

9. Gruppenübung zur Einführung in die Mathematik

G25: Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x + x$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- f ist streng wachsend mit $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$ und $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$.
- Für alle $c \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = c$.

G26: Beweisen Sie:

- Für $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$i^m + (-i)^m = \begin{cases} 2(-1)^{m/2}, & \text{falls } m \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

- Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^k$ hat den Konvergenzradius ∞ .

- Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$.

G27: (Drehungen in der Ebene) Es sei $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für $z = (s, t) \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{i\theta} z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$