J. Müller

SoS 2021
23.06.2021

10. Hausübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

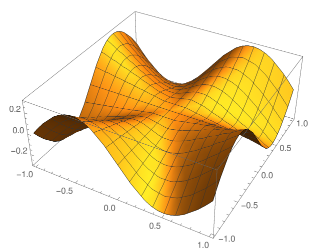
Abgabe: Bis Mittwoch, 30.06.2021, 12.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 10. Hausübung“

H28: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}(y^2-x^2) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Berechnen Sie $\partial_1 f(x,y)$ und $\partial_2 f(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie: $\partial_2\partial_1 f(0,0) = 1$ und $\partial_1\partial_2 f(0,0) = -1$.



H29: (Fortsetzung G28) Es sei $f : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = y^x \qquad (x \in \mathbb{R},\ y > 0).$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Ordnung 3 und $\partial^\alpha f$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|\alpha|_1 = 3$.

H30: Es seien $n, d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Für $h \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha|_1 = n$ gilt $|h^\alpha| \leq |h|^n$.

b) Sind $X \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^n(X,\mathbb{R})$ und $a \in X$, so ist

$$h \mapsto \big(f(a+h) - T_n(f,a)(h)\big)/|h|^n$$

abklingend an 0.

Hinweis: Nach der Taylorformel (4.3) existiert zu jedem h mit $|h|$ genügend klein ein $\xi(h) \in [a, a+h]$ mit

$$f(a+h) - T_n(f,a)(h) = \sum_{|\alpha|_1 = n} \big(\partial^\alpha f(\xi(h)) - \partial^\alpha f(a)\big) h^\alpha/\alpha!\ .$$

Beachten Sie, dass $\xi(h) \to a$ für $h \to 0$ gilt und dass $\partial^\alpha f$ für $|\alpha|_1 = n$ stetig ist.