11. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A36: Durch

$$\langle h,k\rangle := \int\int h(t,\zeta)\overline{k}(t,\zeta)\,d\sigma_{N-1}(\zeta)\,dt \quad (h,k\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{N-1}))$$

und

$$\langle u,v\rangle' := \int u\overline{v} \qquad (u,v\in\mathscr{S}_N)$$

sind Skalarprodukte auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{N-1})$ bzw. $\mathscr{S}_N$ gegeben. Zeigen Sie: R^* ist der duale Operator zu R, d. h. für $f\in\mathscr{S}_N$ und $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{N-1})$ gilt

$$\langle Rf,g\rangle = \langle f,R^*g\rangle'\,.$$

A37: a) (sphärische Polarkoordinaten) Es seien $\sigma=\sigma_2$ das Oberflächenmaß der 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ und $D:=(-\pi,\pi)\times(0,\pi)$. Weiter sei $\varphi: D\to\mathbb{S}^2$ definiert durch

$$\varphi(s,t)=\begin{pmatrix}\cos s\,\sin t\\ \sin s\,\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \quad ((s,t)\in D).$$

Zeigen Sie: Für $g\in L_1(\sigma)$ gilt

$$\int g(\zeta)\,d\sigma(\zeta) := \int_D (g\circ\varphi)\sqrt{\det((J\varphi)^\top J\varphi)}\,d\lambda_2 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} g(\varphi(s,t))\,\sin t\,ds\,dt\,.$$

b) Beweisen Sie:

$$\widehat{\sigma}(z) = 4\pi\sin(|z|)/|z| \qquad (z\in i\mathbb{R}^3).$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass σ_{N-1} rotationsinvariant ist, d. h. für lineare Abbildungen $U:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ mit $U(\zeta)\cdot U(\eta)=\zeta\cdot\eta$ gilt

$$\int g(U\zeta)\,d\sigma(\zeta) = \int g(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \qquad (g\in L_1(\sigma)).$$

A38: Es sei $v:\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$v(x) := \begin{cases}\ln|x|, & \text{falls } N=2\\ |x|^{2-N}, & \text{falls } N>2\end{cases}.$$

Berechnen Sie ∇v und zeigen Sie, dass v harmonisch ist.