J. Müller

SoS 2021
05.05.2021

4. Hausübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Abgabe: Bis Mittwoch, 12.05.2021, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 4. Hausübung"

H10: Es seien $\varphi_n \in T[0,1]$ wie in Satz 2.9 für $f(t) = e^t$ und $\tau_{j,n} = t_{j-1,n} = (j-1)/n$ für $j = 1, \ldots n$. Berechnen Sie $\int_0^1 \varphi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie

$$0 < \frac{(e-1) - \int_0^1 \varphi_n}{e-1} < \frac{1}{n}.$$

Hinweis: Nach dem Mittelwertsatz gilt $1 < (e^x - 1)/x < e^x$ für $x > 0$.

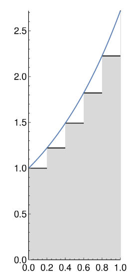

Abbildung 1: Treppenfunktion φ_5 und $\int_0^1 \varphi_5$ als Approximation von $\int_0^1 e^t\, dt$.

H11: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\alpha(t) := \begin{cases} t^\alpha \cos(\pi/t), & t \in (0,1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

Für welche α ist f_α eine Regelfunktion?

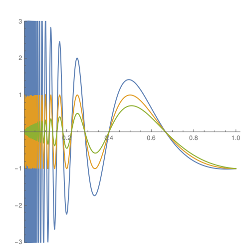

Abbildung 2: $t \mapsto t^{1/2}\cos(\pi/t)$, $t \mapsto \cos(\pi/t)$ und $t \mapsto t^{-1/2}\cos(\pi/t)$

H12: Beweisen Sie: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist f eine Regelfunktion.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis zu Satz 2.9 und betrachten Sie dabei die Urbildmengen $f^{-1}(I_{j,n})$ der Zerlegungen $E_n([f(a), f(b)]) = \{I_{j,n} : j = 0, \ldots, n\}$ des Intervalls $[f(a), f(b)]$.