

6. Hausübung zur Einführung in die Mathematik

Abgabe: Bis Freitag, 18.12.2020, 10.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 6. Hausübung“

Hausübungen

H16: Es seien $M = \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$ und $f := 1_M \text{id}_{[0, \infty)}$ wie in Beispiel 4.12. Hat die Funktion $1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \circ f$ einen Grenzwert an der Stelle 0 ?

H17: (Sägezahnfunktion) Es seien $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ die Gaußklammer von x und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x - [x]$. Untersuchen Sie f an allen Stellen $a \in \mathbb{R}$ auf Existenz rechts- und linksseitiger Grenzwerte und auf Stetigkeit. Hat f einen Grenzwert für $x \rightarrow +\infty$?

H18: Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

a) (Polynomdivision) Ist p ein Polynom vom Grad n und ist z_0 eine Nullstelle von p , so ist die rationale Funktion $z \mapsto p(z)/(z - z_0)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$.

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung per Induktion nach n . Betrachten Sie für ein Polynom p vom Grad $n + 1$ mit Koeffizienten c_0, \dots, c_{n+1} das Polynom $s(z) := p(z) - c_{n+1}z^n(z - z_0)$ vom Grad $\leq n$.

b) Jedes Polynom p vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Hinweis: Induktion und a).