

**4. Hausübung zur Einführung in die Mathematik**

Abgabe: Bis **Freitag, 04.12.2020, 10.00 Uhr**, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 4. Hausübung“

**Hausübungen**

H10: Zeigen Sie: Ist  $m! \leq (m/2)^m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , so gilt  $n! \leq (n/2)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq m$ .

Hinweis: Nach G8 b) ist  $n^n \leq (n+1)^n/2$ .

Welches  $m$  ist das kleinste, für das die Bedingung gilt?

H11: Es seien  $K$  ein geordneter Körper und  $x \in K$ . Zeigen Sie: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$(1+x)^n \begin{cases} \geq 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ \leq 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 & \text{falls } -1 < x < 0. \end{cases}$$

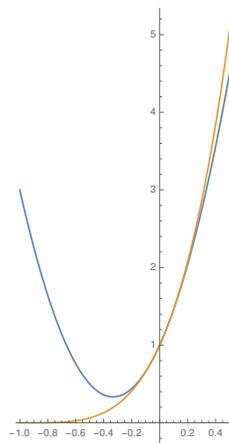


Abbildung 1:  $x \mapsto (1+x)^4$  und  $x \mapsto 1 + 4x + 6x^2$

H12: Es seien  $x, y \in \mathbb{R}_+$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

- $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$ . Hinweis: G7.
- $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .
- Ist  $x < y$ , so gilt  $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{y-x}{2\sqrt{x}}$ .