J. Müller

WS 2021/22
06.01.2022

9. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A29: Es seien $P(z) = \sum_{|\alpha|\le d} c_\alpha x^\alpha$ ein Polynom von Grad $\le d$ in N Variablen und $P(D) := \sum_{|\alpha|\le d} c_\alpha \partial^\alpha$. Weiter sei $P^*(z) := \sum_{|\alpha|\le d} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha z^\alpha$. Überlegen Sie sich, dass

$$P(D)(h^\vee) = (P^* h)^\vee$$

für $h \in \mathscr{T}$ gilt.

A30: Es sei $f \in L_1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\int f = \int f(t - 1/t)\, dt\,.$$

Hinweis: $\int_{\mathbb{R}_-} f(t-1/t)\, dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(1/t - t)\, dt$.

A31: Beweisen Sie: Ist ω_{N-1} die Oberfläche der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{N-1} := \{\zeta \in \mathbb{R}^N : |\zeta| = 1\}$, so gilt

$$\omega_{N-1} = \frac{2\sqrt{\pi}^N}{\Gamma(N/2)}\,.$$

Hinweis: Ist σ_{N-1} das Oberfächenmaß auf $\mathbb{S}^{N-1}$, so gilt

$$\int f\, d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}_+} \int f(r\zeta)\, d\sigma_{N-1}(\zeta)\, r^{N-1}\ dr\,.$$

A32: Zeigen Sie:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}^{N+1}}\, dx = \omega_{N-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{N-1}(\theta)\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}^{N+1}}{\Gamma((N+1)/2)}\,.$$

Hinweis: Für $\alpha > -1$ gilt

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(\theta)\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\Gamma(\alpha/2+1)}\,.$$