J. Müller

WS 2021/22
16.12.2021

8. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A25: Es sei $1 \leq p \leq 2$. Zeigen Sie, dass $L_p \subset L_1 + L_2$ gilt.

A26: Es sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie: Ist $\int g\, d\mu = 0$ für alle $g \in C_0$, so ist $\mu = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die Polarzerlgung von μ und die Tatsache, dass C_0 dicht in $L_1(|\mu|)$ ist.

A27: Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $R > 0$ das Doppelintegral

$$\int_0^R \int_0^\infty \sin(t)\, e^{-st}\, ds\, dt$$

und beachten Sie, dass $\sin(t)\, e^{-st} = \operatorname{Im}(e^{(i-s)t})$ ist.

A28: Ist $\varphi \in \mathscr{S}'$, so definiert man für $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ die Ableitung $\partial^\alpha \varphi$ der Ordnung α durch

$$\langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle \quad (u \in \mathscr{S}).$$

Weiter sei $\delta_0 \in \mathscr{S}'$ definiert durch $\langle u, \delta_0 \rangle := u(0)$ für $u \in \mathscr{S}$. Zeigen Sie: $(\partial^\alpha \delta_0)^\wedge = z^\alpha$ in dem Sinne, dass

$$\langle h, (\partial^\alpha \delta_0)^\wedge \rangle = \int h(z) z^\alpha\, dm(z) \quad (h \in \mathscr{T}).$$

Hinweis: Es gilt $\partial^\alpha (h^\vee) = (-1)^{|\alpha|} (M_\alpha h)^\vee$ (vgl. Bemerkung 3.10 der Vorlesung).

- Zusatzaufgabe zum neuen Jahr:

  Welche (zahlentheoretische) Eigenschaft hat die Zahl 2022, die zum nächsten Mal erst im Jahr 10110 wieder gilt?

Schöne Festtage und alles Gute für das Jahr 2022