

9. Gruppenübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

G25: Sind X eine Menge, $c \in \mathbb{R}$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, so heißt

$$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in X : f(x) = c\}$$

die Höhenlinie zum Niveau c . Rechnen Sie für $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$ nach, dass

Gradient \perp Höhenlinie

in jedem Punkt (x, y) gilt, d. h. der Gradient und die Tangente an die betreffende Höhenlinie stehen senkrecht aufeinander.

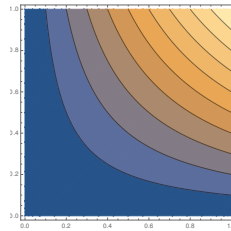


Abbildung 1: Höhenlinien von f

G26: Es seien (X, d) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Zeigen Sie: Für alle in Y abgeschlossenen Mengen B ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X .

G27: (Ellipsen) Für $a, b > 0$ sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}.$$

Entscheiden Sie, welche der Mengen M , $\mathbb{R}^2 \setminus M$ sowie $M \cap (0, \infty)^2$ offen bzw. abgeschlossen bzw. kompakt in \mathbb{R}^2 sind.