

3. Gruppenübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

G7: Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie eine Potenzreihenentwicklung von f und damit eine Stammfunktion in Form einer Potenzreihe. Berechnen Sie zudem die Ableitungen $f^{(k)}(0)$ für $k \in \mathbb{N}$.

G8: Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{D}$ gilt $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} z^{2\mu}$.

G9: Es sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := e^{-1/x}$. Zeigen Sie per Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein Polynom p_n so, dass

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) x^{-2n} e^{-1/x} \quad (x > 0).$$

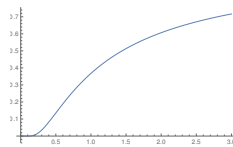


Abbildung 1: $e^{-1/x}$ auf dem Intervall $(0, 3]$