J. Müller

SoS 2021
10.05.2021

5. Gruppenübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

G13: Berechnen Sie

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 te^t\,dt\,, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_0^2 \frac{t^2}{1+t^3}\,dt\,.$$

G14: Beweisen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\,dt = \int_0^1 (1-s^2)^n\,ds = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,.$$

G15: Es sei $f(x) = \ln(1/(1-x))$ für $x \in (-1,1)$. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $h \in (-1,1)$ gilt

$$T_n(f,0)(h) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h^\nu}{\nu}$$

und

$$|R_n(f,0)(h)| \le |h|^{n+1} \int_0^1 \frac{dt}{1-th}.$$

Hinweis: Nach H6 ist $f^{(n+1)}(x) = n!/(1-x)^{n+1}$. Außerdem gilt $1-t \le 1-th$ für $t \in [0,1]$.