J. Müller

WS 2021/22
04.11.2021

2. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A5: Zeigen Sie: Für $f, g \in L_2(m)$ ist $(f * g)\widehat{\ } \in \ell_1(\mathbb{Z})$ mit

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f * g)\widehat{\ }(k)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

A6: Beweisen Sie:

a) Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{S})$ gilt

$$(\nu * \mu)(A) = \int\int 1_A(z\zeta)\, d\nu(z) d\mu(\zeta).$$

b) Für alle $h \in C(\mathbb{S})$ gilt

$$\int h\, d(\nu * \mu) = \int\int h(z\zeta)\, d\nu(z) d\mu(\zeta).$$

Hinweis: Mit

$$B_{n,j} := \{z = e^{it} \in \mathbb{S} : t \in [2\pi(j-1)/n, 2\pi j/n)\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt $\sum\limits_{j=1}^{n} h(\zeta_n^{j-1}) 1_{B_{n,j}} \to h$ gleichmäßig auf $\mathbb{S}$.

A7: Es sei $U = U_d$ wie Bemerkung 1.7 der Vorlesung.

a) Zeigen Sie, dass $U^* U = dE$ gilt.

b) Verifizieren Sie die in Bemerkung 1.7 angegebene Zerlegung

$$U_{2d} = \begin{pmatrix} U_d & D_d U_d \\ U_d & -D_d U_d \end{pmatrix} P_d.$$

Hinweis: Für $z = (z_0, \ldots, z_{2d-1})^\top$ ist $P_d z = (z_0, z_2, \ldots, z_{2d-2}, z_1, z_3, \ldots, z_{2d-1})^\top$.