J. Müller

WS 2020/2021
18.11.2020

3. Hausübung zur Einführung in die Mathematik

Abgabe: Bis Mittwoch, 25.11.2020, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 3. Hausübung"

Hausübungen

H7: a) Zeigen Sie: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{m+\nu-1}{m} = \binom{m+n-1}{m+1}.$$

Was ergibt sich als Spezialfall für $m = 1$ und $m = 2$?

b) Finden Sie – etwa unter Verwendung von a) – eine geschlossene Darstellung für $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} \nu^2$.

H8: a) Überlegen Sie sich, dass $7, 9$ und 65 für jedes $n \in \mathbb{N}$ Teiler von $8^{4n} - 1$ sind.

b) Zeigen Sie: Ist $1 < k \in \mathbb{N}$ keine Primzahl, also $k = rs$ für $1 < r, s \in \mathbb{N}$, so ist auch $2^k - 1$ keine Primzahl.

Hinweis zu a) und b): Nach der geometrischen Summenformel ist für $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ wegen $\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} a^\nu \in \mathbb{Z}$ die ganze Zahl $a - 1$ Teiler von $a^m - 1$.

H9: Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien X eine n-elementige Menge, $k \in \{0, \dots, n\}$ und $\mathscr{A}_k(X) := \{A \subset X : \#A = k\}$. Zeigen Sie:

$$\#\mathscr{A}_k(X) = \binom{n}{k}.$$