$ und $q > 1$ mit $p + q = pq$, so gilt für $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$ und $g \in \mathscr{L}_q(\mu)$ die **Hölder-Ungleichung**

$$\int |fg| \, d\mu \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q \, d\mu\Big)^{1/q}$$

und damit die (auch für $p = 1$ gültige) **Minkowski-Ungleichung**

$$\Big(\int |f+g|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int |g|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \qquad (f, g \in \mathscr{L}_p(\mu)).$$

Ist $\int 1 \, d\mu = \mu(\Omega) < \infty$, so ergibt sich aus der Hölder-Ungleichung mit $g = 1$ insbesondere

$$\Big(\int |f| \, d\mu\Big)^p \leq \mu(\Omega)^{p/q} \int |f|^p \, d\mu.$$

Wegen der Gültigkeit der Minkowski-Ungleichung ist durch

$$\|f\|_p := \|f\|_{p,\mu} := \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \qquad \big(f \in \mathscr{L}_p(\mu)\big)$$

eine Halbnorm auf $\mathscr{L}_p(\mu)$ gegeben. Mit $N := \{f \in \mathscr{L}_p(\mu) : f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}$ wird $L_p(\mu) := \mathscr{L}_p(\mu)/N$ mit

$$\big\|[f]\big\|_p := \int |f|^p \, d\mu$$

ein Banachraum. Man schreibt wieder kurz f statt $[f]$ und spricht auch von Funktionen.

Bemerkung und Definition A.8 Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $\lambda = \lambda_d$. Für $M \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$\mathscr{L}(M) := \mathscr{L}(1_M\lambda) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ messbar}, \int_M |f|\, d\lambda < \infty\}.$$

Weiter schreiben wir für $f \in \mathscr{L}(M)$ kurz

$$\int_M f := \int_M f(x)\, dx := \int f\, d(1_M\lambda) = \int_M f\, d\lambda$$

für das d-dimensionale Lebesgue-Integral auf M und noch kürzer $\int f := \int f(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^d} f$ im Falle $M = \mathbb{R}^d$.

Bemerkung A.9 E seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum und μ ein endliches Maß auf $\mathscr{B}(X)$. Dann gilt für $f \in C(X)$ und $p \in [1, \infty)$

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p}\|f\|_\infty.$$

Man kann zeigen[68]: Für alle $p \in [1, \infty)$ ist die Menge der stetigen Funktionen $C(X)$ dicht in $L_p(\mu)$.

Bemerkung und Definition A.10 Es sei (X, Σ) ein Messraum. Eine Abbildung $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ heißt **komplexes Maß**, falls μ σ-additiv ist, d. h. falls für jede Menge $A \in \Sigma$ und jede disjunkte (abzählbare) Zerlegung $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von A in Σ die Folge $(\mu(A_j))$ absolut summierbar ist mit

$$\mu(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \mu(A_j).$$

Man kann zeigen:[69] Es existieren genau ein Maß $|\mu| \geq 0$, genannt die **Totalvariation** von μ, und eine $|\mu|$-fast überall eindeutig definierte messbare Funktion $h : X \to \mathbb{S}$ (also $|h| = 1$) mit

$$\mu(A) = \int_A h\, d|\mu| \qquad (A \in \mathscr{B}(X)).$$

Dabei ist $|\mu|$ endlich, also $|\mu|(X) < \infty$. Man schreibt dann auch $\mu = h|\mu|$ und spricht in dem Fall von der **Polarzerlegung** von μ. Für $|\mu|$-integrierbare $g : X \to \mathbb{C}$ setzt man

$$\int g\, d\mu := \int gh\, d|\mu|.$$

Dann gilt

$$|\int g\, d\mu| \leq \int |g|\, d|\mu|.$$

Ist $X \subset \mathbb{C}^N$ lokalkompakt und μ ein komplexes Maß auf $\mathscr{B}(X)$, so ist durch

$$C_0(X) \ni g \mapsto \int g\, d\mu \in \mathbb{C}$$

[68] Siehe Maßtheorie oder W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
[69] Siehe etwa W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987

ein stetiges lineares Funktional auf $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ gegeben. Man kann zeigen: Jedes stetige lineare Funktional auf $C_0(X)$ ist von dieser Form für genau ein komplexes Maß μ auf $\mathscr{B}(X)$. Dies ist die wesentliche Aussage des Rieszschen Darstellungssatzes für $C(X)$.[70] Wir identifizieren μ und das entsprechende Funktional und schreiben $C_0(X)'$ für die Menge der komplexen Maße auf $C_0(X)$.

[70] Ein Beweis findet sich wieder etwa in W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

Index