J. Müller

WS 2021/22
11.11.2021

3. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A8: Es sei $z = e^{it} \in \mathbb{S}$. Zeigen Sie:

a) $D_n(z) = \begin{cases} \dfrac{z^{n+1} - \overline{z}^n}{z-1} = \dfrac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}, & z \neq 1 \\ 2n+1, & z = 1 \end{cases}.$

b) $\int |D_n| \, dm \to \infty$ für $n \to \infty$.

A9: Zeigen Sie: Für $t \in (-\pi, \pi]$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} 2\sin(\nu t) = \begin{cases} t, & t \neq \pi \\ 0, & t = \pi \end{cases}.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu z^\nu/\nu$ für $-1 \neq z \in \mathbb{S}$ konvergiert und orientieren Sie sich am Beispiel 1.9.

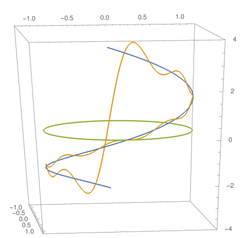

Abbildung 1: $f = \arg$ und $S_8 f$

A10: (Poisson-Kern) Für $w \in \mathbb{D}$ sei

$$P(w) := \sum_{\nu=0}^{\infty} w^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{w}^\nu = 2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-w}\Big) - 1.$$

Beweisen Sie:

a) $P(w) = \mathrm{Re}\Big(\dfrac{1+w}{1-w}\Big) = \dfrac{1-|w|^2}{|1-w|^2}.$

b) Ist (r_n) eine Folge in $(0,1)$ mit $r_n \to 1$, so ist durch $Q_n(z) := P(r_n z)$ für $z \in \mathbb{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ eine Folge guter Kerne gegeben.

c) (Abel-Summierbarkeit) Ist f m-integrierbar und stetig an $z \in \mathbb{S}$, so gilt

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} r^{|\nu|} \widehat{f}(\nu) z^\nu \to f(z) \qquad (r \to 1^-).$$