J. Müller

WS 2021/22
13.01.2022

10. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A33: Es sei u die Lösung des Cauchy-Problems bzgl. f, g aus Satz 4.8 der Vorlesung und $u_t := u(t, \cdot)$. Die Energie $E : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ von u ist definiert durch

$$E(t) = \int |\partial_t u_t|^2 + \int |\nabla u_t|^2 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass E konstant ist.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{C}^2$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

A34: Es sei $T : \mathscr{S}_N \to \mathscr{S}_N$ definiert durch

$$(Tu)(x) := -\Delta u(x) + |x|^2 u(x) \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Zeigen Sie: Ist $\langle u, v \rangle := \int u\overline{v}$, so gilt

$$\langle Tu, u \rangle \geq N \langle u, u \rangle$$

Hinweis: Betrachten Sie den Spezialfall $\langle u, u \rangle = 1$ und verwenden Sie die Heisenbergsche Ungleichung.

A35: Für $u \in \mathscr{S}_1$ gelte Gleichheit in der Heisenbergschen Ungleichung. Zeigen Sie: Dann existieren B mit $B > 0$ und $A \neq 0$ so, dass

$$u(t) = Ae^{-Bt^2} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Rufen Sie sich in Erinnerung, wann Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt.