

3. Hausübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Abgabe: Bis Mittwoch, 05.05.2021, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 3. Hausübung“

H7: Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := e^{-z^2}$ für $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie eine Potenzreihenentwicklung von f und damit eine Stammfunktion in Form einer Potenzreihe. Berechnen Sie zudem die Ableitungen $f^{(k)}(0)$ für $k \in \mathbb{N}$.

H8: Zeigen Sie:

a) Für $x \in (-1, 1)$ gilt $\arctan x = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} x^{2\mu+1}}{2\mu+1}$.

Hinweis: Orientieren Sie sich an Beispiel 1.30 der Vorlesung.

b) $\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{2\mu+1} = \frac{\pi}{4}$.

H9: Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

a) f ist beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R} mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe G9.

b) f ist nicht analytisch an 0.