J. Müller

SoS 2021
19.05.2021

6. Hausübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Abgabe: Bis Mittwoch, 02.06.2021, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 6. Hausübung“

H16: Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s^2)^n}\,.$$

Hinweis: Es gilt $\sin^{-2} = 1 + \cot^2 = -\cot'$ auf $(0, \pi)$.

H17:

a) Es sei $f \in R([1, \infty))$ beschränkt. Zeigen Sie: Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$ ist $t \mapsto f(t)/t^\alpha$ absolut integrierbar auf $[1, \infty)$.

b) Zeigen Sie: $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = \sin(\pi t)/t$ ist nicht absolut integrierbar auf $[1, \infty)$.
Hinweis: $\int_1^{n+1} |f| = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \int_\nu^{\nu+1} |f|$ und für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_k^{k+1} |\sin(\pi t)|\, dt = \int_0^1 \sin(\pi s)\, ds.$$

H18: Es sei

$$f(t) := \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)} \qquad (t \geq 1).$$

Berechnen Sie $\int_1^R f$ für $R > 1$ und zeigen Sie, dass die Folge $\left(\sum\limits_{\nu=2}^{n} \frac{1}{\nu \ln \nu} - \ln\ln(n+1)\right)_{n\geq 2}$ konvergiert.