J. Müller

SoS 2021
02.06.2021

7. Hausübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Abgabe: Bis Mittwoch, 09.06.2021, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 7. Hausübung“

H19: Es seien $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ linear und $(a_{1,k}, \ldots, a_{m,k})^\top := T\mathbf{e}_k$ für $k = 1, \ldots, d$. Beweisen Sie: Mit $|T|_\infty := \max\{|a_{j,k}| : j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, d\}$ gilt

$$|T|_\infty \leq \sup_{|x| \leq 1} |Tx| \leq \sqrt{m}\, d\, |T|_\infty.$$

H20: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie:

a) Durch

$$|f|_1 := \int_a^b |f| \qquad (f \in C[a, b])$$

ist eine Norm auf $C[a, b]$ definiert.

b) Ist $V := C[0, 1]$ mit der Supremumsnorm $|\cdot|_\infty$ versehen, so ist die lineare Abbildung $T : V \to \mathbb{C}$ mit $Tf := f(1)$ lokal beschränkt, und ist V mit der Norm $|\cdot|_1$ versehen, so ist T nicht lokal beschränkt.

Hinweis: Betrachten Sie im zweiten Fall $f_n(t) := (n + 1)t^n$.

H21: Berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := e^{x^2 y^3}$ die Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Richtungsableitungen $\partial_{\mathbf{v}} f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und alle Richtungen $\mathbf{v} = (u, w) \in \mathbb{R}^2$.